

teğet düzlem içindedir.

III.4.1 Yerel İzometrilere

$$f: S_1 \rightarrow S_2$$

Eğer her eğri $\gamma \subset S_1$ için γ ve $f \circ \gamma$ 'nin yay uzunluğu aynı ise, f yerel İzometri denir.

III.4.2 $f: S_1 \rightarrow S_2$

Birinci temel formu: $v, w \in T_p S$

$$v, w \in T_p(S) \rightarrow \langle v, w \rangle$$

Bunu böyle ifade edebiliriz,

$$E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

$$E = \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle$$

$$F = \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle$$

$$G = \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle$$

$$\sigma: U \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ chart.}$$

$$v = \alpha \sigma_u + \beta \sigma_v$$

$$w = \tilde{\alpha} \sigma_u + \tilde{\beta} \sigma_v$$

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \langle \alpha \sigma_u + \beta \sigma_v, \tilde{\alpha} \sigma_u + \tilde{\beta} \sigma_v \rangle \\ &= \alpha \tilde{\alpha} \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle + (\alpha \tilde{\beta} + \tilde{\alpha} \beta) \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle + \beta \tilde{\beta} \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \text{TENSOR} \\ T_p(S) \times T_p(S) \rightarrow \mathbb{R} \end{array}$$

(1)

Bunu böyle ifade edebiliriz,
 $E du^2 + 2F du dv + G dv^2$

TENSOR
 $T_p(S) \times T_p(S) \rightarrow \mathbb{R}$

$\downarrow$
 E
 $\sigma_p(\sigma_u, \sigma_v) \rightarrow G$

III.4.3 Hesaplama.

$\sigma: U \rightarrow S$ chart

$\gamma: (a, b) \rightarrow S$ bir

eğri olsun ve

$\gamma \subset \sigma(U)$

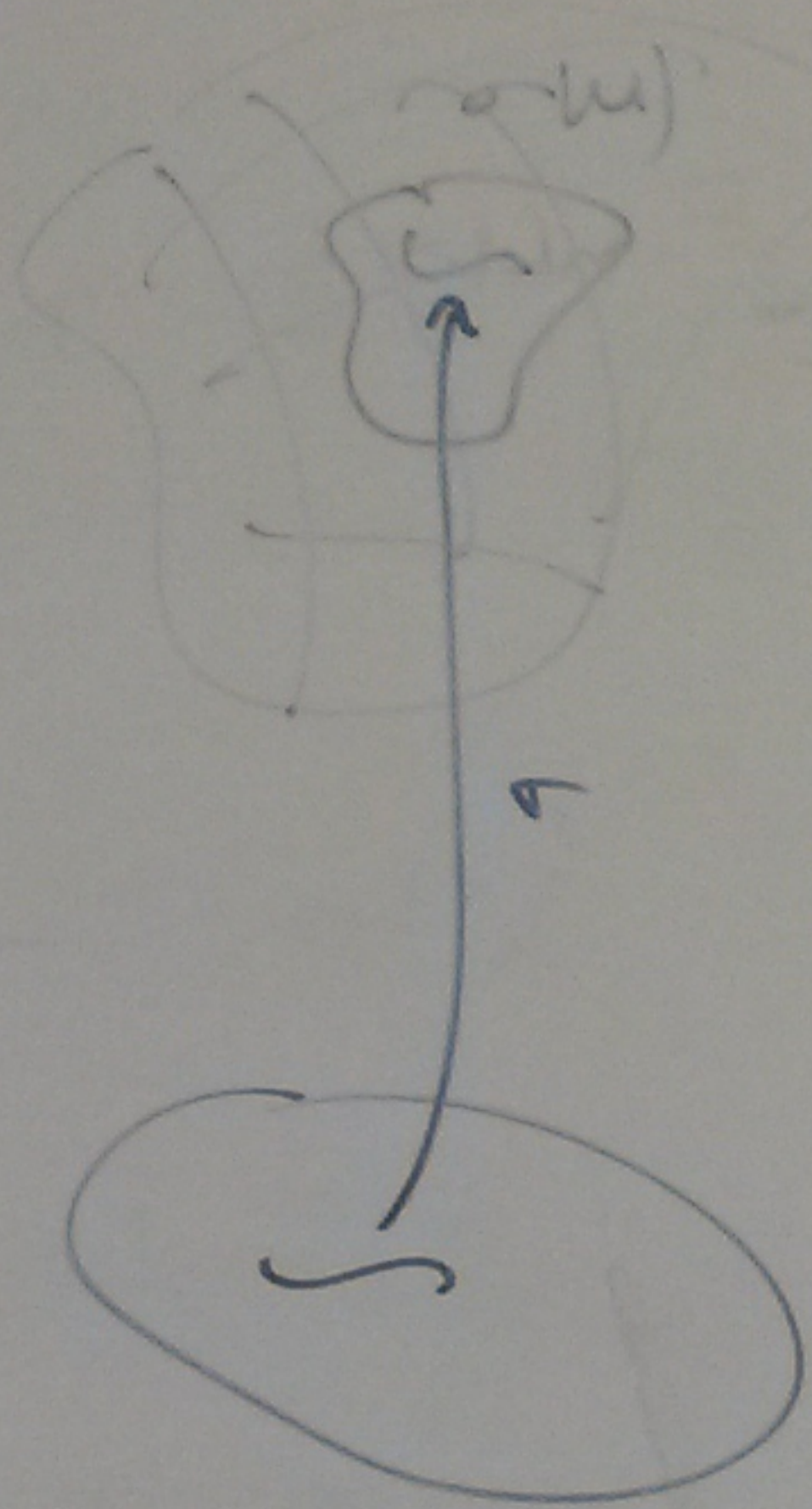
Soru: Eğrinin uzunluğu

$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$

Not: $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}(S)$

$\dot{\gamma}(t) = \gamma'(t)$ nokta üzerindeki

teğet düzlemin içinde.



Eğer eğri bu şekilde verilmiş ise,

$\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$

$\dot{\gamma}(t) = \sigma_u \dot{u} + \sigma_v \dot{v}$

$L(\gamma) = \int_a^b \langle \dot{u} \sigma_u + \dot{v} \sigma_v, \dot{u} \sigma_u + \dot{v} \sigma_v \rangle^{1/2} dt$
 $\downarrow$
 Uzunluğu

$= \int_a^b \left(E \dot{u}^2 + 2F \dot{u} \dot{v} + G \dot{v}^2 \right)^{1/2} dt$

Demek: Birinci Temel formu $\rightarrow$ Eğrilerin uzunluğu için kullanılabilir.

$$\int_{\alpha}^{\beta} \| (f \circ \gamma)'(t) \| dt$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \| Df_{\gamma(t)} \gamma'(t) \| dt$$

Soru: f zaman ne zaman değişmiyor?

Tanım III.4.4

$$f: S_1 \longrightarrow S_2 \quad p \in S_1$$

0 Zaman

$$f^* \langle v, w \rangle_p := \langle D_p f v, D_p f w \rangle_{f(p)}$$

$D_p f$: f 'in türevi.

Not: $f^* \langle \cdot, \cdot \rangle_p$ $T_p(S_1)$ üzerinde
bir İçerik.

Proposition III.4.5

(3)

S_1, S_2 düzgün regular yüzeyler. $f: S_1 \rightarrow S_2$

Bunlar birbirine denktir.

a) f yerel izometridir.

$$b) \langle \cdot, \cdot \rangle_p \equiv f^* \langle \cdot, \cdot \rangle_p$$

c) $\sigma: S_1$ için bir chart olsun.

0 Zaman, S_1 'nin Birinci temel formu

(σ 'e göre) ve S_2 'nin Birinci Temel

formu ($f \circ \sigma$ 'e göre) denktir.

İspat

$\gamma \subset S_1$ bir eğri
 $u \subset \sigma(u)$ ($\sigma: U \rightarrow S_1$)
bir chart

$\gamma: (\alpha, \beta) \rightarrow \sigma(u) \subset S_1$

$$l(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

$f: S_1 \rightarrow S_2$

$$l(f \circ \gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \|(f \circ \gamma)'(t)\| dt$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \|Df_{\gamma(t)} \gamma'(t)\| dt$$

Not: Bu her α, β için geçerli.

$$\Rightarrow \|\dot{\gamma}(t)\| = \|Df_{\gamma(t)} \dot{\gamma}(t)\|$$

$\Rightarrow Df_{\gamma(t)}$ her t için uzamlık
koruyan dönüşüm.

$$\Rightarrow \langle Df_{\gamma(t)} v, Df_{\gamma(t)} v \rangle = \langle v, v \rangle$$

$$\Rightarrow f^* \langle v, v \rangle_p = \langle v, v \rangle_p \quad \text{her } p \text{ için.}$$

Soru: Açılar ne zaman
değişmiyor?

$$\Rightarrow T_v, T_w \text{ arasındaki açı} = \frac{\langle v, v \rangle^{1/2} \langle w, w \rangle^{1/2}}{\langle v, w \rangle}$$

$$u = \lambda e_1 + \mu e_2$$

$$v = \tilde{\lambda} e_1 + \tilde{\mu} e_2$$

III. 4.6

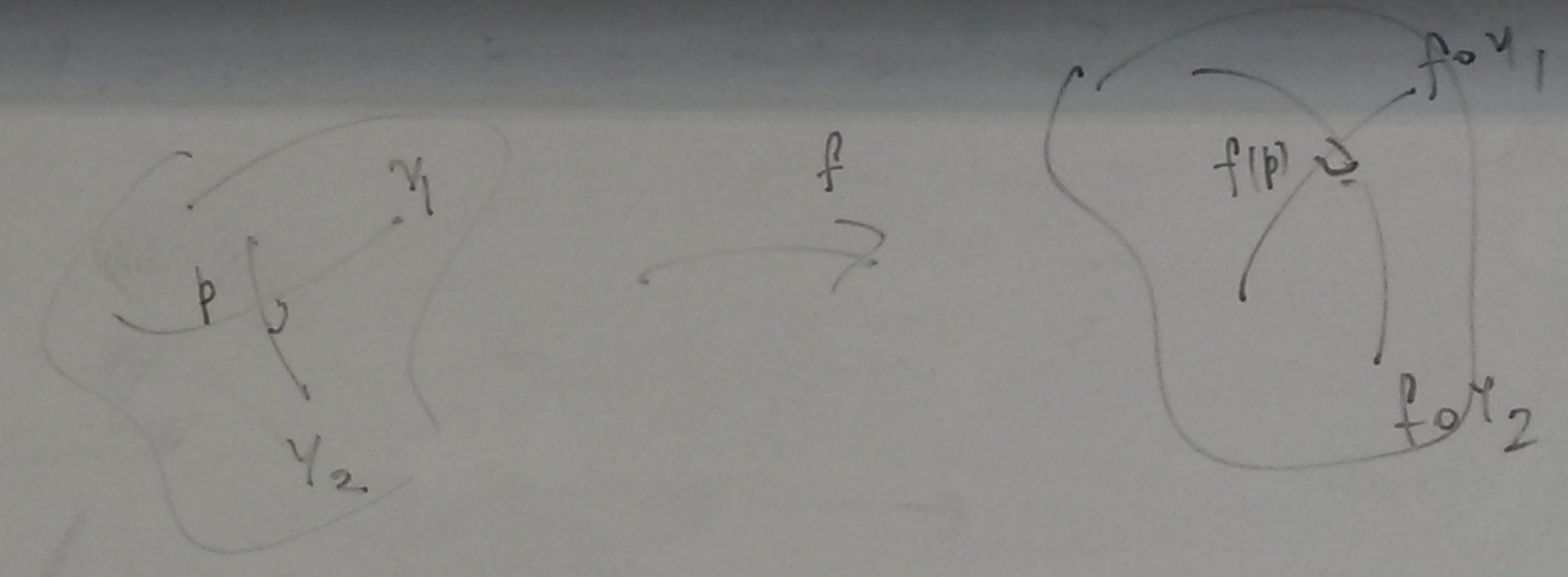
Açıları koruyan dönüşümler.

$$f: S_1 \rightarrow S_2$$

Her $p \in S_1$ ve her iki γ_1, γ_2 p 'den geçen eğriler $(\gamma_1, \gamma_2 \subset S_1)$ için eğer

γ_1 ve γ_2 'deki p noktasındaki açı ve $f \circ \gamma_1$ ve $f \circ \gamma_2$ 'deki $f(p)$ noktasındaki açı aynı

ise, f "Açı koruyan dönüşüm" demir.



Proposition III. 4.7

$f: S_1 \rightarrow S_2$. Bunları birbirine denktir

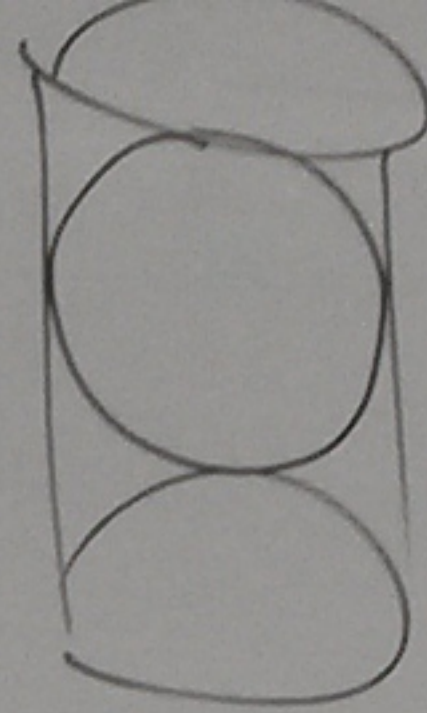
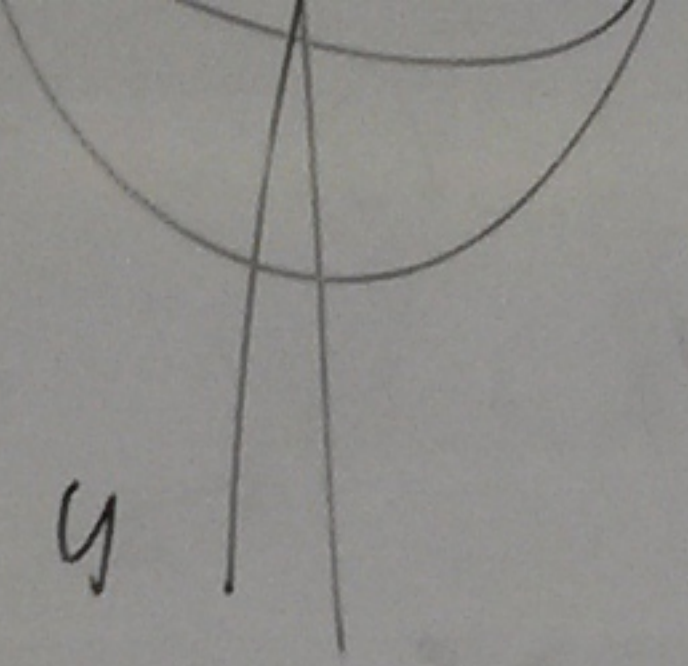
a) f açıları koruyan

$$b) f^* \langle v, w \rangle_p = \lambda(p) \langle v, w \rangle_p$$

(pull back)

Sağlayan bir fonksiyon $\lambda(p)$ var.

İsbat Bunun göstermek lazım



$$\begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & \cos \theta \end{pmatrix}$$

(9)

$(0,0,1)$ ve $(u,v,0)$ arasındaki doğru

$$t(u,v,0) + (1-t)(0,0,1) = (tu, tv, 1-t)$$

Bu hangi t için S^2 üzerindedir.

$$\Rightarrow t^2 u^2 + t^2 v^2 + (1-t)^2 = 1$$

$$\Rightarrow t^2(u^2 + v^2 + 1) = 2t$$

$$\Rightarrow t = \frac{2}{u^2 + v^2 + 1}$$

$$\sigma(u,v) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right)$$

İddia: Açık koruyucu.

$\mathbb{R}^2$ için Birinci Temel form $du^2 + dv^2$

$$\sigma: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \{0,0,1\}$$

Bunu göstermeliyiz

$$\sigma^* \langle u, v \rangle = (\text{const}) \langle u, v \rangle$$

σ kullanarak Birinci Temel Formu hesaplayarak $(S^2 \setminus \{0,0,1\})$ için 0

Ekman $\lambda(\beta)(du^2 + dv^2)$ çıkması lazım.

BTF

$$\sigma_u = \left(\frac{2(v^2 - u^2 + 1)}{(u^2 + v^2 + 1)^2}, \frac{-4uv}{(u^2 + v^2 + 1)^2}, \frac{4u}{(u^2 + v^2 + 1)^2} \right)$$

$$\sigma_v = \left(\frac{-4uv}{(u^2 + v^2 + 1)^2}, \frac{2(u^2 - v^2 + 1)}{(u^2 + v^2 + 1)^2}, \frac{4v}{(u^2 + v^2 + 1)^2} \right)$$

0 zaman $|\Delta| = |ABC| = \alpha + \beta + \gamma - \pi$.

$$\langle \sigma_u, \sigma_u \rangle = \frac{4}{(u^2 + v^2 + 1)^2}$$

$$\langle \sigma_u, \sigma_v \rangle = 0$$

$$\langle \sigma_v, \sigma_v \rangle = \frac{4}{(u^2 + v^2 + 1)^2}$$

BTF : $\frac{4}{(u^2 + v^2 + 1)^2} (du^2 + dv^2)$

örnek III.4.9 (Mercator Projection)

(10)

$$\sigma(u, v) = (\text{sech}(u) \cos(v), \text{sech}(u) \sin(v), \tanh(u))$$

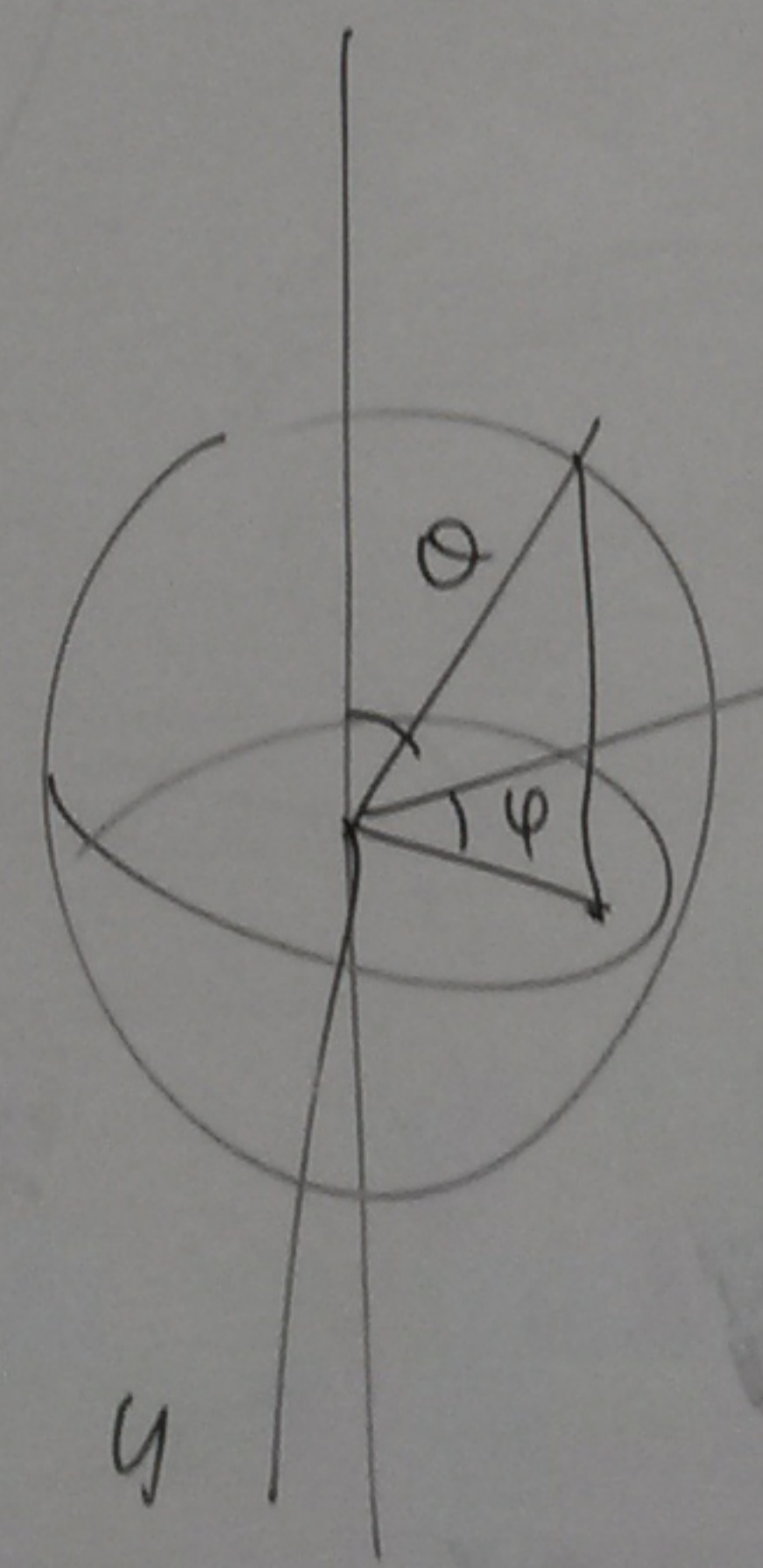
Birinci Temel formu?

Tanım III.4.10 (Alan koruyan dönüşümler)

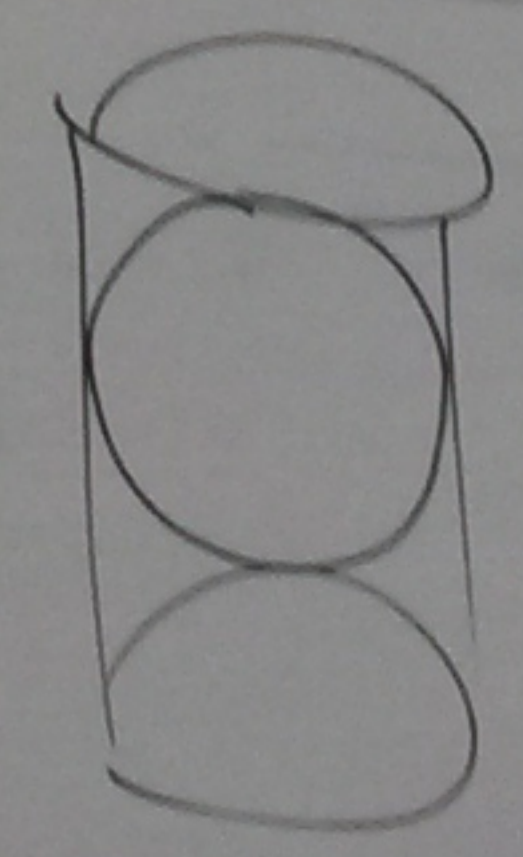
$f: S_1 \rightarrow S_2$. R her $R \subset S_1$ için

$$|R| = |f(R)| \text{ ise}$$

f alan koruyan denir.



klasik örnek III.4.11



$$\begin{aligned} \Phi &= (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \\ &= (\cos \varphi, \sin \varphi, \cos \theta) \end{aligned}$$

$$E\tilde{G} - F^2 = \tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2$$

Uygulama 11

S^2 için Küresel Ko-ordinatla BTF = $d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$

$\Phi: S^2 \rightarrow \text{Silinder}$

$$\tilde{\sigma} = \Phi \circ \sigma(\theta, \varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi, \cos \theta)$$

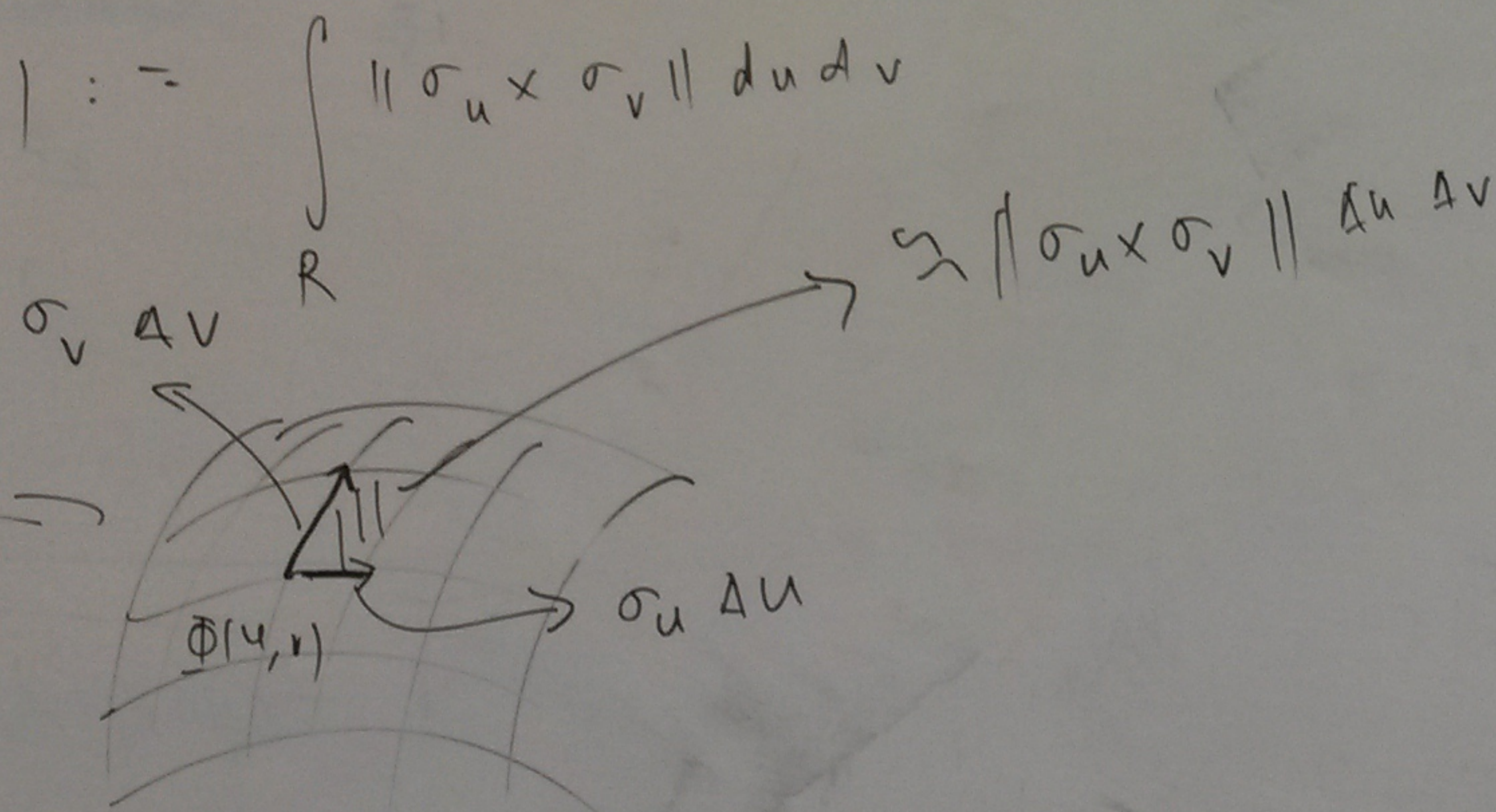
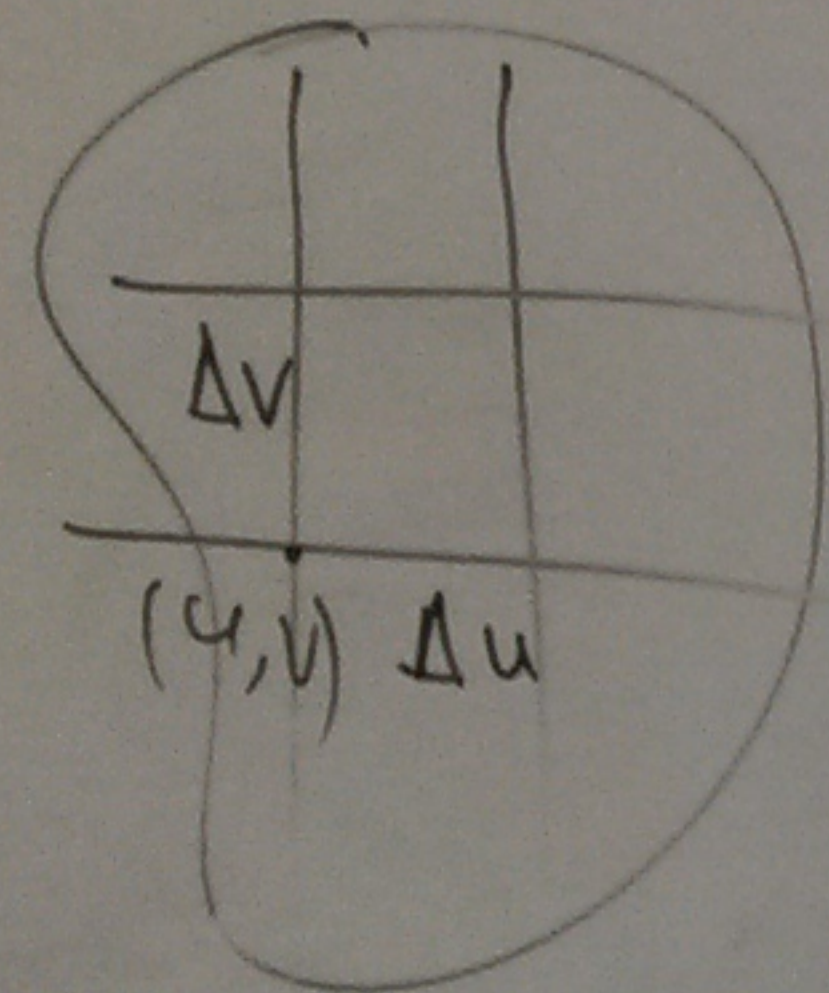
$$\tilde{\sigma}'_u = (0, 0, -\sin \theta) \quad \tilde{\sigma}'_v = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$$

Not Mesafe koruyorsa $\Rightarrow$
 Açılar koruyar
 Mesafe koruyorsa $\Rightarrow$
 Alanlar koruyar

Tanım III. 4.11 (Alan)

$\sigma: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ chart
 $R \subset U$ bölge.

0 $\neq$ zaman $| \sigma(R) | := \int_R \| \sigma_u \times \sigma_v \| du dv$



Proposition III. 4.12

$\sigma: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ bir chart olsun.
 $E du^2 + 2F du dv + G dv^2$ Birinci Temel formu.

0 $\neq$ zaman

$$\| \sigma_u \times \sigma_v \| = \sqrt{EG - F^2}$$

İspat

$$(a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c)$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ için

$$\Rightarrow \| \sigma_u \times \sigma_v \|^2 = (\sigma_u \cdot \sigma_u)(\sigma_v \cdot \sigma_v) - (\sigma_u \cdot \sigma_v)^2$$

$$= EG - F^2.$$

Prop II. 4.13

$f: S_1 \rightarrow S_2$ Alan

koruyan ancak

ancak

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

(S_1 'nin BTF)

$$f^* \langle \cdot, \cdot \rangle_p = \tilde{E} du^2 + 2\tilde{F} du dv + \tilde{G} dv^2$$

(S_2 'nin pullback)

(Yada $S_1: \sigma$ kullanarak BTF)
 $S_2: f \circ \sigma$

$$EG - F^2 = \tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2$$

İspat

$$\sigma: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1$$

$$f: S_1 \rightarrow S_2$$

(12)

$R \subset U$ bölge

$$|\sigma(R)| = \int_R (EG - F^2)^{1/2} du dv$$

$$|f \circ \sigma(R)| = \int_R (\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2)^{1/2} du dv$$

BTF

$$\sin^2 \theta d\theta^2 + d\varphi^2$$

Her $R \subset U$ için geçerli.

$$\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2 = EG - F^2$$

Uygulama II. 4.14 Archimedes.

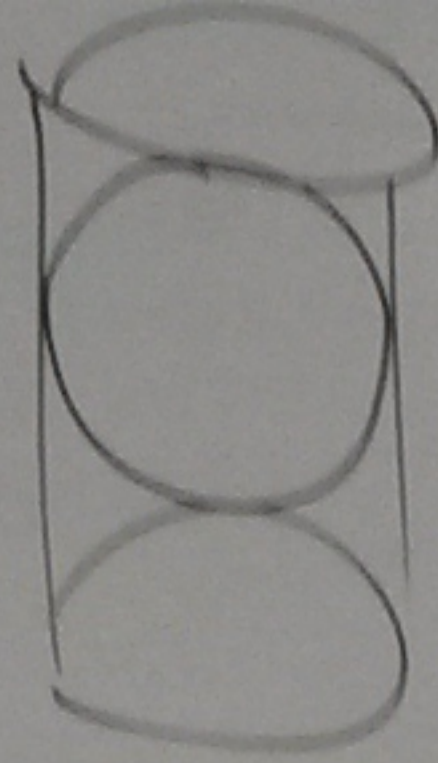
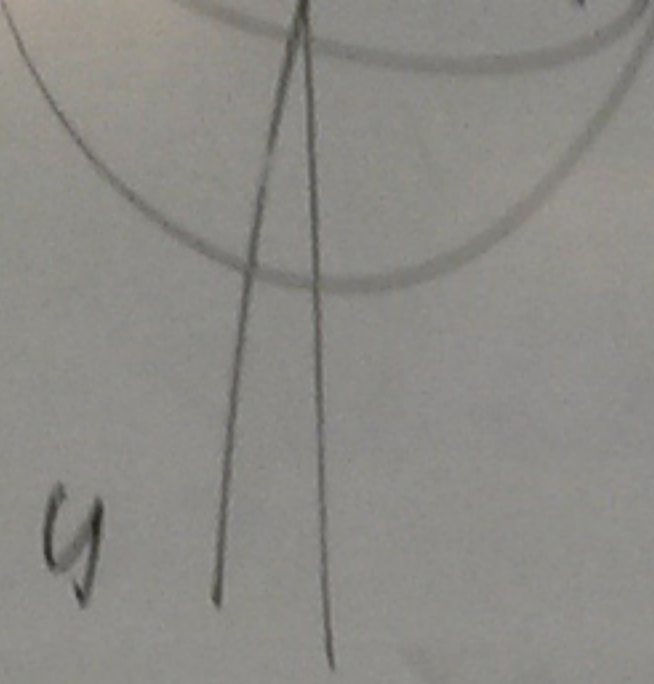
S^2 için Küresel ko-ordinatla BTF = $d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$

$$\Phi: S^2 \rightarrow \text{Silinden}$$

$$\tilde{\sigma} = \Phi \circ \sigma(\theta, \varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi, \cos \theta)$$

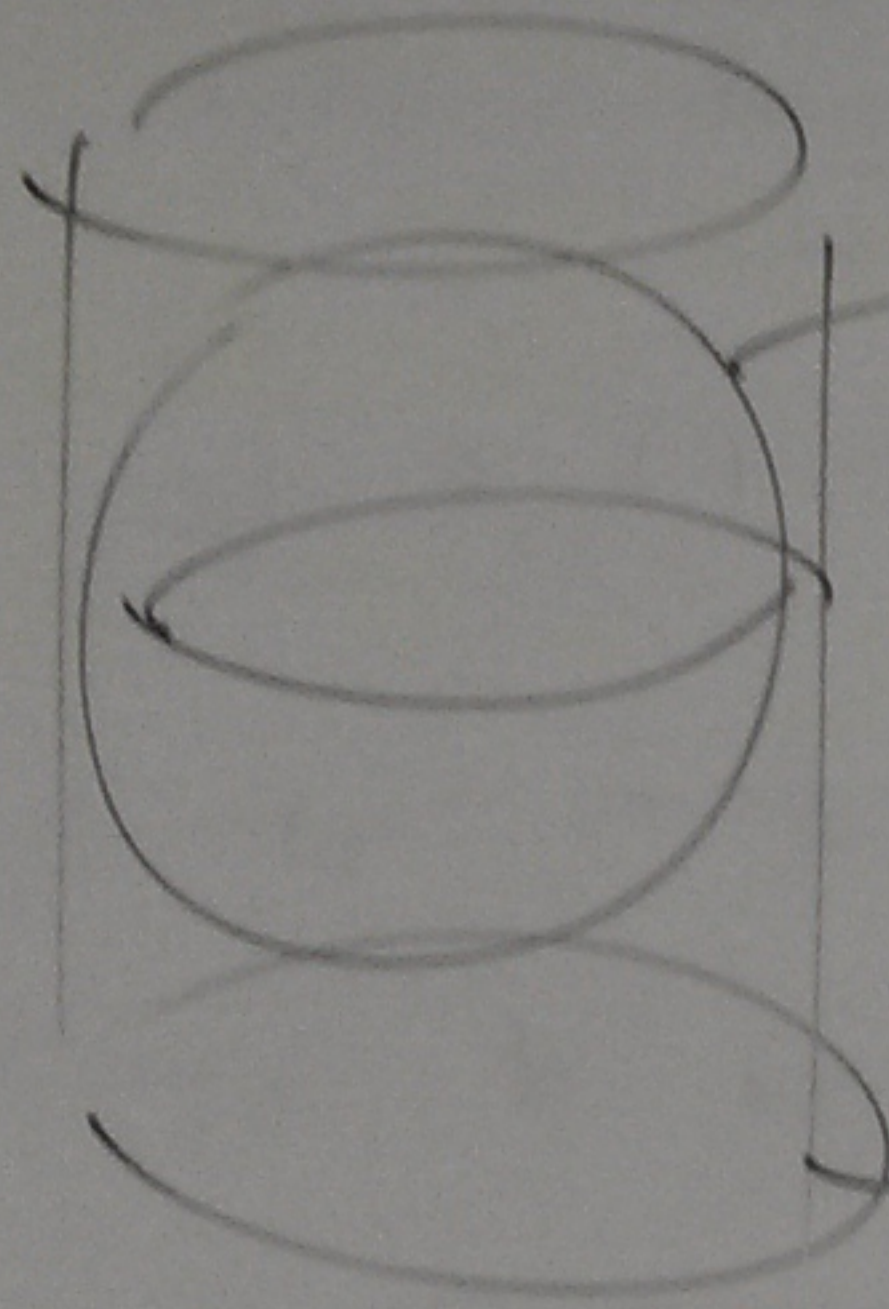
$$\tilde{\sigma}_\theta = (0, 0, -\sin \theta)$$

$$\tilde{\sigma}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$$



$$\vec{r} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$$

$$= (\cos \varphi, \sin \varphi, \cos \theta)$$



$$\rightarrow d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$$

$$E=1 \quad F=0 \quad G=\sin^2 \theta$$

$$\rightarrow \sin^2 \theta d\theta^2 + d\varphi^2$$

$$\tilde{E}=\sin^2 \theta \quad \tilde{F}=0 \quad \tilde{G}=1$$

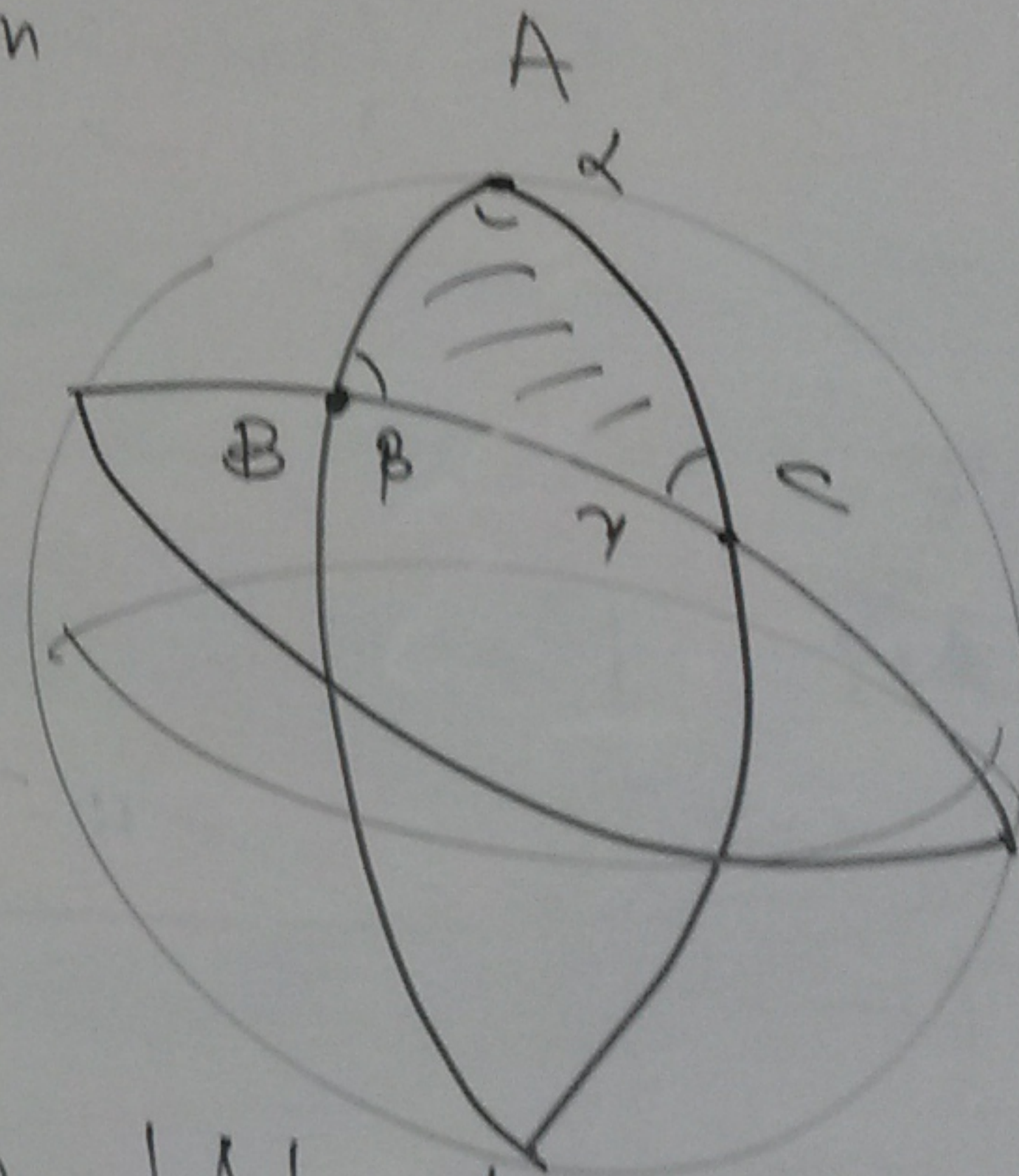
$$\text{Ama } EG - F^2 = \tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2$$

$\Rightarrow$ Alan Koruyun!!!

Uygulama II.4.15

$$\Delta \subset \mathbb{S}^2$$

Büyük çemberlerden oluştuğunu
üçgen



$$\text{O zaman } |\Delta| = |ABC| = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$