MSGSÜ – MAT 345
Final – 8 Ocak 2013.

İsim: ____________________
No: ____________________

Sınavda toplam 80 puanlık 5 soru var.

Soru	1	2	3	4	5	Toplam
Puan	11	9	20	20	20	80
Kazanılan						

1. Aşağıdakileri tanımlayın.
   (a) (1 Puan) Bir (X, τ) topolojisi:

   (b) (1 Puan) Bir (X, τ) topolojisinin bir $\mathcal{B}$ tabanı :

   (c) (1 Puan) Bir altküme üzerindeki altuzay topolojisi:

   (d) (1 Puan) $X \times Y$ üzerindeki çarpım topolojisi:

   (e) (1 Puan) İç nokta:

   (f) (1 Puan) Sürekli fonksiyon:

   (g) (1 Puan) Homeomorfizm:

   (h) (1 Puan) Bölüm fonksiyonu:

   (i) (1 Puan) Hausdorff uzay:

   (j) (1 Puan) Bağlantılı uzay:

   (k) (1 Puan) Kompakt uzay:

2. (a) (5 Puan) Aşağıdaki yüzeyleri veren birer çokgen yapıştırması çizin:

   (i) Küre yüzeyi.

   (ii) Torus.

   (iii) Klein şişesi.

   (iv) Möbius şeridi.

   (v) Reel projektif düzlem.

(b) (1 Puan) $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{S}^2$=?

(c) (1 Puan) $\chi(\mathbb{K}^2)$=?

(d) (1 Puan) Torusun rankı kaçtır?

(e) (1 Puan) Simpilekssel Gauss–Bonnet teoremini açıklayın.

3. (a) (10 Puan) $X = \mathbb{R}$ ve $Y = [-1,1] - \{0\} \subset X$ olsun. Altuzay topolojisine göre $[-1,0)$ kümesinin Y-**kaçık** olduğunu gösterin.

(b) (10 Puan) X bağlantılıysa **kaçık** kümelerinin sadece boş küme ve kendisi olduğunu gösterin.

4. (20 Puan) $X = S^2$, bir küre yüzeyi ve $Y = \mathbb{R}$, reel sayılar kümesi olsun. $f : X \to Y$ sürekli olsun. Bir $y \in Y$ için $X_y \subset X$ kümesi

$$X_y := \{x \in X : f(x) = y\}$$

şeklinde tanımlansın. $X_y \neq \emptyset$ ve X_y sonlu olacak şekilde en fazla iki farklı $y \in Y$ olabileceğini ispatlayın.

5. (a) (10 Puan) $X = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ olsun. İki $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in X$ noktası için

$$(y_1, y_2, y_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$$

olacak şekilde bir λ **pozitif** reel sayısı varsa $(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3)$ olsun. Bu açıkça bir denklik bağıntısıdır. $X/\sim$ uzayının küre yüzeyine homeomorfik olduğunu ispatlayın.

(b) (10 Puan) $\mathbb{R}^3$'te xy-düzlemindeki birim çember S^1 olsun. Bu durumda (z, 0 ile 1 arasındaki değerleri alırken) $A := S^1 \times [0,1] \subset \mathbb{R}^3$ bir silindirdir. A üzerinde altuzay topolojisi olmak üzere

$$B = S^1 \times \{0\} \subset X\,,$$
$$C = S^1 \times \{0,1\} \subset X\,,$$
$$D = S^1 \times \{\frac{1}{2}\} \subset X$$

olsun. A/B, A/C, A/D uzayları nelerdir?