

Quiz II

$$(1) \quad \gamma(t) = \left(\frac{\cos t + t}{2}, \frac{\cos t - t}{2}, \frac{\sin t}{\sqrt{2}} \right) \quad t \in \mathbb{R}$$

Bu eğri için

a) K (Eğrilik)

b) τ (Torsion)

c) t (Birim Teğet vektörü)

d) n (Birim normal vektörü)

e) b (Birim binormal vektörü)

hesaplayınız.

b) τ (Torsion)
c) t (Birim Teget)
vektörü

hesaplayınız.

② γ birim hız regular
eğri olsun. Eğer
 $\kappa \equiv 0$ ise, γ' 'nin
bir doğru parçası olduğunu
kanıtlayınız.

$$\dot{b} = -v n$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\cos t}{2}, \frac{\cos t}{2}, \frac{\sin t}{\sqrt{2}} \right) = (-v) n \Rightarrow \boxed{v = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \left(\frac{1+\sin t}{2}, \frac{-1+\sin t}{2}, \frac{-\cos t}{\sqrt{2}} \right)$$

① Cevap

$$\dot{\gamma}(t) = \left(\frac{1-\sin t}{2}, \frac{-1-\sin t}{2}, \frac{\cos t}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\text{Hız} \quad \|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{\frac{1}{4}(1-\sin t)^2 + \frac{1}{4}(-1-\sin t)^2 + \frac{1}{2}\cos^2 t}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}(2+\sin^2 t) + \frac{1}{2}\cos^2 t}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$$

Demek ki: γ Birim Hızdır.

$$\ddot{\gamma}(t) = \left(-\frac{\cos t}{2}, -\frac{\cos t}{2}, \frac{-\sin t}{\sqrt{2}} \right)$$

$$k := \|\ddot{\gamma}\| = \sqrt{\left(\frac{-\cos t}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\cos t}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sin t}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

(Birim Hız olduğu için)

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{k = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\ddot{\gamma}(t) = \left(-\frac{\cos t}{2}, -\frac{\cos t}{2}, -\frac{\sin t}{\sqrt{2}} \right)$$

$$k := \|\ddot{\gamma}\| = \sqrt{\left(-\frac{\cos t}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\cos t}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sin t}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

(Birim Hız olduğu için)

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \boxed{k = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$t := \dot{\gamma} = \left(\frac{1 - \sin t}{2}, -\frac{1 - \sin t}{2}, \frac{\cos t}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\eta := \frac{\ddot{\gamma}}{k} = \left(-\frac{\cos t}{\sqrt{2}}, -\frac{\cos t}{\sqrt{2}}, -\sin t \right)$$

$$b := t \times \eta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{1 - \sin t}{2} & -\frac{1 - \sin t}{2} & \frac{\cos t}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\cos t}{\sqrt{2}} & -\frac{\cos t}{\sqrt{2}} & -\sin t \end{vmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sin t + \sin^2 t}{2} + \frac{\cos^2 t}{2}, -\frac{\cos^2 t}{2} + \frac{\sin t}{2} - \frac{\sin^2 t}{2}, \\ -\frac{\cos t}{2\sqrt{2}} + \frac{\sin t \cos t}{2\sqrt{2}}, -\frac{\cos t}{2\sqrt{2}} - \frac{\sin t \cos t}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1 + \sin t}{2}, -\frac{1 + \sin t}{2}, -\frac{\cos t}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot b$$

$$b = -\tau \eta$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\cos t}{2}, \frac{\cos t}{2}, \frac{\sin t}{\sqrt{2}} \right) = (-\tau) \eta \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Not

$$\boxed{k = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(2)

(2) Cevap

Eğer bir eğri regular ise
ona birim hız parametrizasyon
vermek mümkün.

$\gamma(s)$ Birim Hız olsun.

$$\kappa := \|\ddot{\gamma}\| \quad \text{Ama } \kappa \equiv 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\gamma} \equiv 0$$

$$\Rightarrow \dot{\gamma} = v \quad (\text{sabit})$$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma = w + tv}$$

DOĞRU PARÇASI!

$$\left(\gamma(t) = \int_0^t \dot{\gamma}(u) du = \overset{\vec{w}}{\gamma(0)} + tv \right)$$

Bu da bir izometri ve $\tilde{T}(0)=0$.

İddia: $\tilde{T}$ bir lineer dönüşüdür.

Ayrıca, $\tilde{T}(v) = Sv$ sağlayan

bir ortogonal matris var.

$$\| \tilde{T}v_1 \| = \| \tilde{T}v_2 \| = 1 \Rightarrow \langle \tilde{T}v_1, \tilde{T}v_2 \rangle = 0 \Rightarrow v_1 \perp v_2$$

Theorem 34

γ_1, γ_2 iki birim

hiz eğri olsun.

$$\gamma_1: (t, p) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\gamma_2: (t, p) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

γ_1, γ_2 için

birim

hiz parametrisasyon

$$\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$$

Varsayalım: $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$

0 zaman $T\gamma_1 = \gamma_2$ sağlayan

bir sabit izometri T var.

Tartışma 35

$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir
izometri olsun.
0 zaman

$$Tv = Sv + w \quad \forall v$$

Sağlayan bir ortogonal
matris S ve sabit
bir vektör w var.

Hatırlatma

$S \in M_3(\mathbb{R})$ ortogonal

$$\text{demek } SS^T = I$$

$S \in M_n(\mathbb{R})$ Orthogonal
demek $SS^T = I$

İspat (İzometri Thm.)

$$T: \text{İzometri} \left(\|Tv_1 - Tv_2\| = \|v_1 - v_2\| \right) \\ \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$$

$$T(0) = w \text{ olsun.}$$

$\tilde{T}$: Boyle Tanımlayalım

$$\tilde{T}(v) := T(v) - w$$

Bu da bir izometri ve $\tilde{T}(0) = 0$.

İddia: $\tilde{T}$ bir lineer dönüşümdür.

Ayrıca, $\tilde{T}(v) = Sv$ sağlayan

bir Orthogonal Matris var.

$v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ dik olsun ve $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$ (5)

i.e. $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ olsun

$$\|\tilde{T}v_1 - \tilde{T}v_2\|^2 = \|v_1 - v_2\|^2$$

$$\Rightarrow \langle \tilde{T}v_1, \tilde{T}v_1 \rangle + \langle \tilde{T}v_2, \tilde{T}v_2 \rangle - 2\langle \tilde{T}v_1, \tilde{T}v_2 \rangle$$

$$= \langle v_1, v_1 \rangle + \langle v_2, v_2 \rangle - 2\langle v_1, v_2 \rangle$$

$$\Rightarrow \|\tilde{T}v_1\|^2 + \|\tilde{T}v_2\|^2 - 2\langle \tilde{T}v_1, \tilde{T}v_2 \rangle = 2$$

$$\text{Ama, } \|\tilde{T}v_i\| = \|\tilde{T}v_i - 0\| = \|\tilde{T}v_i - \tilde{T}0\| = \|v_i\| = 1$$

$$\Rightarrow \langle \tilde{T}v_1, \tilde{T}v_2 \rangle = 0 \Rightarrow \tilde{T}v_1 \perp \tilde{T}v_2$$

Ayrıca,

$$\|R(v)\|^2 = \|v\|^2 \Rightarrow$$

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$$

$$T(v) = S(v) + w + v$$

$\mathbb{R}^3$ üzerinde izometri

Bir döndürme ve bir
itme ile yazılabilir.

e_1, e_2, e_3 : orthonormal baz
olsun.

$$v_i := \tilde{T}(e_i) \quad i \in [3]$$

$$[3] = \{1, 2, 3\}$$

$$S := [v_1 | v_2 | v_3]$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{T}(e_i) = S(e_i)$$

$$S^T S = \begin{bmatrix} \frac{v_1^T}{v_1^T} \\ \frac{v_2^T}{v_2^T} \\ \frac{v_3^T}{v_3^T} \end{bmatrix} [v_1 | v_2 | v_3]$$

$$= \begin{bmatrix} \langle v_i, v_j \rangle \end{bmatrix}$$

$$\text{Not: } v_i \perp v_j \quad i \neq j \quad \text{ve } \langle v_i, v_i \rangle = 1$$

$$\text{Demek, } S^T S = I_3 \Leftrightarrow S^T = S^{-1} \quad (6)$$

$S^T \tilde{T}$ 'yı bakalım.

$$\text{Not } S^T(v_i) = S^T(v_i) = e_i$$

$$\Rightarrow S^T \tilde{T}(e_i) = e_i \quad i \in [3]$$

Ayrıca $S^T \tilde{T}$ bir izometridir!

$$R := S^T \tilde{T}$$

$$0 \text{ Zaman a) } R(e_i) = e_i$$

$$\text{b) } R \text{ bir izometridir.}$$

$$v \in \mathbb{R}^3 \text{ olsun, } v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$