MAT345 (2012-2013 Güz), Alıştırmalar VII

Özer Öztürk

Bu alıştırmaları **14 Aralık Cuma**'ya kadar çözmenizi bekliyorum.

1. X bir topolojik uzay olsun. Aşadaki ifadelerin denk olduklarını gösterin.

(A) X bağlantılıdır.

(B) X kesişmeyen ve boş olmayan iki kapalı kümeye bölünemez.

(C) X'deki kaçık kümeler sadece boş küme ve X'in kendisidir.

(D) X'de sınır kümesi boş olan altkümeler sadece boş küme ve X'in kendisidir.

(E) X'ten $\{0,1\}$ kümesine, $\{0,1\}$ üzerindeki ayrık topolojiye göre sürekli her fonksiyon sabittir.

(F) X ayrık ve boş olmayan iki kümeye bölünemez. (Birbirinin kapanışıyla kesişmeyen iki altkümeye *ayrık* kümeler denir.)

2. Bu alıştırmanın amacı reel sayıların bağlantılı olduğunu göstermek.

(i) Reel sayıların boş olmayan üstten sınırlı bir altkümesinin supremumunun altkümenin kapanışında olduğunu gösterin.

(ii) Reel sayıların bağlantısız olduğunu, yani $R = U \cup V$, $U \neq \emptyset \neq V$, $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U, V açık kümelerinin olduğunu kabul edelim. Bu durumu reel sayıları boyamak olarak düşünelim: U'daki elemanlar Springer sarısına, V'dekiler Birkhäuser yeşiline boyanmış olsun. Bu durumda her reel sayının bir tek rengi vardır: sarı ya da yeşil. En az bir sarı sayı olduğunu gösterin. Bu sayılardan biri a olsun. En az bir yeşil sayı olduğunu gösterin. Bu sayılardan biri b olsun. Niçin $a < b$ kabul edebileceğimizi açıklayın.

(iii) $[a, b]$ kapalı aralığındaki sarı noktaların kümesi A olsun. A kümesindeki her eleman b'den küçüktür. Dolayısıyla A üstten sınırlıdır. O zaman $\alpha = \sup A$ olsun (Burada reel sayıların hangi özelliğini kullanıyoruz?). Bu alıştırmanın (i) kısmını kullanarak $\alpha \in \partial A$ olduğunu gösterin.

(iv) Son olarak α'nın sarı veya yeşil olamayacağını göstererek "Reel sayıların bağlantısız olduğu" kabulünün yanlış olduğunu gösterin.

3. Önceki alıştırmadaki fikir $\mathbb{Q}$ için neden işe yaramaz? $\mathbb{Q}$'nun bağlantılı alt uzayları nelerdir?

4. X bir topolojik uzay olsun. Eğer $x_1, x_2 \in X$ noktalarını içeren bağlantılı bir altuzay varsa x_1 ve x_2 denk olsun. Bunun bir denklik bağıntısı olduğu açıktır. Bu bağlantının denklik sınıflarının kapalı olduğunu gösterin. Açık olmayabileceklerini bir örnekle gösterin.

5. X bir topolojik uzay ve $f : X \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Her $x \in X$ noktasının öyle bir U_x komşuluğu olsun ki her $x_0 \in U_x$ için $f(x) = f(x_0)$ eşitliği sağlansın. Böyle bir f fonksiyonu hakkında ne söyleyebiliriz?

6. $\mathbb{R}^2$'de $x = 1$ ve $x = 2$ doğrularıyla her n tamsayısı için $(1, n)$ noktasını $(2, n)$ noktasına bağlayan doğru parçalarından oluşan "sonsuz merdivenin" bağlantılı olduğunu gösterin.

7. Aşağıdaki yolları çizin.

(a) $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (3t - 1, 3t + 1)$

(b) $g : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (3t - 1, 9t^2 - 6t + 1)$

$I \times I = [0,1] \times [0,1]$ olmak üzere $H : I \times I \to \mathbb{R}^2$,

$$H(s,t) = (1 - s)f(t) + sg(t)$$

olarak tanımlansın. $t = 0, 1/4, 1/3, 1/2$ değerleri için $H(s,t)$ eğrilerini çizin. $s = 0, 1/4, 1/3, 1/2$ ve $s = 1$ değerleri için $H(s,t)$ eğrilerini çizin.

8.

(a) $\chi(S^1) =?$, $\chi(S^2) =?$

(b) $\chi(n\mathbb{T}^2) =?$, $\chi(n\mathbb{P}^2) =?$

(c) Bir futbol topu yaparken kullanılan beşgen ve altıgen sayıları neler olabilir?

(d) Birbirine dokunmayan iki futbol topundan oluşan uzayın Euler karakteristiği nedir?