MAT345 (2012-2013 Güz), Alıştırmalar I

Özer Öztürk

Bu alıştırmaları **12 Ekim Cuma**'ya kadar çözmenizi bekliyorum.

1.Kümeler için *DeMorgan* kurallarını ispatlayın.

2. Bir β bağıntısı simetrik ve geçişken olsun.

(i) Bu durumda β simetrik olduğundan $(a, b) \in \beta$ ise $(b, a) \in \beta$ olur.

(ii) Aynı zamanda β geçişken olduğu için $(a, b) \in \beta$ ve $(b, a) \in \beta$ birlikte $(a, a) \in \beta$ olmasını sağlar.

(iii) Yani, simetrik ve geçişken her bağıntı yansıyandır.

Sorun nerede?

3. Rasyonel katsayılı bir polinomun kökü olan reel sayılara (rasyonel sayılar üzerindeki) cebirsel sayılar denir. Bunların kümesinin sayılabilir olduğunu ispatlayın.

4. *Schroeder–Bernstein* Teoremini ispatlayın.

5. $X = \{a, b\}$ kümesi üzerindeki tüm topolojileri bulun.

6. X bir topolojik uzay ve A onun bir altkümesi olsun. A kümesinin her x elemanı için $x \in U \subset A$ olacak şekilde bir U açık kümesi varsa A kümesinin açık olduğunu ispatlayın.

7. Bir X kümesi üzerinde

$$\tau_\infty = \{U : X - U \quad \text{sonsuz veya boş veya tüm} \quad X\},$$

koleksiyonu bir topoloji oluşturur mu?

8. Bir küme üzerindeki topolojilerin her keyfi kesişimi bir topoloji midir?

9. Açık aralıkların tüm birleşimleriyle boş kümeden oluşan koleksiyonun, $\mathbb{R}$ üzerinde bir topoloji olduğunu gösterin.

10. Bir $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ koleksiyonu, "Her $x \in O$ elemanı icin

$$x \in [a, b) \subset O$$

olacak şekilde bir $[a, b)$ aralığı vardır." özelliğine sahip O kümelerinden oluşsun. $\mathcal{O}$ bir topoloji midir?

11. Bir $p \in [1, \infty) \cup \{\infty\}$ için $d_p : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$d_p(x, y) = \begin{cases} \sqrt[p]{|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p}, & p \neq \infty \quad \text{ise}, \\ \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}, & p = \infty \quad \text{ise} \end{cases}$$

şeklinde ve $r \in (0, \infty)$ için bir "p–top"

$$B^p(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : d_p(x, y) < r\}$$

şeklinde tanımlansın.

(a) $B^1((0, 0), 1)$ kümesini çizin.

(b) $B^2((0, 0), 1)$ kümesini çizin.

(c) $B^\infty((0, 0), 1)$ kümesini çizin.

(d) Bir $p \in [1, \infty) \cup \{\infty\}$ sabitlendiğinde

$$\{B^p(x, r) : x \in \mathbb{R}^2, r \in (0, \infty)\}$$

koleksiyonu taban oluşturur mu?

12. $\mathbb{N}^+$ pozitif doğal sayılar kümesi olmak üzere bir $i \in \mathbb{N}^+$ için

$$U_i = (-1/i, 1/i) \subset \mathbb{R}$$

olsun. Bu kümeleri kullanarak açık kümelerin kesişimlerinin açık olmayabileceğini gösterin.

13. Kapalı kümelerin birleşimlerinin açık olup kapalı olmayabileceğini gösterin.

14. Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ ile gösterilsin.

$$\{U \subset \mathbb{N} : U = \mathbb{N} \quad \text{veya} \quad 7 \notin U\}$$

koleksiyonu, $\mathbb{N}$ üzerinde bir topoloji oluşturur mu?

15. Yine $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olmak üzere

$$\{U \subset \mathbb{N} : \mathbb{N} - U \quad \text{sonlu veya} \quad 7 \notin U\}$$

koleksiyonu, $\mathbb{N}$ üzerinde bir topoloji oluşturur mu?

16. Sonlu bir küme üerindeki bir topolojideki kaçık kümelerin sayısı hakkında ne söylebiliriz?