

1. Her  $0 \leq k \leq m \leq n$  doğal sayıları için

$$\binom{n}{m} \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k}$$

eşitliğinin sağlandığını gösterin.

2.

$$1 \binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} + \dots + n \binom{n}{n} = n2^{n-1}$$

3.

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

4. Her  $1 \leq m \leq n$  doğal sayıları için

$$n \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{n}{k}$$

ifadesinin  $m$  sayısına bölündüğünü gösterin.

5. Ařaęıdaki  $n \times n$  matrisin  $k$ . kuvveti nedir?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

6. Aralarında asal  $a$  ve  $b$  pozitif tamsayıları için köşeleri  $(0, 0)$ ,  $(a, 0)$ , ve  $(a, b)$  noktalarında olan üçgenin içinde (kenarlar dahil değil) iki koordinatı da tamsayı olan kaç nokta vardır?

7. Aralarında asal  $a$  ve  $b$  pozitif tamsayıları için

$$\lfloor \frac{b}{a} \rfloor + \lfloor \frac{2b}{a} \rfloor + \dots + \lfloor \frac{(a-1)b}{a} \rfloor = \frac{(a-1)(b-1)}{2}$$

özdeşliğini ispatlayın.

8. Bir dondurmacıdaki dondurma çeşitleri çikolata, vanilyalı, limonlu, çilekli ve sade ise 3 topluk bir külahı kaç farklı şekilde seçebilirsiniz? **Gözlem:** Dondurma alırken topların hangi sırada koyulacağını önemsemeyiz.

9. Üç arkadaş metroya bindiniz ve metro hareket etti. Metrodan üçünüzünde inmesi için önünüzde beş istasyon var. Bunu kaç farklı şekilde yapabilirsiniz?

10. Daha büyük bir dondurmacıda altı çeşit dondurma olsun. Bir top dondurma bir lira olsun. Boş külah bedava olsun (Yani, dondurmacı isteyene sadece bir tane boş külahı bedava versin). Eęer 15 liranız varsa kaç farklı şekilde dondurma alabilirsiniz? **Not:** Paranızın hepsini harcamak zorunda değilsiniz!

11. Birden büyük bir  $n$  doğal sayısı için  $n!$  ve  $n^n$  sayılarından hangisi daha büyüktür? Sonlu bir kümeden kendisine kaç tane fonksiyon vardır? Bunlardan kaç tanesi 1-1 ve dolayısıyla örtendir (permütasyondur)?

12. Eęer  $n > m$  ise  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  kümesinden  $\{1, 2, 3, \dots, m\}$  kümesine örten olmayan kaç fonksiyon vardır?

13. Köşeleri  $(0, 0)$ ,  $(8, 0)$ ,  $(8, 10)$  ve  $(0, 10)$  noktalarında olan dikdörtgeni düşünelim. Bu dikdörtgeninin  $(0, 0)$  noktasından her adımda ya bir adım yukarı ya da bir adım sağ tarafa ilerleyerek  $(8, 10)$  köşesine giden yollardan kaç tanesi  $(2, 3)$  ve  $(5, 6)$  noktalarının ikisinden de geçmez?

14. Pozitif  $x_1, x_2, \dots, x_n$  tamsayılarının en küçük ortak katı  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , en büyük ortak böleni  $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ile gösterilsin. Pozitif  $a, b, c$  tamsayıları için

$$\frac{f(a, b, c)^2}{f(a, b)f(a, c)f(b, c)} = \frac{g(a, b, c)^2}{g(a, b)g(a, c)g(b, c)}$$

olduğunu gösterin.

15. Birbirinden farklı ve 100'den küçük 51 pozitif tamsayının en az iki tanesinin toplamının 99 olacağını ispatlayın.

16. Yarıçapı 4 olan bir daire içinde seçilen 61 noktanın en az iki tanesinin arasındaki uzaklığın en fazla  $\sqrt{2}$  olacağını gösterin.

17. Siz bu alıştırmaları çözünceye kadar dondurmacıda sadece 2 top çikolata, 3 top vanilyalı, 1 top limonlu, 5 top çilekli ve 5 top sade dondurma kalmış. Bu defa çok paranız var. Kaç farklı şekilde dondurma alabilirsiniz? Bir top bir lira, boş külah yine bedava!