1

2 Integrasyon.

(1.2.2)

Tanım $E \subset R \subset \mathbb{R}^n$ Jordan Bölge, $f : E \to \mathbb{R}$, sınırlı

Eğer $\inf_{\mathcal{G}: R \text{ üzerinde ağ}} U(f;\mathcal{G}) = \sup_{\mathcal{G}: R \text{ üzerinde ağ}} L(f,P)$ ise,

O zaman, f Integrallenebilirdir.

Tanım 1.2.1 $E \subset R \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{G} = \{R_1, \dots, R_p\}$

$\mathcal{G}$: R üzerinde bir ağ

$f : E \to \mathbb{R}$

E dışında f'e '0' olarak tanımlayıp uzatalım.

$$U(f;\mathcal{G}) := \sum_{R_j \cap E \neq \emptyset} M_j |R_j| \qquad M_j = \sup_{x \in R_j} f(x)$$

$$L(f;\mathcal{G}) := \sum_{R_j \cap E \neq \emptyset} m_j |R_j| \qquad m_j = \inf_{x \in R_j} f(x)$$

$L(f;\mathcal{G}) := \sum_{R_j \cap E \neq \emptyset} m_j |R_j|$

2

Not 1.2.3 a) $\sup_{\mathcal{G}} L(f, \mathcal{G}) \leq \inf_{\mathcal{G}} U(f;\mathcal{G})$

her f için.

$(L)\int_E f \qquad (U)\int_E f$

b) $\mathcal{H}$ $\mathcal{G}$'den daha ince ise,

$L(f;\mathcal{H}) \geq L(f;\mathcal{G})$

$U(f;\mathcal{H}) \leq U(f;\mathcal{G})$

c) $f: E \to \mathbb{R}$ integrallenebilir ancak ve ancak her $\varepsilon > 0$ için

$U(f;\mathcal{G}) - L(f;\mathcal{G}) < \varepsilon$ sağlayan

bir ağ var.

$R_j \cap \partial E \neq \emptyset$

$\hookrightarrow \leq \varepsilon \sum_{R_j \subset E^0} |R_j| + 2M \sum_{R_j \cap \partial E \neq \emptyset} |R_j|$

$\leq \varepsilon \, Vol(E) + 2M\varepsilon = \varepsilon (Vol(E) + 2M)$

Teorem 1.2.4 $E \subset \mathbb{R}^n$ Jordan olsun ve $f : E \to \mathbb{R}$ sınırlı ve düzgün sürekli olsun. O zaman f integrallenebilirdir.

İspat $E \subset R \subset \mathbb{R}^n$
$\hookrightarrow$ dik dörtgen.

$\varepsilon > 0$ sabit olsun.
f: Düzgün sürekli. $x, y \in E$,
$\Rightarrow \exists \delta > 0 \mid |x-y| < \delta$
$x, y \in E$
$\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

$\mathcal{G}$ R üzerinde

1) $V(\partial E; \mathcal{G}) < \varepsilon$

2) $\mathcal{G} = \{R_1, \ldots, R_p\}$ Her i için ve her $x, y \in R_i$ için $|x-y| < \delta$ olsun.

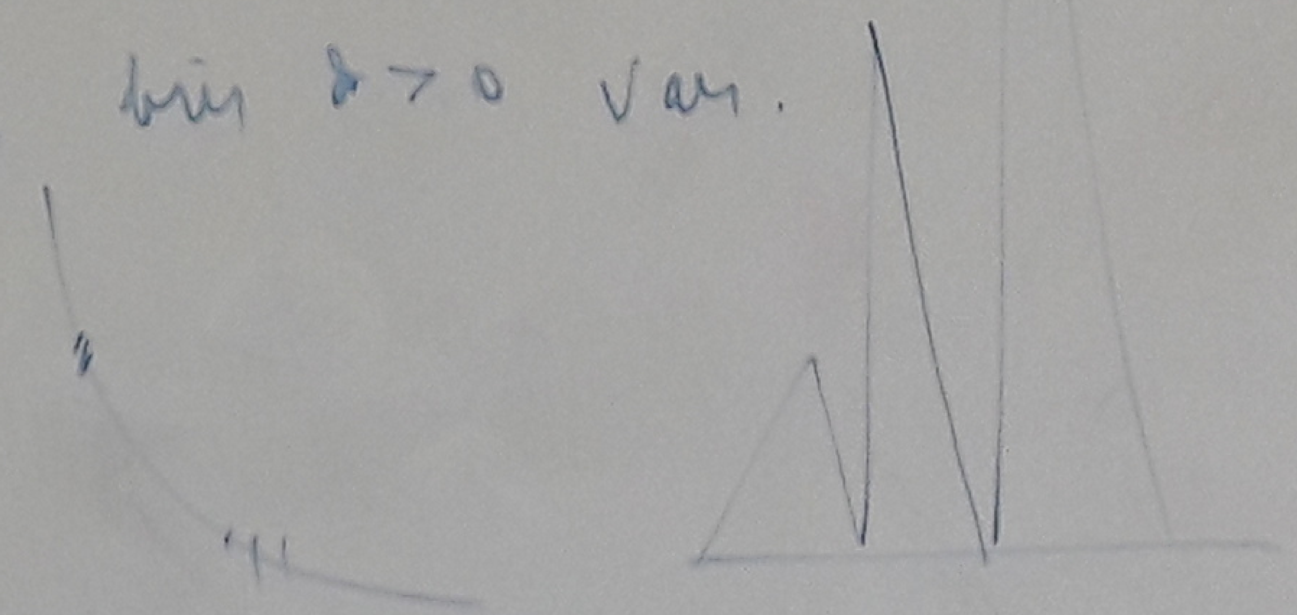
Hatırlatma

$E \subset \mathbb{R}^n$ $f : E \to \mathbb{R}$ düzgün sürekli demek:

Her $\varepsilon > 0$ için

$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

sağlayan bir $\delta > 0$ var.



1) $U(\partial E; \mathcal{G}) < \varepsilon$

2) $\mathcal{G} = \{R_1, \dots, R_p\}$ Her i için ve her $x, y \in R_i$ için $|x-y| < \delta$ olsun.

④

$U(f; \mathcal{G}) - L(f; \mathcal{G})$

$= \sum_{R_j \cap E \neq \emptyset} (M_j - m_j) |R_j|$

$= \sum_{R_j \subset E^\circ} (M_j - m_j) |R_j| \quad (*)$

$+ \sum_{R_j \cap \partial E \neq \emptyset} (M_j - m_j) |R_j| \quad (**)$

f sınırlı $\Rightarrow \exists M \mid |f| \leq M$.

$(*)$: $x, y \in R_j \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

$(**)$: Burada f bazı noktalarda 0 şeklinde uzatılmış. $\Rightarrow$ Sürekli değil. Ama $|M_j - m_j| \leq 2M$.

$\leq \varepsilon \sum_{R_j \subset E^\circ} |R_j| + 2M \sum_{R_j \cap \partial E \neq \emptyset} |R_j|$

$\leq \varepsilon \, Vol(E) + 2M\varepsilon = \varepsilon(Vol(E) + 2M)$

$\varepsilon \to 0$

$U(f; \mathcal{G}) - L(f; \mathcal{G}) \to 0$.

1.2.3 c) kullanarak

ispat tamamlandı.

$E \subset \mathbb{R}^n$
$F \subset \mathbb{R}^m$

$$\{(x,y) \mid x \in E,\ y \in F\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$$

Not 1.2.5

$E \subset \mathbb{R}^n$ Jordan Bölge.

O zaman

$$\mathrm{Vol}(E) = \int_E 1 .$$

Sebep $f = 1$ E üzerinde
$= 0$ E dışında

G: P.G. O zaman

$$v(E;G) \le L(f;G) \le U(f;G) \le V(E;G)$$

... □

(5)

Not 1.2.6 $E \subset \mathbb{R}^n$ Jordan Bölge...

$f: E \to \mathbb{R}$ İntegrallenebilir, $f \geq 0$

O zaman $\mathrm{Graf}(f,E)$ bir Jordan Bölgedir ve

$$\int_E f = \mathrm{Vol}(\mathrm{Graf}(f,E))$$

$$= \{(x,y) : x \in E,\ 0 \le y \le f(x)\}$$

İspat

$$\partial[\mathrm{Graf}(f,E)] = \left\{(x,y) \;\middle|\; \begin{array}{l} x \in \partial E \text{ veya} \\ x \in E^{\circ} \text{ ve } y = 0 \\ \text{veya } y = f(x) \end{array}\right\}$$

Çünkü $(x,y) \in \mathrm{Graf}(f,E)^{\circ} \iff x \in E^{\circ} + 0 < y < f(x)$

İki şey
✓ (1)
(2)
G:
üzer

Sebep $f = 1$ E üzerinde
$\quad\;\; = 0$ E dışında

$\mathcal{G}$: A'nın ... O zaman

$v(E;\mathcal{G}) \le L(f;\mathcal{G}) \le U(f;\mathcal{G}) \le V(E;\mathcal{G})$

... $\square$

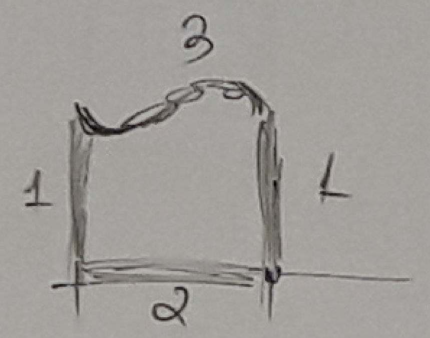
İspat $\partial\left[\mathrm{Graf}(f,E)\right] = \left\{ \begin{array}{l} x\in E \text{ ve } y = 0 \\ \text{veya } y = f(x) \end{array} \right\}$

Çünkü $(x,y) \in \mathrm{Graf}(f,E)^{\circ} \iff x \in E^{\circ} + 0 < y < f(x)$

(6)

f sınırlı $\Rightarrow \exists M \mid \forall x \in E$
$\qquad |f(x)| \le M$

$$\partial\left[\mathrm{Graf}(f,E)\right] \subset \partial E \times [0,M] \;\cup\; E^{\circ}\times\{0\} \;\cup\; \{(x,f(x)) : x \in E^{\circ}\}$$



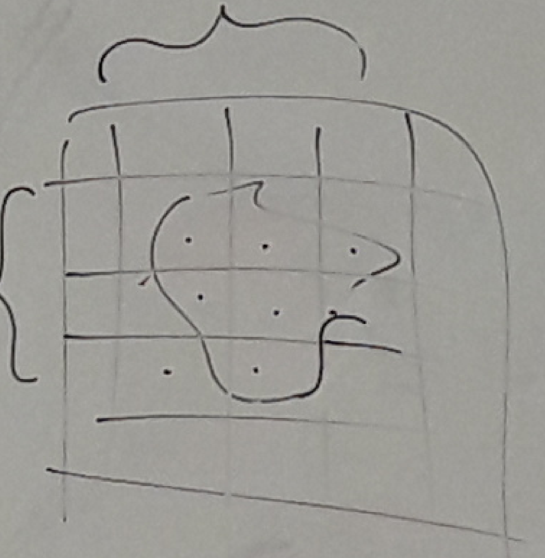
$$\overline{Vol}\left(\partial(\mathrm{Graf}(f,E))\right) \le \underbrace{\overline{Vol}\left(\partial E \times [0,M]\right)}_{\to 0} + \underbrace{\overline{Vol}\left(E^{\circ}\times\{0\}\right)}_{\to 0} + \overline{Vol}\left(\{(x,f(x)) : x\in E^{\circ}\}\right)$$

$\left(\overline{Vol}(\partial E) = 0\right)$ E: Jordan

Not $\overline{Vol}(E\times F) \le \overline{Vol}(E)\,\overline{Vol}(F)$

$E \subset \mathbb{R}^n$
$F \subset \mathbb{R}^m$

$\left\{(x,y) \;\middle|\; \begin{array}{l} x\in E \\ y \in F \end{array}\right\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$



Quiz
Bu
Cuma

6

$y=0$

$=f(x)$

$0<y<f(x)$

6

0

$\overline{\text{vol}}(\partial E) = 0$

ordan

üzerinde bir ağ. $\mathcal{G}=\{R_1,\dots,R_p\}$

f E dışında 0 olarak uzatalım.

$$\overline{\text{vol}}[\text{Graf}(f,E)] \le \sum_{i=1}^{p} M_i |R_i| = U(f,\mathcal{G})$$

$$\underline{\text{vol}}[\text{Graf}(f,E)] \ge \sum_{1}^{p} m_i |R_i| = L(f,\mathcal{G})$$

7

$\Rightarrow \overline{\text{vol}}\left[\partial(\text{Graf}(f,E))\right] \le \overline{\text{vol}}\left[\{(x,f(x)) : x\in E^0\}\right]$

f: İntegrallenebilir. $\varepsilon>0$ $\exists$ $\mathcal{G}=\{R_1,\dots,R_p\}\subset\mathbb{R}^n$

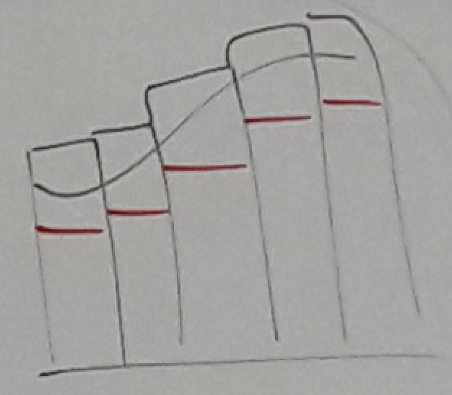
$$U(f;\mathcal{G}) - L(f;\mathcal{G}) = \sum_{R_j\cap E\neq\emptyset} (M_j-m_j)\,|R_j| < \varepsilon$$

Not: $Y := \{(x,f(x)) : x\in E^0\} \subset \bigcup_{j=1}^{p} R_j\times[m_j,M_j] \to S_1,\dots,S_p$

$Y\subset S_1\cup\dots\cup S_p$ ve $\sum|S_i|<\varepsilon$.

$\varepsilon\to 0$

$\Rightarrow \overline{\text{vol}}(Y)=0$.



Sonuç,

$\overline{\text{vol}}\left[\partial\,\text{Graf}(f,E)\right]=0$.

$S_i=[m_i,M_i]\times R_i \Rightarrow$ Graf(f,E) bir Jordan Bölge.

Not: $Y := \{(x, f(x)) : x \in E^c\} \subset \bigcup_{j=1}^{p} R_j \times [m_j, M_j] \to S_1, \dots, S_p$ $\quad S_i = [m_i, M_i]$ $\to$ Graf(f, E) bir Jordan Bölge.

$Y \subset S_1 \cup \dots \cup S_p$ ve $\sum |S_i| < \varepsilon$.

⑧

İki şey Lazımdı

✓ (1) Graf(f, E) bir Jordan Bölge.

(2) $\int_E f = \mathrm{Vol}(\mathrm{Graf}(f, E))$

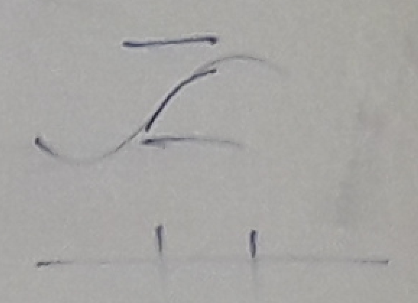
$\mathcal{G}$: E'yi kapsayan bir Dikdörtgen üzerinde bir ağ. $\mathcal{G} = \{R_1, \dots, R_p\}$

f E dışında 0 olarak uzatalım.

$\mathrm{Graf}(f, E) \subset \bigcup_{i=1}^{p} R_i \times [0, M_i]$

$M_i = \sup_{x \in R_i} f(x)$

$m_i = \inf_{x \in R_i} f(x)$



ve $\mathrm{Graf}(f, E) \supset \bigcup_{i=1}^{p} R_i \times [0, m_i]$

$\overline{\mathrm{Vol}}\,[\mathrm{Graf}(f, E)] \le \sum_{1}^{p} M_i |R_i| = U(f, \mathcal{G})$

$\underline{\mathrm{Vol}}\,[\mathrm{Graf}(f, E)] \ge \sum_{1}^{p} m_i |R_i| = L(f, \mathcal{G})$

$C\mathbb{R}^{n+\dots}$

6

(9)

$L(f;\mathcal{G}) \leq \underline{Vol}(Graf(f,E)) \leq \overline{Vol}(Graf(f,E)) \leq U(f,\mathcal{G})$

$$\sup L(f;\mathcal{G}) = \inf U(f;\mathcal{G}) = \int_E f$$

(çünkü f Integrellenebilir)

$$\Rightarrow \sup \underline{Vol}(Graf(f,E)) = \inf \overline{Vol}(Graf(f,E))$$

$$= Vol(Graf(f,E))$$

$$= \int_E f$$

D