

Bu alıştırmaları **3 Aralık Pazartesi**'ye kadar çözenizi bekliyorum.

1. İki Hausdorff uzayın çarpımı her zaman Hausdorff olur mu?

2. Alıştırmalar II, 11. soruda tanımlanan topoloji Hausdorff mudur?

3.  $X$  ve  $Y$  topolojik uzaylar,  $Y$  Hausdorff ve  $f : X \rightarrow Y$  sürekli olsun.  $f$  fonksiyonunun  $G_f$  grafiği

$$G_f := \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = y\}$$

şeklinde tanımlansın.  $G_f$  kümesinin  $X \times Y$  uzayında kapalı olduğunu gösterin. Tersi için ne söylersiniz?

4.  $X = \{0, 1\}$  olsun.  $X$  kümesine üzerindeki  $\{\emptyset, \{0\}, X\}$  koleksiyonunun bir topoloji oluşturduğunu gösterin. Üzerindeki bu topolojiyle  $\{0, 1\}$  kümesine Sierpinski uzayı denir.  $X$  kümesi ayrık topolojiyle düşünüldüğünde oluşan uzayın Sierpinski uzayına homeomorfik olmadığını ispatlayın.

5.  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli fonksiyonlar olsun.

(i)  $A = \{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$  kümesinin kapalı olduğunu gösterin.

(ii)  $h(x) = \min(f(x), g(x))$  şeklinde tanımlanan  $h : X \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterin.

6. Homeomorfik olmanın bir denklik bağıntısı olduğunu gösterin.

(i)  $\mathbb{R}$  ve  $(-1, 1)$  aralığının homeomorfik olduğunu gösterin.

(ii)  $(-1, 1)$  ve  $(a, b)$  aralıklarının homeomorfik olduğunu gösterin.

(iii)  $(0, 1)$  ve  $[0, 1]$  aralıkları homeomorfik midir?

7. Reel sayılar sonlu tümleyen topolojisiyle düşünüldüğünde reel sayılardan reel sayılara sürekli fonksiyon örnekleri verin.

8. Homeomorfizm olmayan bir sürekli fonksiyon örneği verin.

9. " $f : Z \rightarrow X \times Y$  süreklidir ancak ve ancak  $\pi_1 \circ f$  ve  $\pi_2 \circ f$  fonksiyonları süreklidir." önermesini ispatlayın.

10. 2 ve 3 elemanlı kümelerde homeomorfik olmayan kaç topoloji vardır. Bu topolojilere birer örnek verin.

11. Birer homeomorfizm bularak

(i) merkezleri  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ , yarıçapları 1 ve 2 birim olan iki çemberin homeomorfik olduğunu gösterin.

(ii) düzlemde bir düzgün çokgenin bir çembere homeomorfik olduğunu gösterin.

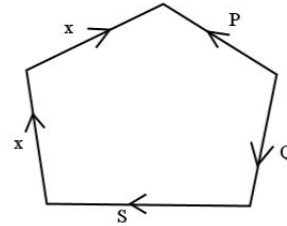
12. Dört tane torusun bağlantılı toplamını veren bir çokgensel yapıştırma ve bu yapıştırma karşılık gelen bir kelime bulun.

13.  $\mathbb{P}^2$  projektif düzlem,  $\mathbb{K}^2$  Klein şişesi ve  $\mathbb{T}^2$  torus olmak üzere

$$\underbrace{\mathbb{P}^2 \# \dots \# \mathbb{P}^2}_{n\text{-tane}} = \begin{cases} \underbrace{\mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2}_{m\text{-tane}} \# \mathbb{P}^2 & n \text{ tek ise,} \\ \underbrace{\mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2}_{m\text{-tane}} \# \mathbb{K}^2 & n \text{ çift ise.} \end{cases}$$

olduğunu gösterin.  $m = ?$

14. Bu alıştırmada  $x$  bir harf,  $P, Q$  ve  $S$  ise birer kelimedir.



$$\begin{aligned} SxxP^{-1}Q &= xxP^{-1}QS \\ &= x_1Px_1QS \\ &= Sx_1Px_1Q \end{aligned}$$

olduğunu gösterin. Buradaki "=" sembollerinin anlamı nedir?