MSGSÜ – MAT 116
Sınav I – 26 Mart 2013

İsim: ____________________
No: ____________________

Soru	1	2	3	4	Toplam
Puan	15	15	15	15	60
Kazanılan					

1. (a) (3 Puan) Pascal üçgeninin satırları yukarıdan aşağıya doğru 0'dan başlayarak numaralandırılırsa, 100. satırda soldan 3. sayı kaç olur?

> **Çözüm:** Pascal üçgeninin n. satırında en solda $\binom{n}{0}$, onun yanında $\binom{n}{1}$, sonrasında da $\binom{n}{2}$ yer alır. Dolayısıyla Pascal üçgeninin 100. satırda soldan 3. sayı $\binom{100}{2}$'dir.

(b) (4 Puan) Eğer $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{0, 1\}$ ise

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 4$$

denkleminin kaç farklı çözümü vardır?

> **Çözüm:** $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ kümesinin 4 elemanlı altkümeleriyle denklemin çözümleri 1-1 eşleşir (altkümenin elemanları 1 diğerleri 0 değerini alsın). Yani denklemin $\binom{6}{4}$ tane çözümü vardır.

(c) (4 Puan) $\binom{-\frac{1}{2}}{4} = ?$

> **Çözüm:**
> $$\binom{-\frac{1}{2}}{4} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)(-\frac{1}{2}-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{35}{2^7}$$

(d) (4 Puan) Bir 8-şerit, kare ve dominolarla kaç farklı şekilde döşenebilir?

> **Çözüm:** 1-şerit, tek şekilde: sadece 1 kare kullanılarak döşenebilir: Yani $f_1 = 1$ yazabiliriz. 2-şerit, 2 kare veya 1 domino kullanılarak 2 farklı şekilde döşenebilir: Yani $f_2 = 2$ yazabiliriz. Bir n-şeridin döşemeleri kare ile başlayanlar ve domino ile başlayanlar diye gruplanabileceğinden, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$'dir. Böylece, $f_3 = 2 + 1 = 3$, $f_4 = 3 + 2 = 5$, $f_5 = 5 + 3 = 8$, $f_6 = 8 + 5 = 13$, $f_7 = 13 + 8 = 21$ ve $f_8 = 21 + 13 = 34$ buluruz.

2. (15 Puan) Sonsuz beyaz, sonsuz siyah ve 2 kırmızı top içinden k top kaç farklı şekilde seçilebilir?

Çözüm: Farklı seçimleri oluşturmak için şu çarpıma bakalım:

$$(x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots)(y^0 + y^1 + y^2 + y^3 + \ldots)(z^0 + z^1 + z^2)$$

Burada x beyazı, y siyahı ve z kırmızıyı temsil ediyor. Kuvvetler ise o renkten kaç tane seçtiğimizi gösteriyor. Çarpımın ilk terimlerini yazalım:

$$x^0y^0z^0 + x^1y^0z^0 + x^0y^1z^0 + x^0y^0z^1 + x^2y^0z^0 + \ldots$$

Çarpımın her terimi bir seçimi gösterir. Örneğin, $x^0y^0z^0$ terimi 0 beyaz, 0 siyah, 0 kırmızı seçmek anlamında, $x^2y^0z^0$ ise 2 beyaz, 0 siyah, 0 kırmızı seçmek anlamındadır. Biz bu çarpımda x'in, y'nin ve z'nin kuvvetleri toplamı k olan terimlerin sayısını bulmak istiyoruz.

Bu terimlerin neler olduğunu değil, sadece sayısını bulmak istediğimiz için y ve z yerine de x yazalım:

$$(x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots)(x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots)(x^0 + x^1 + x^2)$$

Ayrıca $x^0 = 1$ yazalım:

$$(1+x^1+x^2+x^3+\ldots)(1+x^1+x^2+x^3+\ldots)(1+x^1+x^2) = (\frac{1}{1-x})(\frac{1}{1-x})(1+x^1+x^2)$$

Artık

$$(\frac{1}{1-x})^2(1 + x^1 + x^2)$$

ifadesine odaklanabiliriz:

$$(\frac{1}{1-x})^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-2}{k}(-x)^k$$

olduğundan burada x^k teriminin katsayısı $\binom{-2}{k}(-1)^k$'dır. Dolayısıyla

$$(\frac{1}{1-x})^2(1 + x^1 + x^2)$$

ifadesinde x^k teriminin katsayısı

$$\binom{-2}{k}(-1)^k + \binom{-2}{k-1}(-1)^{k-1} + \binom{-2}{k-2}(-1)^{k-2}$$

olur.

3. (a) (3 Puan) Eğer $k, n \in \mathbb{N}$ ve $k < n$ ise

$$f(n,k) = \sum_{m=k}^{n} \binom{n}{m}\binom{m}{k}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonun $f(4,2)$ değerini hesaplayın.

Çözüm:

$$f(4,2) = \sum_{m=2}^{4} \binom{4}{m}\binom{m}{2} = \binom{4}{2}\binom{2}{2} + \binom{4}{3}\binom{3}{2} + \binom{4}{4}\binom{4}{2}$$

(b) (12 Puan) Aşağıdaki özdeşliği sayarak ispatlayın:

$$\sum_{m=k}^{n} \binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}2^{n-k}$$

Çözüm: Özdeşliği sayarak ispatlamak istiyoruz: n elemanlı bir kümenin (m'nin alabileceği tüm değeri için) m elemanlı altkümelerinin k elemanlı altkümelerinin sayısına bakalım: Önce m'yi sabitleyelim. Biliyoruz ki n elemanlı bir kümenin m elemanlı altkümelerinin sayısı $\binom{n}{m}$'dir. Seçilen bir m elemanlı altkümenin k elemanlı $\binom{m}{k}$ tane altkümesi vardır. Yani m sabitlenmişken, n elemanlı bir kümenin m elemanlı altkümelerinin k elemanlı altkümelerinin sayısı (çarpım kuralına göre)

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k}$$

olur. Buradan n elemanlı bir kümenin altkümelerinin k elemanlı altkümelerinin sayısının (toplam kuralına göre farkl m'ler için karşılık gelen değerler toplanarak)

$$\sum_{m=k}^{n} \binom{n}{m}\binom{m}{k}$$

olduğu bulunur. Bu ispatlamak istediğimiz özdeşliğin sol tarafına eşittir.

Şimdi n elemanlı bir kümenin altkümelerinin k elemanlı altkümelerinin sayısını farklı bir şekilde hesaplayalım. Önce k tane eleman secelim. Bunu $\binom{n}{k}$ farklı şelikde yapabiliriz. Seçtiğimiz bir k elemanlı altkümeyi içeren altkümelerin sayısı geriye kalan $n-k$ elemanlı kümenin altküme sayısayısına eşittir (niye?). Bunların sayısı 2^{n-k} olduğundan n elemanlı bir kümenin altkümelerinin k elemanlı altkümelerinin sayısı (çarpım kuralına göre)

$$\binom{n}{k}2^{n-k}$$

olarak bulunur. Bu da ispatlamak istediğimiz özdeşliğin sağ tarafına eşittir.

4. (15 Puan) 600'den küçük kaç doğal sayı 2, 3 ve 5 sayılarına bölünmez?

Çözüm: Önce 2, 3 veya 5 sayılarına bölünen 600'den küçük kaç doğal sayı olduğunu bulalım. 600'den küçük doğal sayılardan bir n sayısına bölünenlerin sayısını S_n ile gösterelim: $S_2 = 300$, $S_3 = 200$, $S_5 = 120$, $S_6 = 100$, $S_{10} = 60$, $S_{15} = 40$, $S_{30} = 20$ olduğu için 2, 3 veya 5 sayılarına bölünen 600'den küçük doğal sayıların sayısı

$$S_2 + S_3 + S_5 - S_6 - S_{10} - S_{15} + S_{30} = 300 + 200 + 120 - 100 - 60 - 40 + 20 = 440$$

olur. Geriye 2, 3 ve 5 sayılarına bölünmeyen $600 - 440 = 160$ doğal sayı kalır.