

$$(*) \rightarrow \tau = \frac{(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \cdot \ddot{\gamma}}{\|\ddot{\gamma}\|^2}$$

① Eğriler : Eğrilik ve Torsion

$\gamma \subset \mathbb{R}^3$ Eğri
Birim hız

a) $\kappa = \|\ddot{\gamma}\|$

Eğrilik

Eğer γ birim hız değilse,

$$\kappa = \frac{\|\ddot{\gamma} \times \dot{\gamma}\|}{\|\dot{\gamma}\|^3}$$

b) Torsion : τ γ Birim hız

$$t = \dot{\gamma} \quad \{t, n, b\}$$

$$n = \frac{\ddot{\gamma}}{\kappa} \quad \text{Ortonormal baz}$$

Binormal Vektör $b := t \times n$

Genel Tekrar

$$\dot{b} = \frac{\dot{t} \times n}{0} + t \times \dot{n}$$

$$= t \times \dot{n}$$

$$\dot{b} \perp b \quad \vee \quad \dot{b} \perp t$$

Demek

$$\dot{b} = -\tau n \quad \text{şeklinde yazabiliriz.}$$

τ : Torsion (Bünelme)

c)

$$\begin{pmatrix} \dot{t} \\ \dot{n} \\ \dot{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix}$$

$$\dot{t} = \kappa n$$

$$\dot{b} = -\tau n$$

$$\dot{n} = -\kappa t + \tau b$$

Eğer γ birim hız değilse,

$$\tau = \frac{(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \cdot \ddot{\gamma}}{\|\ddot{\gamma}\|^2} \quad (*)$$

Eğer γ birim hız olacağı,

$$\|\dot{\gamma}\| = 1 \quad \dot{\gamma} \perp \ddot{\gamma}$$

$$\Rightarrow \|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\| = \|\ddot{\gamma}\|$$

$$n = \frac{\ddot{\gamma}}{\kappa}$$

$$\tau = -\dot{b} \cdot n$$

$$(*) \rightarrow \tau = \frac{(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \cdot \ddot{\gamma}}{\|\ddot{\gamma}\|^2}$$

① Eğriler : Eğrilik ve Torsion

$\gamma \subset \mathbb{R}^3$ Eğri
Birim hız

a) $\kappa = \|\ddot{\gamma}\|$

Eğrilik

Eğer γ birim hız değilse,

$$\kappa = \frac{\|\ddot{\gamma} \times \dot{\gamma}\|}{\|\dot{\gamma}\|^3}$$

b) Torsion : τ γ Birim hız

$$t = \dot{\gamma} \quad \{t, n, b\}$$

$$n = \frac{\ddot{\gamma}}{\kappa}$$

Binormal Vektör $b := t \times n$

Genel Tekrar

$$\dot{b} = \frac{\dot{t} \times n + t \times \dot{n}}{0}$$

$$= t \times n$$

$$\dot{b} \perp b \quad \vee \quad \dot{b} \perp t$$

Demek

$$\dot{b} = -\tau n \text{ şeklinde yazabiliriz.}$$

τ : Torsion (Bürülme)

c)

$$\begin{pmatrix} \dot{t} \\ \dot{n} \\ \dot{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix}$$

$$\dot{t} = \kappa n$$

$$\dot{b} = -\tau n$$

$$\dot{n} = -\kappa t + \tau b$$

Eğer γ birim hız değilse,

$$\tau = \frac{(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \cdot \ddot{\gamma}}{\|\ddot{\gamma}\|^2} \quad (*)$$

Eğer γ birim hız olacağı,

$$\|\dot{\gamma}\| = 1 \quad \dot{\gamma} \perp \ddot{\gamma}$$

$$\Rightarrow \|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\| = \|\ddot{\gamma}\|$$

$$n = \frac{\ddot{\gamma}}{\kappa}$$

$$\tau = -\dot{b} \cdot n$$

$$(*) \rightarrow \tau = \frac{(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \cdot \ddot{\gamma}}{\|\ddot{\gamma}\|^2}$$

① Eğriler : Eğrilik ve Torsion

$\gamma \in \mathbb{R}^3$ Eğri
Birim hız

a) $\kappa = \|\ddot{\gamma}\|$

Eğrilik

Eğer γ birim hız değilse,

$$\kappa = \frac{\|\ddot{\gamma} \times \dot{\gamma}\|}{\|\dot{\gamma}\|^3}$$

b) Torsion : τ Birim hız

$$t = \dot{\gamma}$$

$$n = \frac{\ddot{\gamma}}{\kappa}$$

$\{t, n, b\}$

Ortogonal
baz

Binormal
vektör $b := t \times n$

Genel Tekrar

$$\dot{b} = \frac{\dot{t} \times n}{0} + t \times \dot{n}$$

$$= t \times \dot{n}$$

$$\dot{b} \perp b \quad \vee \quad \dot{b} \perp t$$

Demek

$$\dot{b} = -\tau n \text{ şeklinde}$$

yazabiliriz.

τ : Torsion (Burulma)

c)

$$\begin{pmatrix} \dot{t} \\ \dot{n} \\ \dot{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix}$$

$$\dot{t} = \kappa n$$

$$\dot{n} = -\tau b$$

$$\dot{b} = -\kappa t + \tau b$$

Eğer γ birim hız
değilse,

$$\tau = \frac{(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \cdot \ddot{\gamma}}{\|\ddot{\gamma} \times \dot{\gamma}\|^2} \quad (*)$$

Eğer γ birim hız olarsa,

$$\|\dot{\gamma}\| = 1 \quad \dot{\gamma} \perp \ddot{\gamma}$$

$$\Rightarrow \|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\| = \|\ddot{\gamma}\|$$

$$n = \frac{\ddot{\gamma}}{\kappa}$$

$$\tau = -\dot{b} \cdot n$$

sağlayan c, d bulabiliriz.
 Şimdi Teorem 2 $\Rightarrow \gamma$ bir Heliks'in
 bir izometrik
 görüntüsü olacak,

örnek 1 $\kappa \equiv 0 \Leftrightarrow \gamma$ bir düzlem
 içinde olacak.

Bunu göstermek lazım

Oyle bir vektör V var ki
 $\gamma \cdot V = \text{sabit}$.

$\Leftrightarrow$ Oyle bir vektör v var ki
 $\dot{\gamma} \cdot v \equiv 0$

Şimdi, $\kappa \equiv 0$

$$\Rightarrow \dot{b} \equiv 0$$

$$\Rightarrow b \equiv \text{sabit}$$

Ama, $\{t, \eta, b\}$ bir orthonormal
 bazdır.

$$\Rightarrow t \cdot b \equiv 0$$

$$\Rightarrow \dot{\gamma} \cdot b \equiv 0$$

Bizim istediğimiz vektör b dir.

ya da

$$\text{Adım 1 : } b \equiv \text{sabit}$$

$$\text{Adım 2 : } t \cdot b \equiv 0$$

$$\Rightarrow \dot{\gamma} \cdot b \equiv 0$$

$$\Rightarrow \gamma \cdot b \equiv \text{sabit}$$

Düzlemin
 denklem.

$$\Rightarrow b \equiv 0$$

$$\Rightarrow b \equiv \text{sabit}$$

Ama, f, η, b bir orthogormal bazdır.

Teorem 2 $\gamma(s)$ ve $\gamma'(s)$ iki eğri olsun. Eğer

$$K = \tilde{K}$$

$$\tau = \tilde{\tau}, \quad 0 \text{ zaman}$$

$$\tilde{\gamma}' = M \gamma' \quad \text{sayılayan}$$

bir izometri $M: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ var.

Kot $\mathbb{R}^3$ içinde her izometri affine dir.

$$\text{demek: } M(\alpha x + (1-\alpha)y) = \alpha M(x) + (1-\alpha)M(y) \\ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Örnek 1

$K \equiv a$ ve $\tau \equiv b$ (4)
sayılayan eğriler nedir?
 $a > 0, b > 0$.

Cevap

$$\gamma = (c \cos \theta, c \sin \theta, d) \quad \text{olsun}$$

$$K \equiv \frac{c}{c^2 + d^2}$$

$$\tau \equiv \frac{d}{c^2 + d^2}$$

Her $a, b > 0$ için

$$a = \frac{c}{c^2 + d^2} \quad b = \frac{d}{c^2 + d^2}$$

sayılayan c, d bulabiliriz.

Şimdi Teorem 2 $\Rightarrow \gamma$ bir Heliks'in bir izometrik görüntüsü olacaktır.

anım Eger $\frac{dk_s(t)}{dt} = 0$ ise,
0 zaman $\gamma(t)$ bir köse denir.

$$\gamma = (-\sin \varphi(t), \cos \varphi(t))$$

$$\Rightarrow \|\ddot{\gamma}\| = |\ddot{\varphi}|$$

$$\Rightarrow k = |k_s|$$

$$k = \frac{\|\ddot{\gamma} \times \dot{\gamma}\|}{\|\dot{\gamma}\|^3}$$

parametrizasyon
değil.

$$k \text{ öse} \Rightarrow \frac{dk}{ds}$$

$$\dot{\gamma} = (-p \sin s, q \cos s, 0)$$

$$\ddot{\gamma} = (-p \cos s, -q \sin s, 0)$$

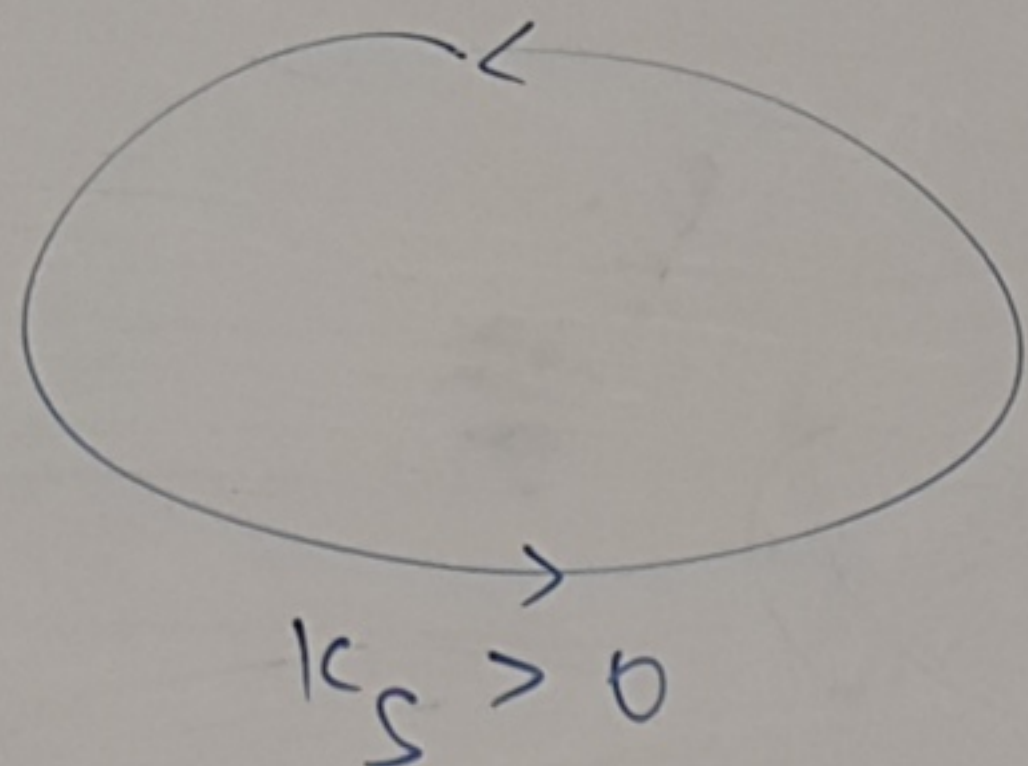
$$\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} = (0, 0, pq(\sin^2 s + \cos^2 s))$$

$$= (0, 0, pq)$$

$$k = \frac{pq}{(p^2 \sin^2 s + q^2 \cos^2 s)^{3/2}}$$

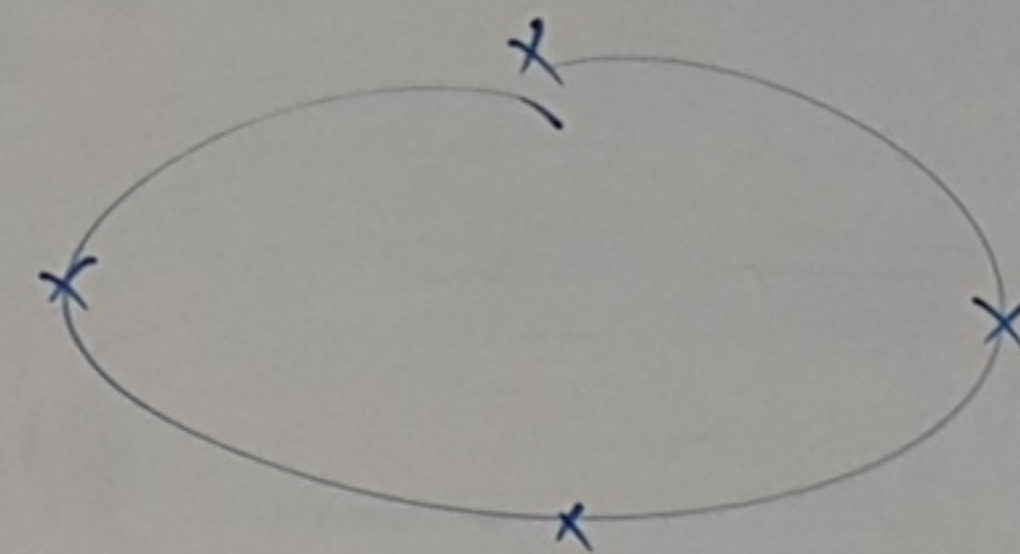
$$k \text{ öse} \Leftrightarrow \frac{dk}{ds} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-\frac{3}{2} (2p^2 \sin s \cos s - 2q^2 \sin s \cos s)}{(p^2 \sin^2 s + q^2 \cos^2 s)^{5/2}} \Rightarrow k_s = k$$



$$\frac{dk}{ds} = 0 \Leftrightarrow \sin s \cos s = 0.$$

$$\Rightarrow s \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$$



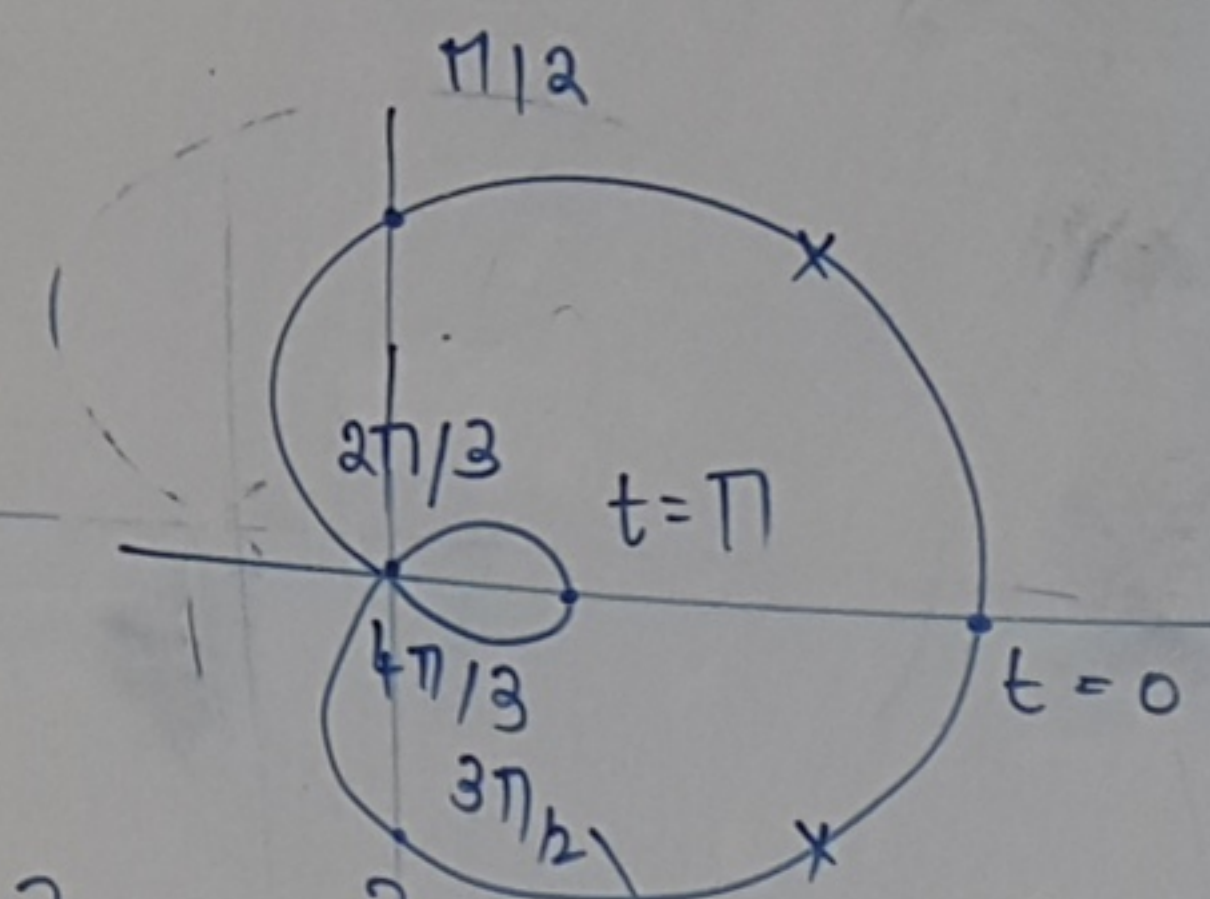
Örnek 5 (Limaçon)

$$\gamma(t) = [(1+2\cos t) \cos t, (1+2\cos t) \sin t]$$

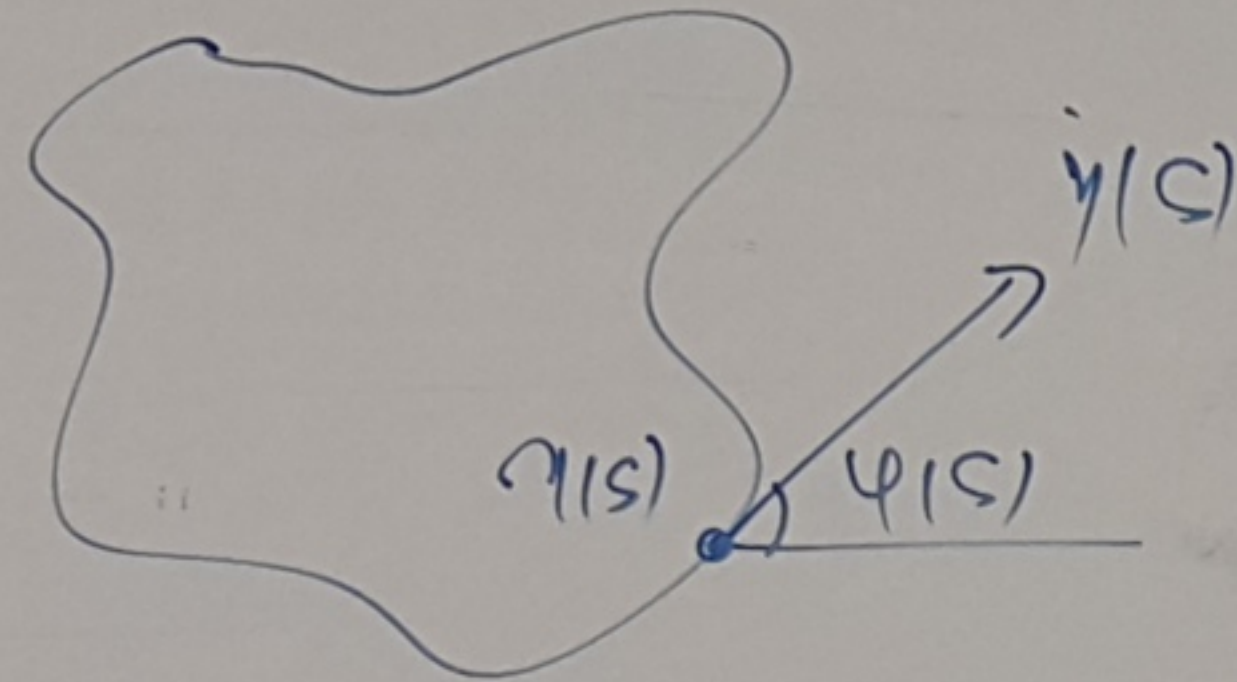
$$k = 2$$

$$\dot{\gamma}(t) = [-\sin t - 4 \cos t \sin t, \cos t + 2(1 - \sin^2 t)]$$

$$\ddot{\gamma}(t) = [-\cos t - 4 \cos^2 t + 4 \sin^2 t, -\sin t - 8 \sin t \cos t]$$



Thm 4 Dört köşe Teoremi.

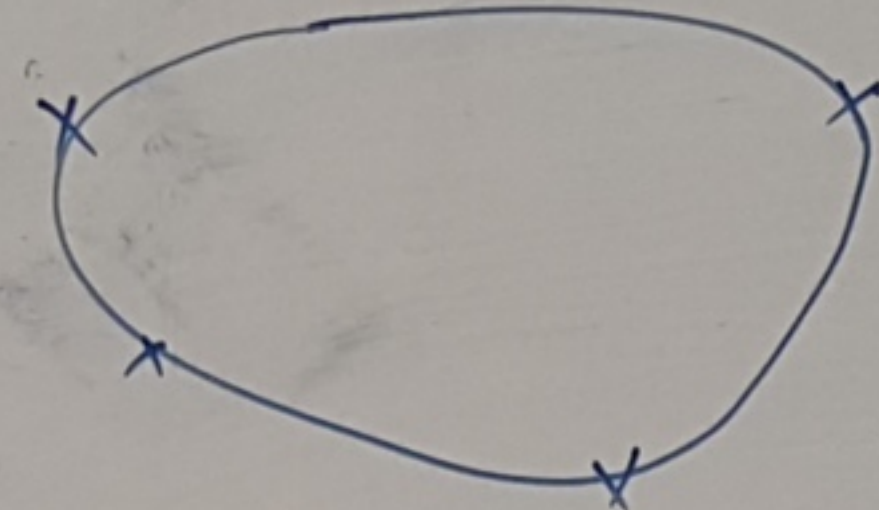
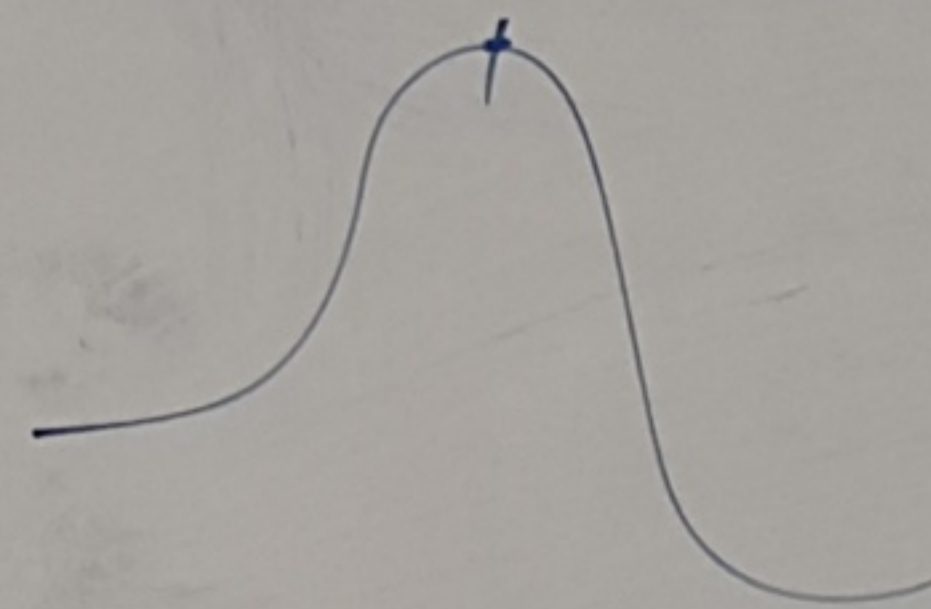


Not γ : Birim hız olsun $\subset \mathbb{R}^2$
 $\dot{\gamma}(t) = (\cos \varphi(t), \sin \varphi(t))$

Şeklinde yazabiliriz

$$k_s(t) := \frac{d\varphi(t)}{dt} \quad (\text{Signed eğrilik})$$

Tanım Eğer $\frac{dk_s(t)}{dt} = 0$ ise,
 0 zaman $\gamma(t)$ bir köşe denir.



Örnek 5

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma} &= (-\sin \varphi(t), \cos \varphi(t)) \\ \Rightarrow \|\ddot{\gamma}\| &= |\dot{\varphi}| \\ \Rightarrow k &= |k_s| \end{aligned}$$

Dört köşe teoremi

$n \subset \mathbb{R}^2$ Düzgün regular, kapalı ve
 0 zaman γ' 'nin kendini
 kesişmeyen.
 en azından dört köşe var.

örnek 5 Ellipse $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1$

Bunun kaç köşe var.

$$\gamma(s) = (p \cos s, q \sin s)$$

$$k = \frac{\|\ddot{\gamma} \times \dot{\gamma}\|}{\|\dot{\gamma}\|^3}$$

Birim hız
 parametrisasyon
 değil.

$$\text{köşe} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = 0 \quad \text{i.e.} \quad 6 \sin t (5 + 4 \cos t)^{3/2} = (9 + 6 \cos t) \cdot \frac{3}{2} \cdot (5 + 4 \cos t)^{1/2}$$

$$\Leftrightarrow 6 \sin t (5 + 4 \cos t) = \frac{3}{2} (9 + 6 \cos t)$$

$$f(t) = \frac{27}{2} + 9 \cos t - 30 \sin t - 24 \sin t \cos t$$

$\sin \cdot 1 < 0$
 $\cos \cdot 1 < 0$

$$\frac{\frac{27}{2} + 9 \cos t}{30 + 24 \cos t} = \sin t$$

$$x = \cos t$$

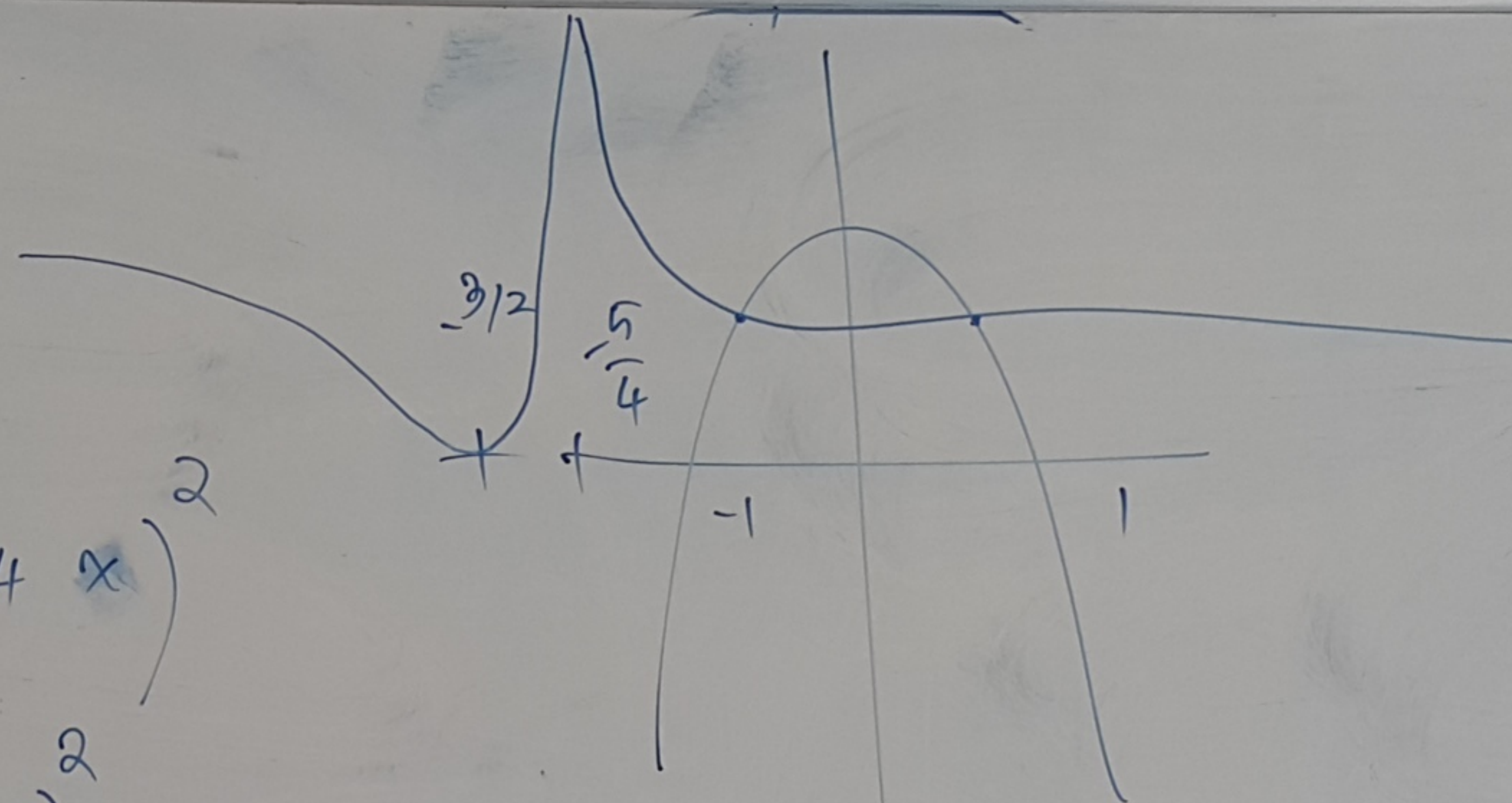
$$\left(\frac{27}{2} + 9x \right)^2 = (1 - x^2) (30 + 24x)^2$$

$$\hookrightarrow (3 + 2x)^2 = \frac{16}{9} (1 - x^2) (5 + 4x)^2$$

$$\Rightarrow \frac{16}{9} (1 - x^2) = \left(\frac{3 + 2x}{5 + 4x} \right)^2$$

2 Reel kök, 2 karmaşık kök

Limaçon $\rightarrow$ Sadece iki köşe var!



1830's 8
Sturm's Theorem

Bir polinomun
Reel köklerin
saymak için
bir yöntem

$$\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin^2 t + 12 \sin^2 t \cos t + 32 \sin^2 t \cos^2 t \\ + \cos^2 t + 6 \cos t (\cos^2 t - \sin^2 t) + 8 (\cos^2 t - \sin^2 t)^2 \end{pmatrix}$$

$$= (0, 0, 9 + 6 \cos t)$$

$$\begin{matrix} 6 \sin^2 t \cos t \\ + 6 \cos t \cos^2 t \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 16 \sin^2 t \cos^2 t \\ 8 \cos^4 t \\ 8 \sin^4 t \end{matrix}$$

$$k = \frac{9 + 6 \cos t}{\|\dot{\gamma}\|^3}$$

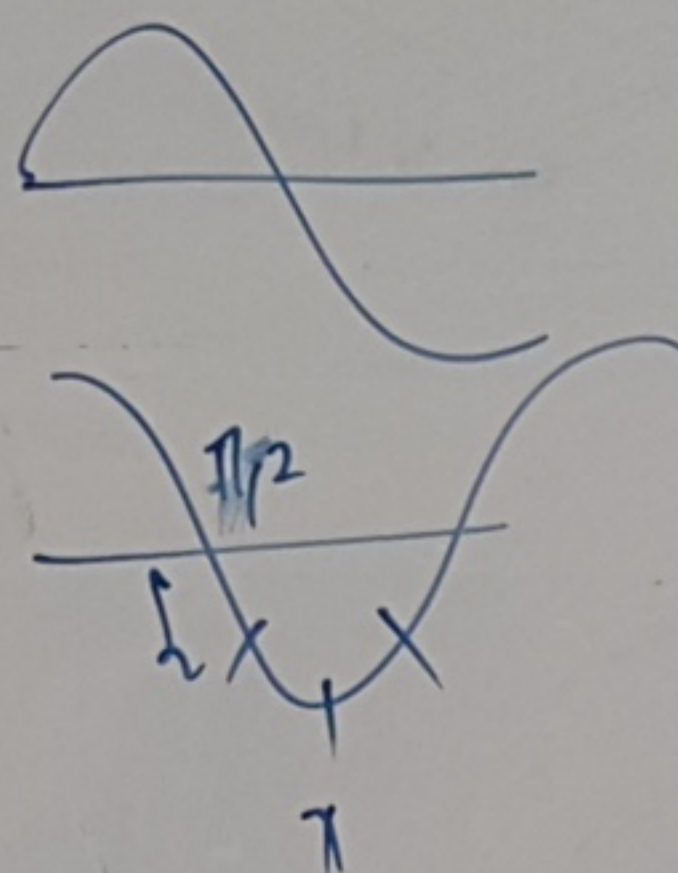
$$\|\dot{\gamma}\|^2 = 5 + 4 \cos t$$

$$k = \frac{9 + 6 \cos t}{(5 + 4 \cos t)^{3/2}}$$

$$\text{köşe} \Rightarrow \frac{dk}{dt} = 0$$

$$6 \sin t (5 + 4 \cos t)^{3/2} = (9 + 6 \cos t) \cdot \frac{3}{2} \cdot (5 + 4 \cos t)^{1/2}$$

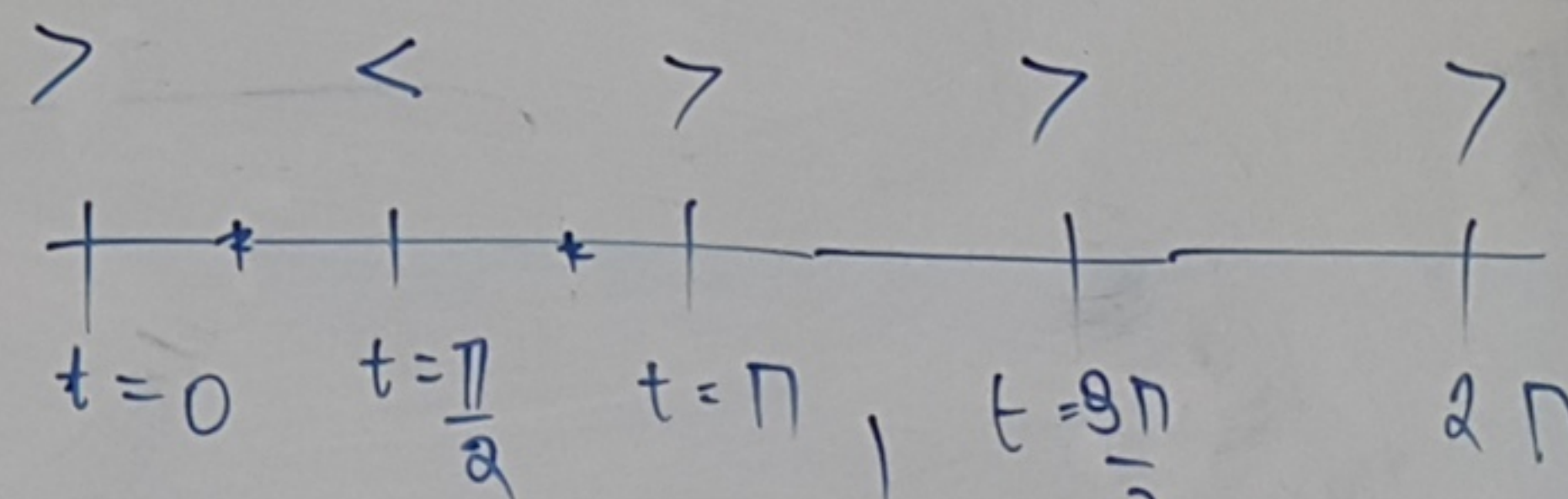
$$\Leftrightarrow 6 \sin t (5 + 4 \cos t) = \frac{3}{2} (9 + 6 \cos t)$$



$$\frac{27}{2} + 9 \cos t = 30 \sin t$$

$$+ 24 \sin t \cos t$$

1. Adım : Sadere 2
çözüm var



$$f(t) = \frac{27}{2} + 9 \cos t - 30 \sin t - 24 \sin t \cos t$$

$\sin \cdot 1 < 0$
 $\cos \cdot 1 < 0$

$\phi = (1, 0, 0)$
 $q = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$

$$= \int_0^t \sqrt{\dot{u}^2 + \dot{v}^2 \cos^2 \theta} dt$$

Mesafe $\geq \int_0^t u dt$

$= u(t) - u(0)$

$= \alpha$

Ama ekvator üzerinde gitsaydık,
mesafe $= \alpha$.

$\Rightarrow$ $p - q$ arasındaki mesafesi,

$$d_S(p, q) = \arccos(p \cdot q)$$

$\gamma(1) = \sigma(\alpha, 0)$

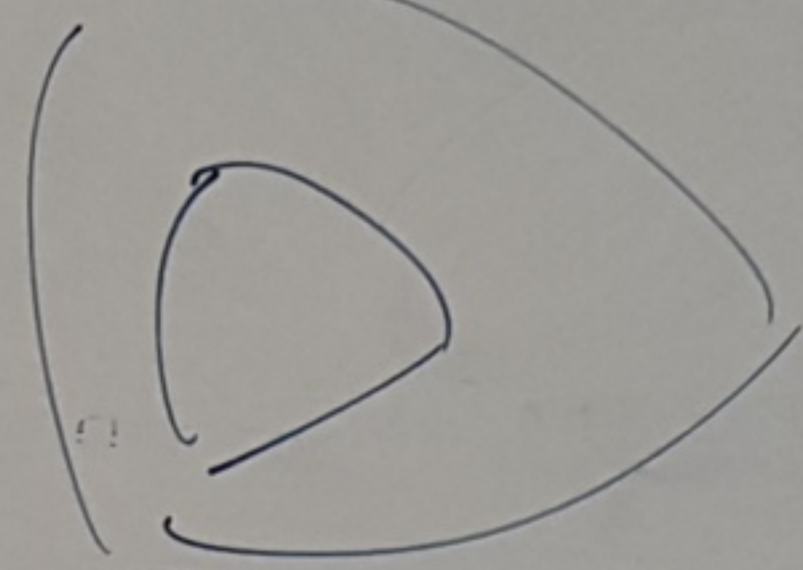
$\gamma(0) = \sigma(0, 0)$

⑧ Küresel geometri

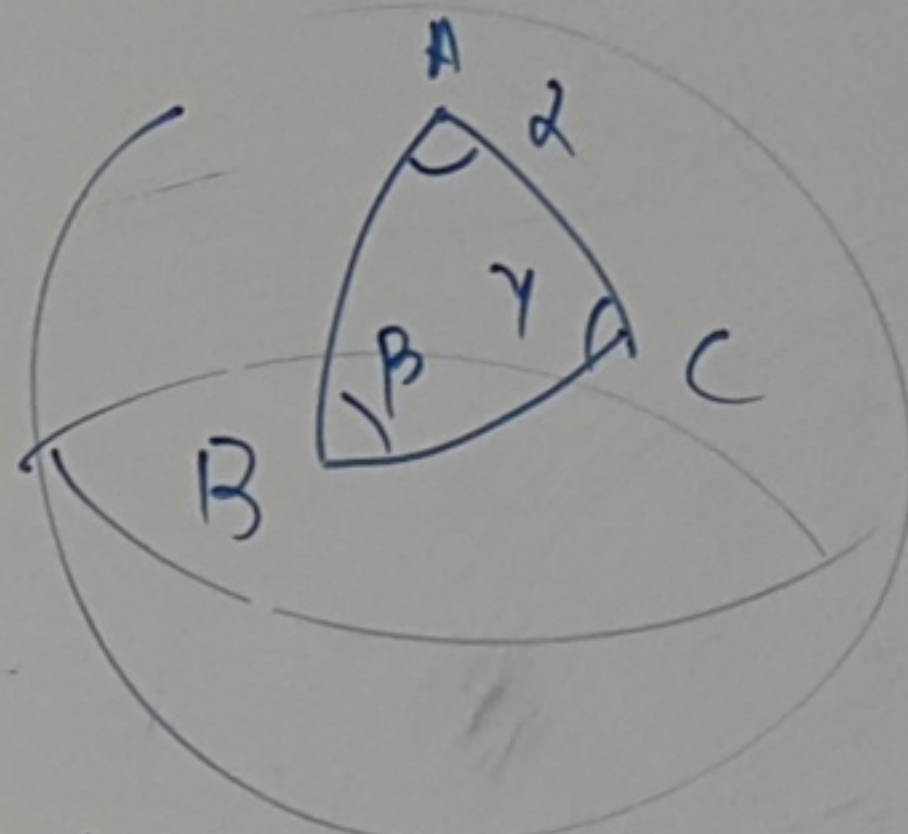
⑩

Doğru parçaları: Büyük Çember parçaları

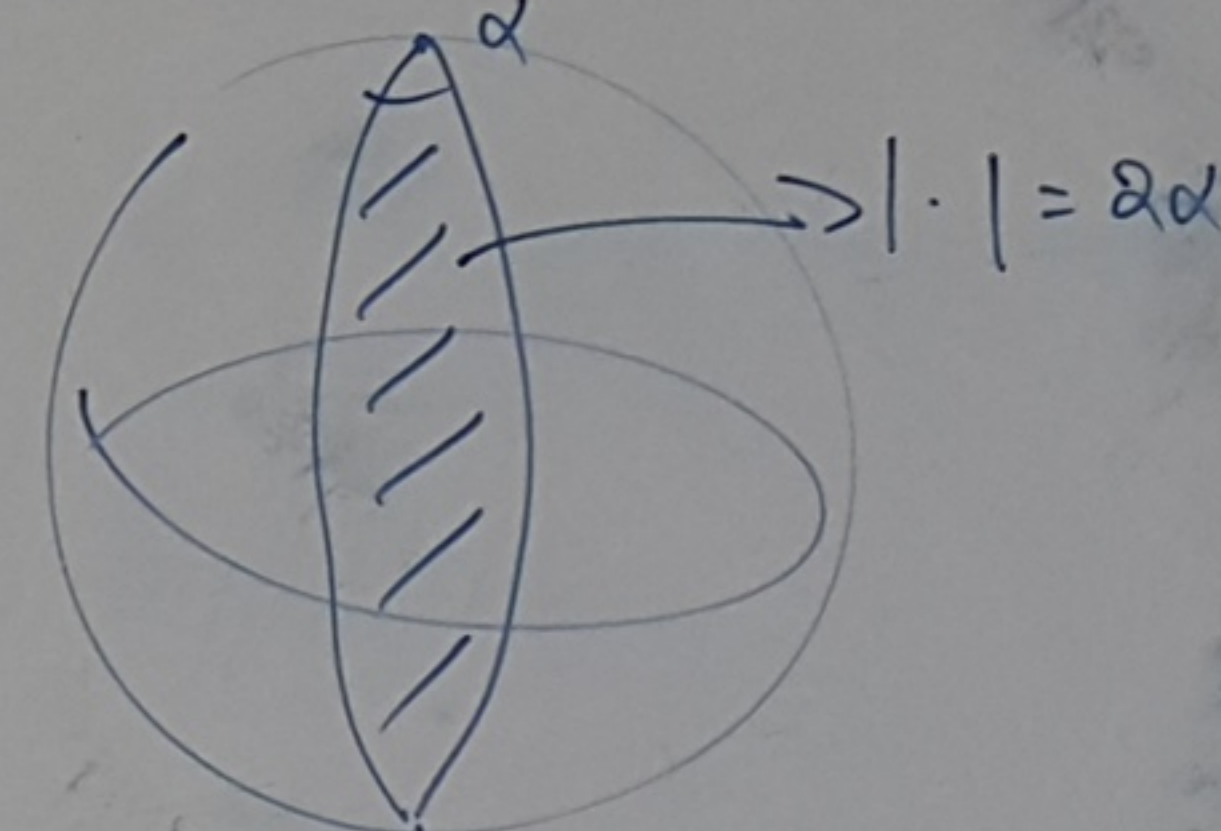
Poligon: Kenarları "doğrular" olan bölge.



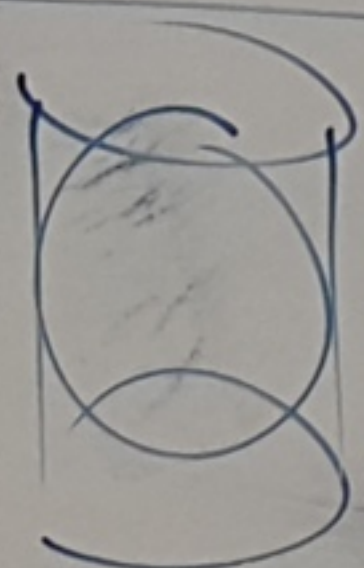
Formula



$$|ABC| = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$



Archimedes



$$S^2 \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$$

$$\sigma(\theta, \phi) \rightarrow \sigma(\theta, \phi)$$

Alan Koruyucu dönüşümdür

Hesaplama 7

S^2 içinde p, q
noktaların mesafe
nedir?

Cevap

$$d_{S^2}(p, q) = \arccos(p \cdot q)$$

Neden?

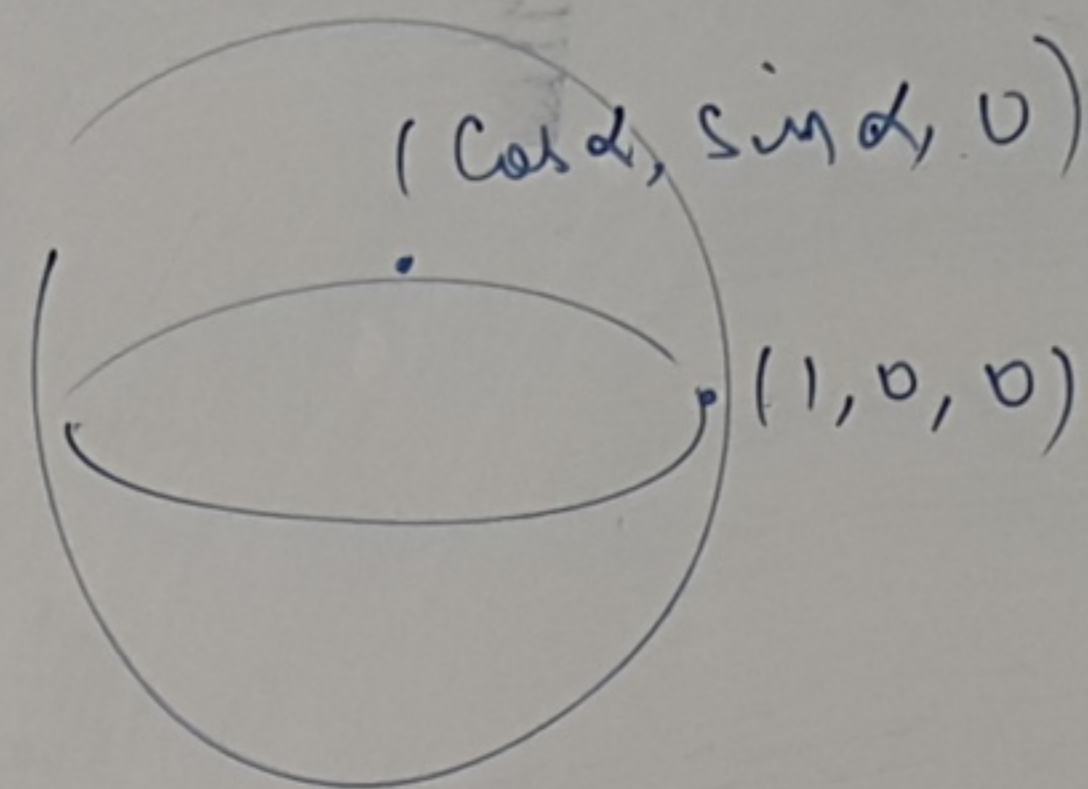
İddia 1 $p, q \in S^2$

0 zaman $p - q$ arasında
minimum mesafesi olan
eğri büyük çemberdir.

Not S^2 çevirip p, q ekvator
üzerinde olduğunu varsayabiliriz.

$$p = (1, 0, 0)$$

$$q = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$$



$$\sigma(\theta, \phi) = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, \sin \theta) \quad (9)$$

Birinci Temel Formu:

$$d\theta^2 + \cos^2 \theta d\phi^2$$

$$\gamma(0) = (1, 0, 0)$$

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$$

$p - q$ arasında herhangi eğri olsun.

$$\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$$

$$\text{Mesafe} = \int_0^t \|\dot{\gamma}\| dt$$

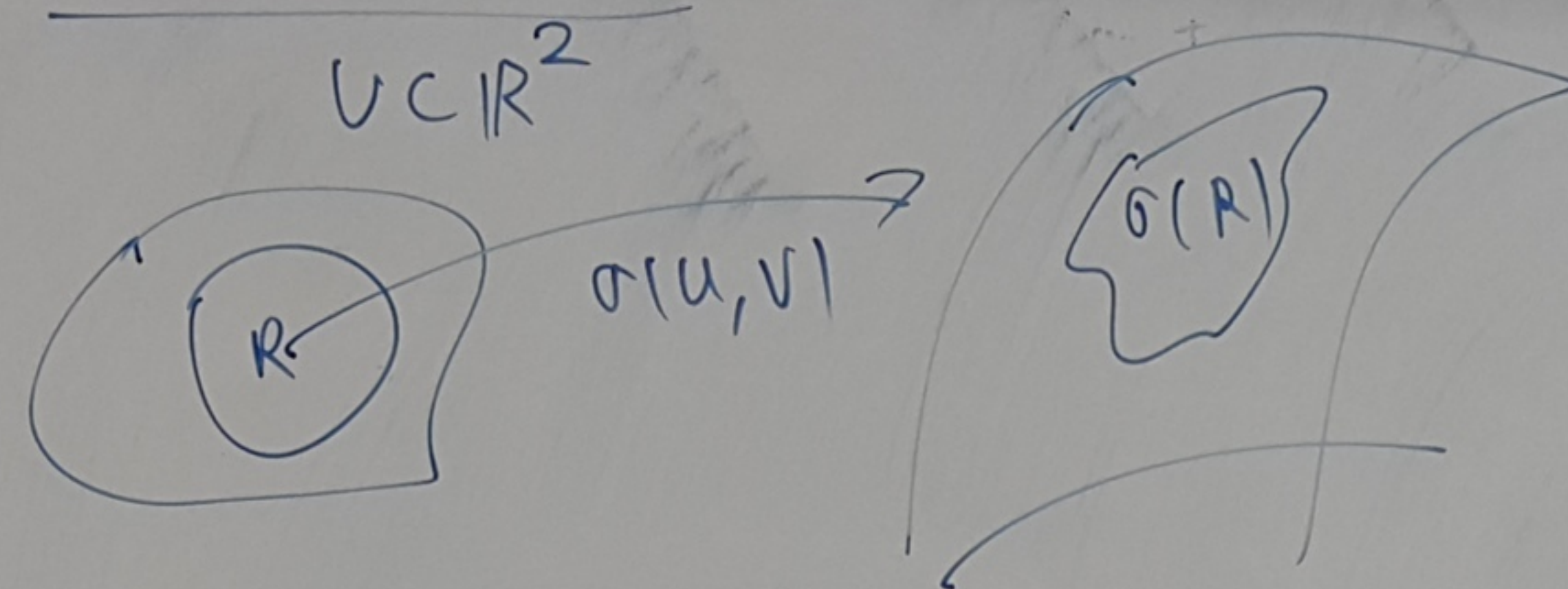
$$= \int_0^t \left(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 \cos^2 \theta \right)^{1/2} dt$$

$\sin \phi, \sin \theta$

9

çizgi olsun.

Matrisler 9



$$|\sigma(R)| = \int_R (EG - F^2)^{1/2} dA$$

Not

$$\begin{array}{ccc} S_1 & \xrightarrow{\sigma} & S_2 \\ \sigma(u,v) & & \hat{\sigma}(u,v) \end{array}$$

Alan koruyucu ($\Rightarrow$) $EG - F^2 = \hat{E}\hat{G} - \hat{F}^2$