

Bu alıştırmaları **26 Kasım Pazartesi**'ye kadar çözenizi bekliyorum.

1. İç noktalar kümesiyle sınır noktaları kümesinin kesişiminin boş olduğunu ve birleşimlerinin kapanışı verdiğini ispatlayın.

2. “ A kaçıktır ancak ve ancak $\partial A = \emptyset$ ” önermesini ispatlayın.

3. “ U açıktır ancak ve ancak $\partial U = \overline{U} \setminus U$ ” önermesini ispatlayın.

4. Bir X topolojik uzayının kuvvet kümesi $P(X)$ üzerinde şu işlemleri tanımlayalım:

(a) $\bar{*} : P(X) \rightarrow P(X)$ bir A altkümesini \overline{A} kapanışına götürsün.

(b) $*^c : P(X) \rightarrow P(X)$ bir A altkümesini A^c tümleyenine götürsün.

Bu iki işlemi bir A altkümesine istediğimiz sırada ve istediğimiz kadar tekrarlayarak uyguladığımızda en fazla 14 farklı küme elde edebileceğimizi gösterin. Gerçekten 14 farklı küme elde edilebileceğini bir örnekte gösterin.

5. Aşağıdakileri ispatlayın.

(i) Eğer $A \subset B$ ise $\overline{A} \subset \overline{B}$ 'dir.

(ii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(iii) $\bigcup \overline{A_\alpha} \subset \overline{\bigcup A_\alpha}$

Sonuncuya özaltküme olan bir örnek verin.

6. X bir topoloji uzay ve $A \subset X$ olsun. Bir $B \subset X$ kümesi için her $b \in B$ noktasını içeren her açık küme $A - \{b\}$ kümesinden en az bir eleman içersin. Aşağıdakileri doğrulayın ya da çürütün:

(i) $A \neq \emptyset$ olsa bile $B = \emptyset$ olabilir.

(ii) $A \subset B$

(iii) $B \subset A$

(iv) $A = B$ olabilir.

(v) $(B - A) \cup (A - B) = A \cup \partial A$.

(vi) $A \cup B$ birleşiminin her noktası A kümesinin kapanışındadır.

(vii) A kümesinin kapanışındaki her nokta $A \cup B$ birleşimindedir.

(viii) A kümesinin her iç noktası B kümesinin elemanıdır.

7. “Bir X topolojik uzayı Hausdorff'tur ancak ve ancak $\Delta \subset X \times X$ kapalıdır” önermesini ispatlayın.

8. Sonsuz bir küme üzerinde Zariski topolojisi dışında Hausdorff olmayan bir topoloji örneği verin.

9. Hausdorff bir topolojide tek noktadan oluşan kümelerin kapalı olduğunu gösterin. Buradan sonlu kümelerin de kapalı olduğu sonucuna ulaşılır mı?

10. Hausdorff olmayan bir topolojik uzayın bir altkümesindeki altuzay topolojisi Hausdorff olabilir mi?

11. Küre yüzeyini kullanmadan iki tıkkız kapalı yüzeyin bağlantılı toplamı olarak yazılamayan bir tıkkız kapalı yüzeye *asal (tıkkız kapalı) yüzey* diyelim. İki asal yüzeyin bağlantılı toplamı olarak yazılabilen tıkkız kapalı yüzeyler nelerdir? Üç asal yüzeyin bağlantılı toplamı olarak yazılabilen tıkkız kapalı yüzeyler nelerdir?

12. Klein şisesi \mathbb{K}^2 , torus \mathbb{T}^2 ve reel izdüşümsel düzlem \mathbb{P}^2 olmak üzere

(i) $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 = \mathbb{K}^2$ olduğunu gösterin,

(ii) $\mathbb{K}^2 \# \mathbb{K}^2 = ?$

(iii) $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{T}^2 = \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ olduğunu ispatlayın.

13. Aşağıdakileri eşleyin ve isimlerini yazın:

