MAT345 (2012-2013 Güz), Alıştırmalar VIII

Özer Öztürk

Bu alıştırmaları **28 Aralık Cuma**'ya kadar çözmenizi bekliyorum.

1. $f : X \to Y$ bir homeomorfizm olsun. $p \in X$ olsun. $X - \{p\}$ ve $Y - \{f(p)\}$ uzaylarının homeomorfik olduğunu ispatlayın. Bunu kullanarak çemberle doğrunun ve çemberle sekizin homeomorfik olmadıklarını gösterin. $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{R}^2$ homeomorfik midir?

2. $\{0, 1\}$ üzerindeki $\{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$ topolojisi yol bağlantılı mıdır?

3. İki kompakt altkümenin birleşimi her zaman kompakt mıdır?

4. X ile Y topolojik uzaylar ve $f : X \to Y$ sürekli örten bir fonksiyon olsun. Ayrıxa X kompakt ve Y üzerindeki topoloji f ile elde edilen bölüm topolojisi olsun. Y'nin Hausdorff olması için bir gerek ve yeter koşulun f'nin kapalı olması olduğunu gösterin.

5. Reel sayılar üzerindeki sonlu tümleyen topolojisinin tüm kompakt altkümelerini bulun.

6. X bir topolojik uzay olsun. Bu uzaya ∞ sembolü ile gösterdiğimiz yeni bir nokta ekleyelim:

$$\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$$

olsun. Bir $U \subset \widehat{X}$ altkümesi şu iki koşuldan birini sağlarsa açık sayılsın:

(i) $\infty \in U$ ve X üzerindeki topolojiye göre $X - U$ kompakttır,

(ii) $\infty \notin U$ ve X üzerindeki topolojiye göre U açıktır.

Bu tanımın gerçekten bir topoloji oluşturduğunu ve bu yeni topolojide $\widehat{X}$ uzayının kompakt olduğunu ispatlayın. Bu yeni topolojide X'in açık olduğunu gösterin. X'in kapanışı nedir?

7. Önceki soruda $X = \mathbb{R}^n$ ise $\widehat{X}$ hangi uzaydır?

8. Önceki sorudan önceki soruda X Hausdorff ise $\widehat{X}$ uzayı da Hausdorff mudur?

9. Şu özellikleri sağlayan bir Y topolojik uzayı bulun:

(i) Y kompakttır.

(ii) Y'nin bir U açık altuzayı $\mathbb{R}$ ile homeomorfiktir ve U'nun kapanışı Y'dir. .

(iii) Önceki sorudan önceki sorudan önceki soruda $X = \mathbb{R}$ alınca $Y = \widehat{X}$ **olmaz**.

10. $X = S^2$, bir küre yüzeyi ve $Y = \mathbb{R}$, reel sayılar kümesi olsun. $f : X \to Y$ sürekli olsun. Bir $y \in Y$ için $X_y \subset X$ kümesi

$$X_y := \{x \in X : f(x) = y\}$$

şeklinde tanımlansın. $X_y \neq \emptyset$ ve X_y sonlu olacak şekilde en fazla iki farklı $y \in Y$ olabileceğini ispatlayın.

11. X ve Y topolojik uzaylar olsun. X'ten Y'ye sürekli fonksiyonların kümesini $C(X, Y)$ ile gösterelim. Bir $K \subset X$ kompakt altkümesi ve bir $U \subset Y$ açık kümesi için

$$S(K, U) := \{f \in C(X, Y) : f(K) \subset U\}$$

şeklinde tanımlansın. Ayrıca

$$\mathcal{S} := \{S(K, U) : K \subset X \text{ kompakt}, U \subset Y \text{açık}\}$$

olsun. $\mathcal{S}$ koleksiyonunun $C(X, Y)$ üzerindeki bir topolojinin alt tabanı olduğunu gösterin. X tek noktadan oluşan bir kümeyse $C(X, Y)$ üzerinde $\mathcal{S}$ koleksiyonunun ürettiği topoloji nedir?

12. Torusa homeomorfik düzgün bir simplekssel kompleks bulun. Bulduğunuz kompleks için Simplekssel Gauss–Bonnet teoremini hesaplayarak ispatlayın.

13. Gauss–Bonnet teoremini kullanarak Platonik cisimlerin 5 tane olduğunu gösterin.