

$$\approx \sum F(\bar{x}_i) \cdot \frac{N}{\bar{x}_i} |S_i|$$

∂V : Parçalaşım

$$\partial V = S_1 \cup \dots \cup S_R$$

$$\bar{x}_i \in S_i$$

$|S_i|$: S_i 'nin hacmi

küçük
parçalar

Toplam

giriş / çıkış

$$\partial V \subset \mathbb{R}^3 \text{ yüzey}$$

$$\partial V = \left\{ \Phi(x, y) : (x, y) \in E \subset \mathbb{R}^2 \right\}$$

Φ : Parametrizasyon
+ve Orientasyon

2.4 Flux Integralı.

F : Vector Alan

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$F(x, y, z)$: (x, y, z) noktada

Sıvı hangi yöne doğru

ve ne kadar hızla

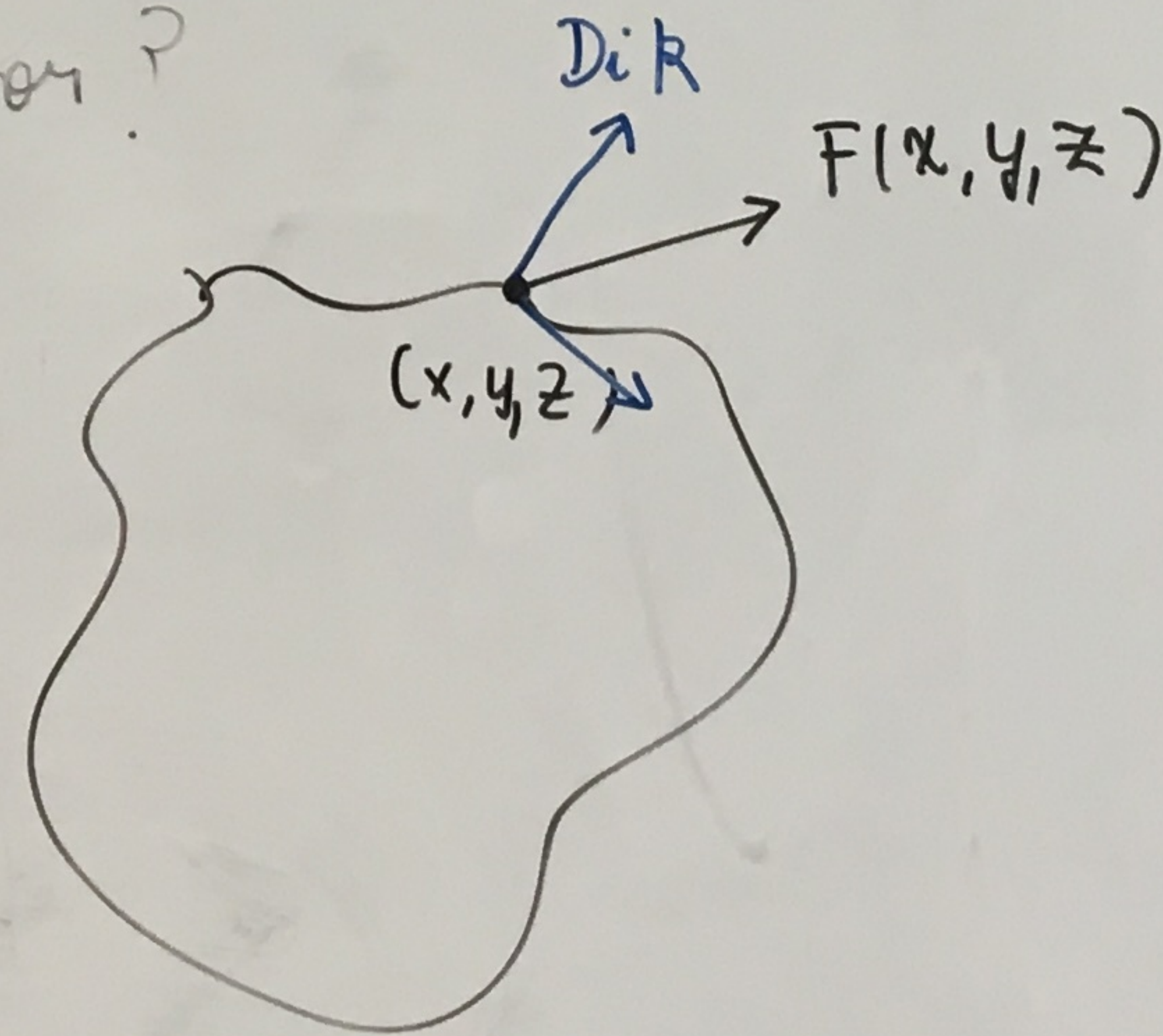
hareket ettiğini ifade
ediyor.

$V \subset \mathbb{R}^3$ bir bölge olsun.

Bu bölge den ne kadar

Sıvı (Fluid) çıkıyor veya

giriyor?



$$(x, y, z) \in \partial V$$

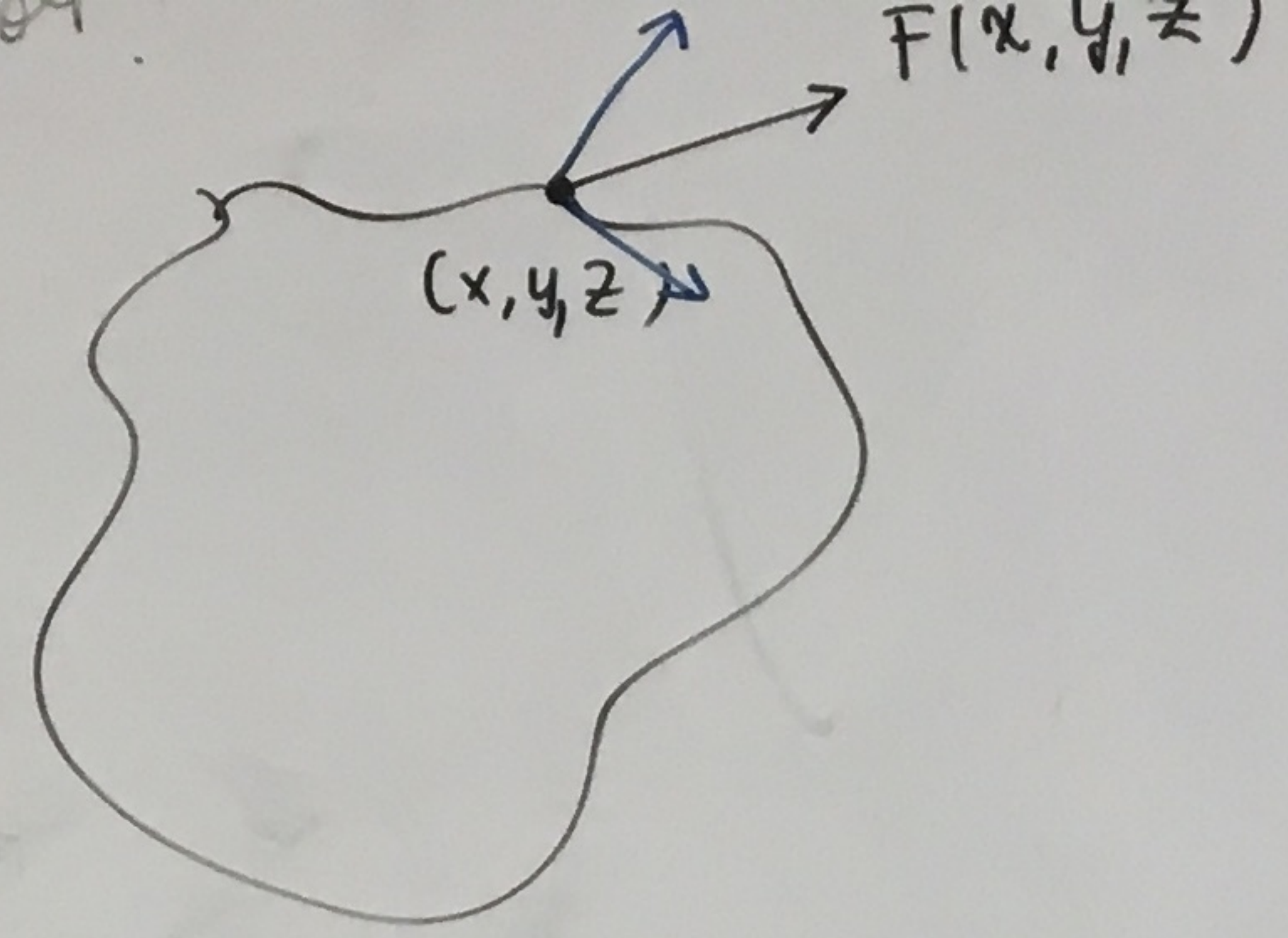
$$F(x, y, z) = v + w$$

Bölge ile dik

$N(x, y, z)$: Bölge ile dik
alan (ne dışarıya
giden)

birim vektör olsun

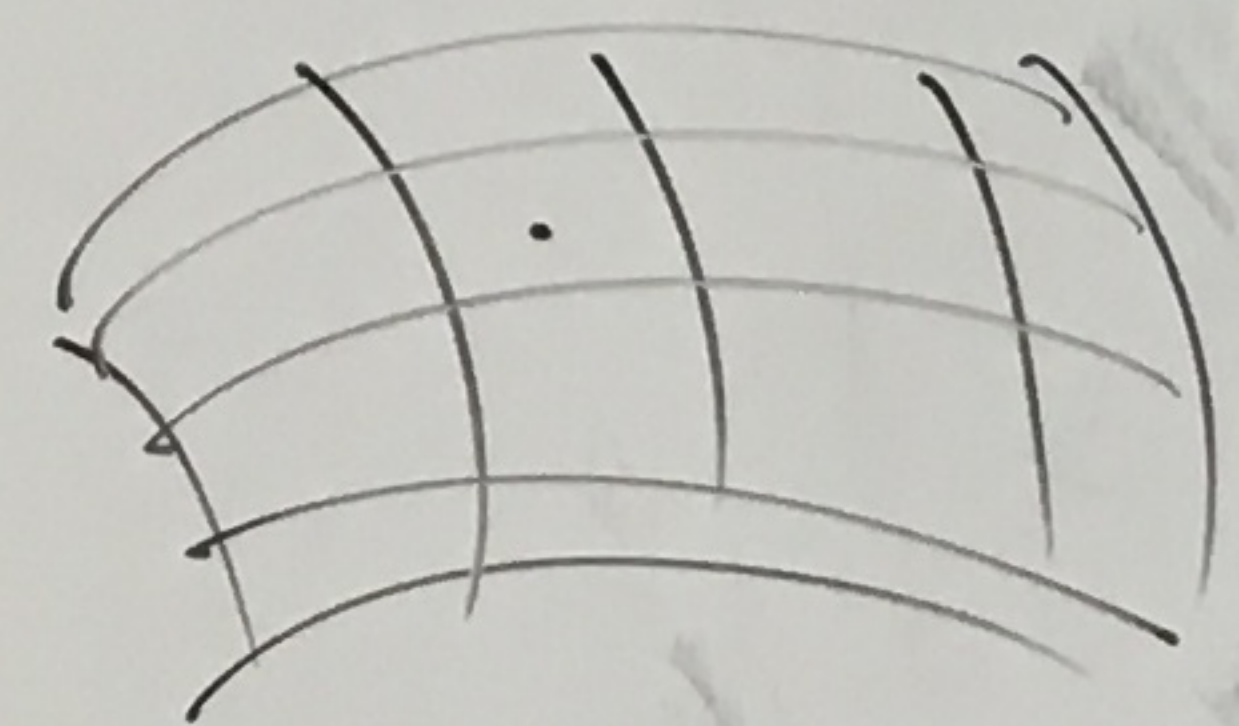
$F(x, y, z) : (x, y, z)$ noktada
 Sıvı hangı yöne doğru
 hareket ediyoruz de
 hareket ettiğini ifade
 ediyor.



Bölge ile dik
 $N(x, y, z)$: Bölge ile dik
 olan (ve dışarıya
 giden)
 birim vektör olsun

Dışarıya giden akış : $F \cdot N$
 ∂V den giden Toplam akış

$$\approx \sum F(\bar{x}_i) \cdot N_{\bar{x}_i} |S_i|$$



∂V : Parçalayalım
 $\partial V = S_1 \cup \dots \cup S_R$
 $\bar{x}_i \in S_i$
 $|S_i|$: S_i 'nin hacim

kiçik
 parçalar

Formula (Limit aldığımız zaman)

$$\int_{\partial V} F \cdot dS = \int_E (F \circ \Phi) \cdot (\Phi_x \times \Phi_y) dx dy$$

Toplam
 giriş / çıkış

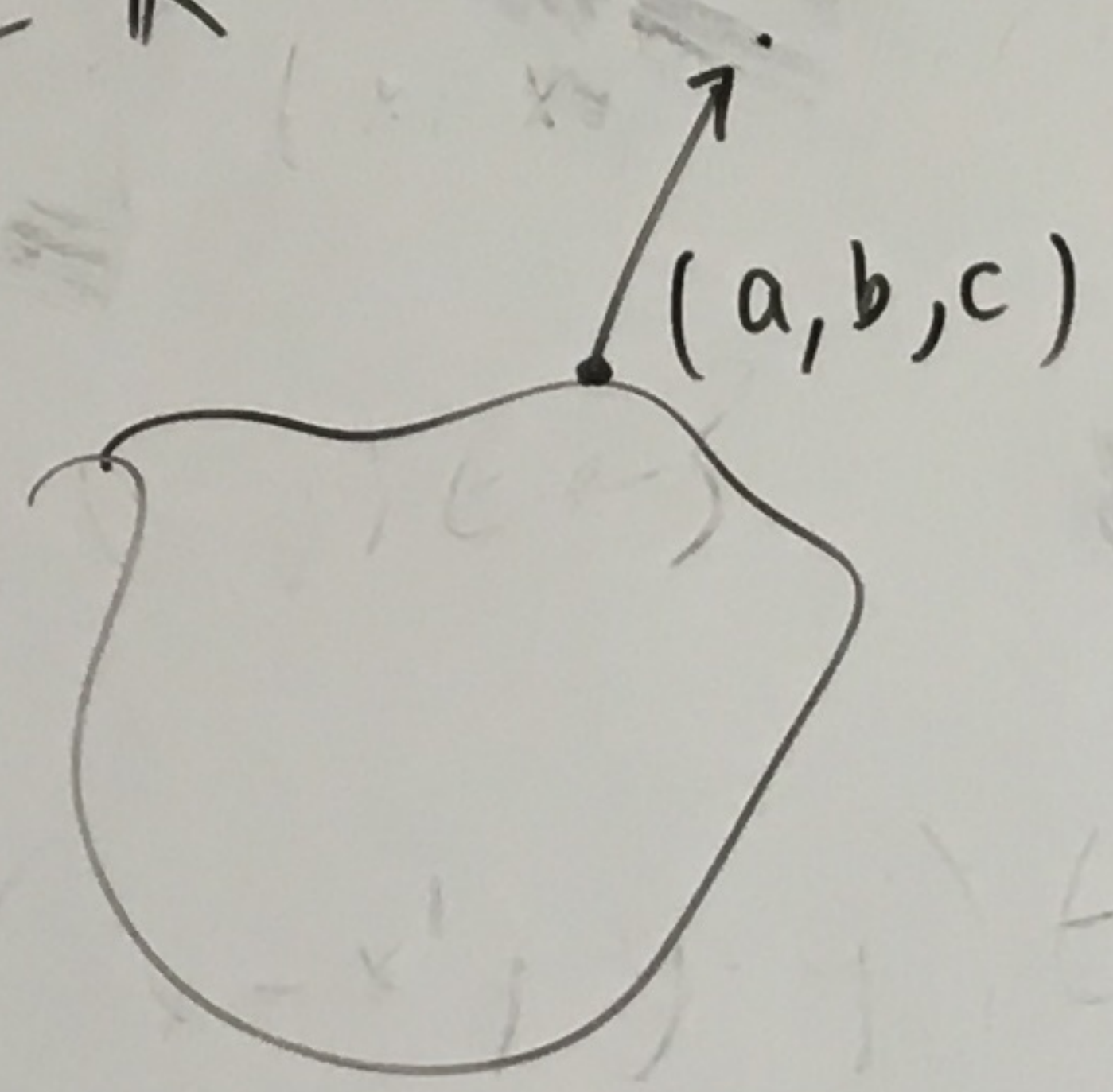
$\partial V \subset \mathbb{R}^3$ yüzey
 $\partial V = \{ \Phi(x, y) : (x, y) \in E \subset \mathbb{R}^2 \}$
 Φ : Parametrizasyon
 +ve Orientasyon

$$\begin{aligned}
 &= \sum F(\bar{x}_i) \cdot N \cdot \frac{|S_i|}{\Phi(\bar{a}_i)} \quad |S_i| \approx |A_i| \text{ Jacobian } \bar{x}_i = \Phi(\bar{a}_i) \\
 &= \sum F(\Phi(\bar{a}_i)) \cdot \frac{(\Phi_x \times \Phi_y)(\bar{a}_i) \cdot \|\Phi_x \times \Phi_y(\bar{a}_i)\|}{\|\Phi_x \times \Phi_y(\bar{a}_i)\|} = \sum F(\Phi(\bar{a}_i)) \cdot (\Phi_x \times \Phi_y)(\bar{a}_i) \\
 &\rightarrow \int_E F(\Phi(\bar{a})) \cdot (\Phi_x \times \Phi_y)(\bar{a}) \, d\bar{x} \, d\bar{y}
 \end{aligned}$$

Not $\Phi: E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\Phi(x, y) = (f(x, y), g(x, y), h(x, y))$$

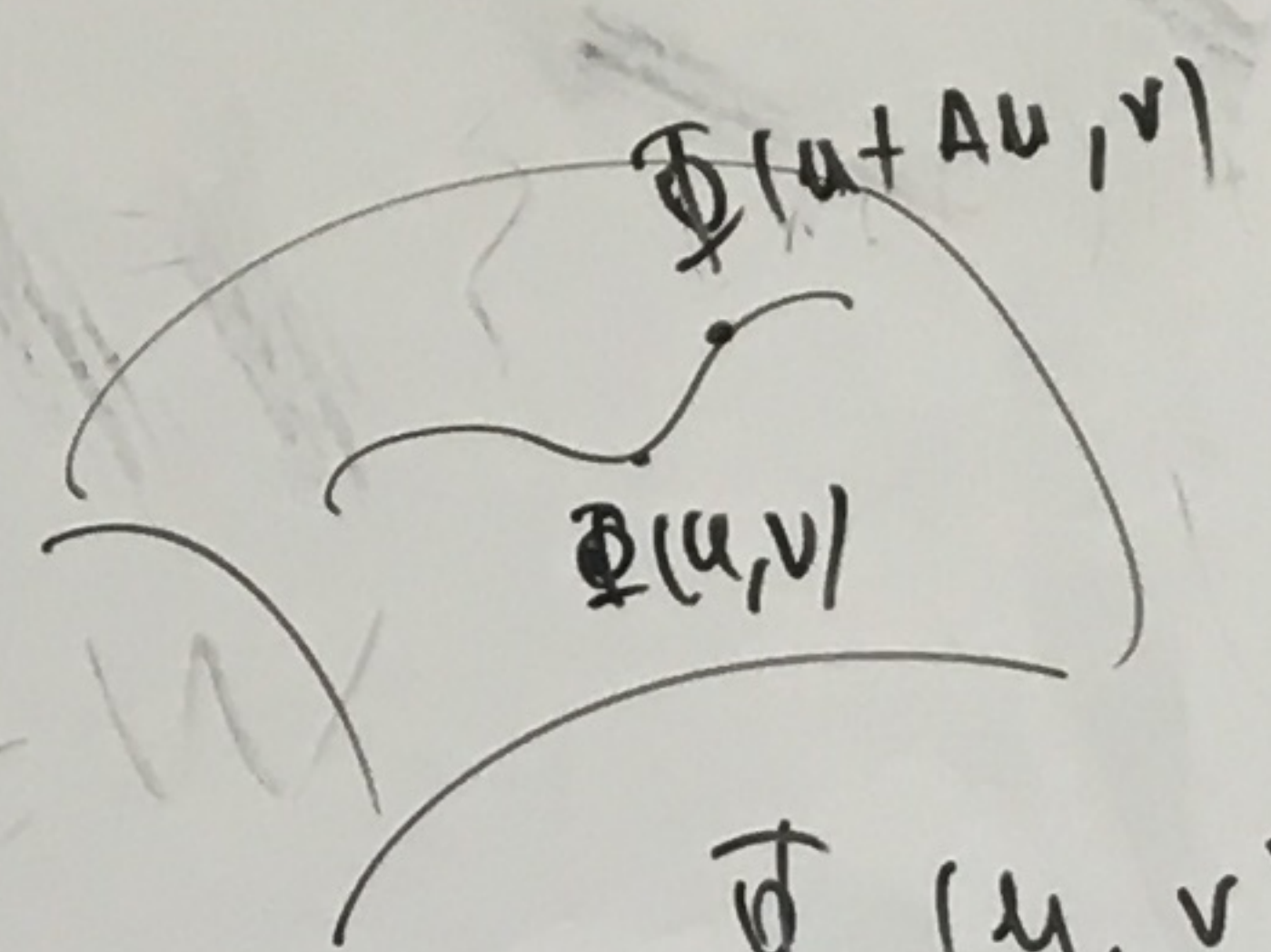
$(a, b, c) = \Phi(u, v)$ olsun.



$$\Phi_x(u, v) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Phi(u + \Delta u, v) - \Phi(u, v)}{\Delta u}$$

$(u + \Delta u, v) \rightarrow \Phi(u + \Delta u, v)$
Yüzey üzerinde bir eğri

$\Phi_x(u, v)$: Bu eğri nin Teğet vektörü. (3)
ve bu yüzeydeki



Teğet düzlem içinde olacak.

$\Phi_y(u, v)$: Başka bir Teğet düzlemdeki vektör. $v/w \in \mathbb{R}$

Eğer $\Phi_x(u, v)$ ve $\Phi_y(u, v)$ paralel değilse, $\Phi_x \times \Phi_y$ Teğet düzlem ile dik olacak.

$$\Phi(x, y) = (f(x, y), g(x, y), h(x, y))$$

$$(a, b, c) = \Phi(u, v) \text{ olsun.}$$

$$\Phi_x(u, v) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Phi(u + \Delta u, v) - \Phi(u, v)}{\Delta u}$$

$$(u + \Delta u, v) \longrightarrow \Phi(u + \Delta u, v)$$

Yüzey
üzerinde
bir
çizgi

$\Phi_y(u, v)$: Başka bir Teget düzlemdeki vektör.

Eğer $\Phi_x(u, v)$ ve $\Phi_y(u, v)$ paralel değilse, $\Phi_x \times \Phi_y$ Teget düzlem ile dik olacak.

$$\frac{\Phi_x \times \Phi_y}{\|\Phi_x \times \Phi_y\|}$$

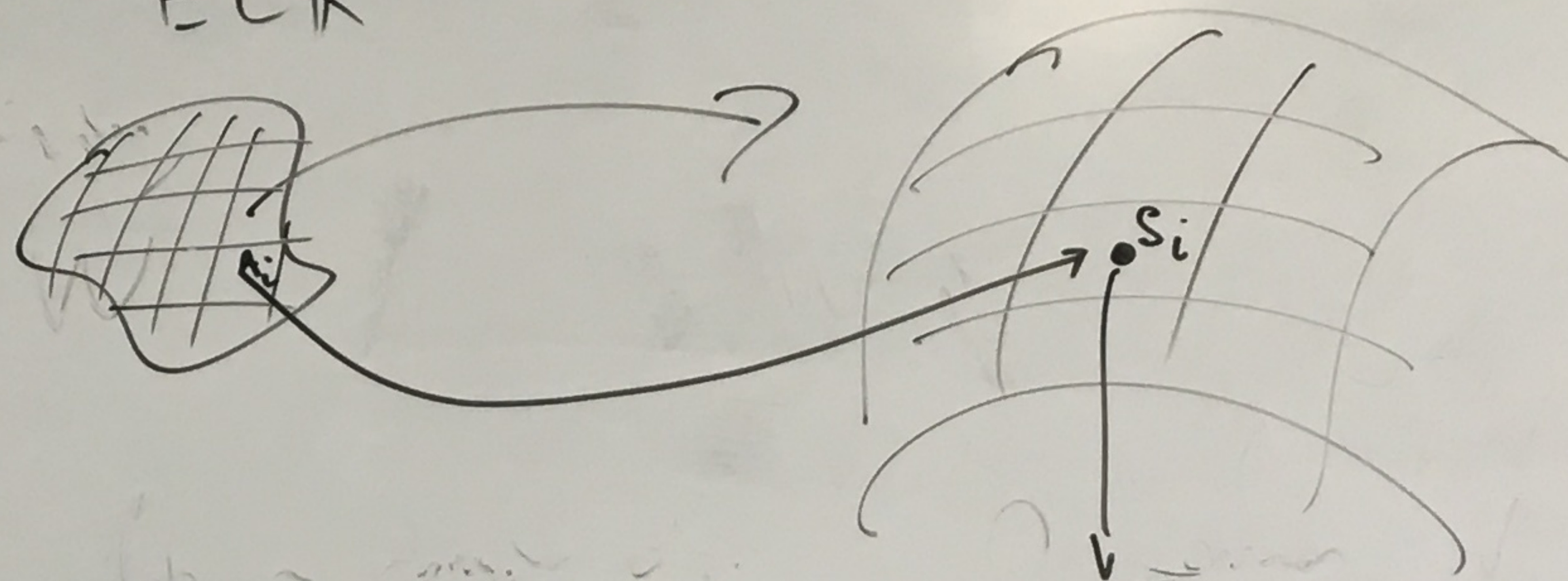
Buim dik vektör.

$$\sum F(\bar{x}_i) \cdot N_{\bar{x}_i} \cdot |S_i|$$

$$= \sum F(\Phi(\bar{a}_i)) \cdot N_{\Phi(\bar{a}_i)} \cdot |S_i|$$

$$= \sum F(\Phi(\bar{a}_i)) \cdot \frac{(\Phi_x \times \Phi_y)(\bar{a}_i)}{\|\Phi_x \times \Phi_y(\bar{a}_i)\|} \cdot |S_i|$$

$$E \subset \mathbb{R}^2$$



$$|S_i| \approx |A_i| \text{ Jacobian } \bar{x}_i = \Phi(\bar{a}_i)$$

$$= |A_i| \|\Phi_x \times \Phi_y\|$$

Flux
Integral
formula.

$$= \sum F(\Phi(\bar{a}_i)) \cdot (\Phi_x \times \Phi_y)(\bar{a}_i) \cdot |A_i| \cdot \|\Phi_x \times \Phi_y(\bar{a}_i)\|$$

$$\longrightarrow \int_E F(\Phi(\bar{a})) \cdot (\Phi_x \times \Phi_y)(\bar{a}) \, d\bar{a}$$

$$\underline{\Phi}_x \times \underline{\Phi}_y = (-\sin \phi) \underline{N}(\theta, \phi)$$

$$\leq 0$$

negatif orientasyon.

2 nokta hariç $\underline{\Phi}_\theta$ ve $\underline{\Phi}_\phi$ paralel değil. Düzgün

Not

$$\int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = (-1) \int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

bu orientasyon ile. negatif orientasyon ile.

Not 2.4.1

- Her parametrisasyon bir orientasyon verir.

Eğer $\frac{\underline{\Phi}_x \times \underline{\Phi}_y}{\|\underline{\Phi}_x \times \underline{\Phi}_y\|}$ dışarıya giderse,

bu orientasyon pozitif dir. (Yoksa -'ye dir).

- Eğer Sonlu noktalar hariç $\underline{\Phi}_x \times \underline{\Phi}_y$ sıfır değilse (i.e $\underline{\Phi}_x$ ve $\underline{\Phi}_y$ paralel değilse) bu Parametrizasyon Düzgün denir.

Bizim parametrisasyonlar hep düzgün olacak.

(5)

Örnek 2.4.2

$$\underline{\Phi}(\theta, \phi) = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi)$$

$$\underline{\Phi}_\theta = (-\sin \phi \sin \theta, \sin \phi \cos \theta, 0)$$

$$\underline{\Phi}_\phi = (\cos \phi \cos \theta, \cos \phi \sin \theta, -\sin \phi)$$

Düzgün mü?

Orientasyon +'ve mi -'ve mi?

Eğer $\frac{\Phi_x \times \Phi_y}{\|\Phi_x \times \Phi_y\|}$ doğruya gidersse,

bu orientasyon pozitif dir. (Yoksa -'ve dir).

- Eğer Sonlu noktalar hariç Φ_x ve Φ_y sıfır değilse (i.e Φ_x ve Φ_y paralel değilse) bu Parametrizasyon Düzgün denir.

$$\Phi_\theta = (-\sin \phi \sin \theta, \sin \phi \cos \theta, 0)$$

$$\Phi_\phi = (\cos \phi \cos \theta, \cos \phi \sin \theta, -\sin \phi)$$

Düzgün mü?

Orientasyon +ve mi -'ve mi?

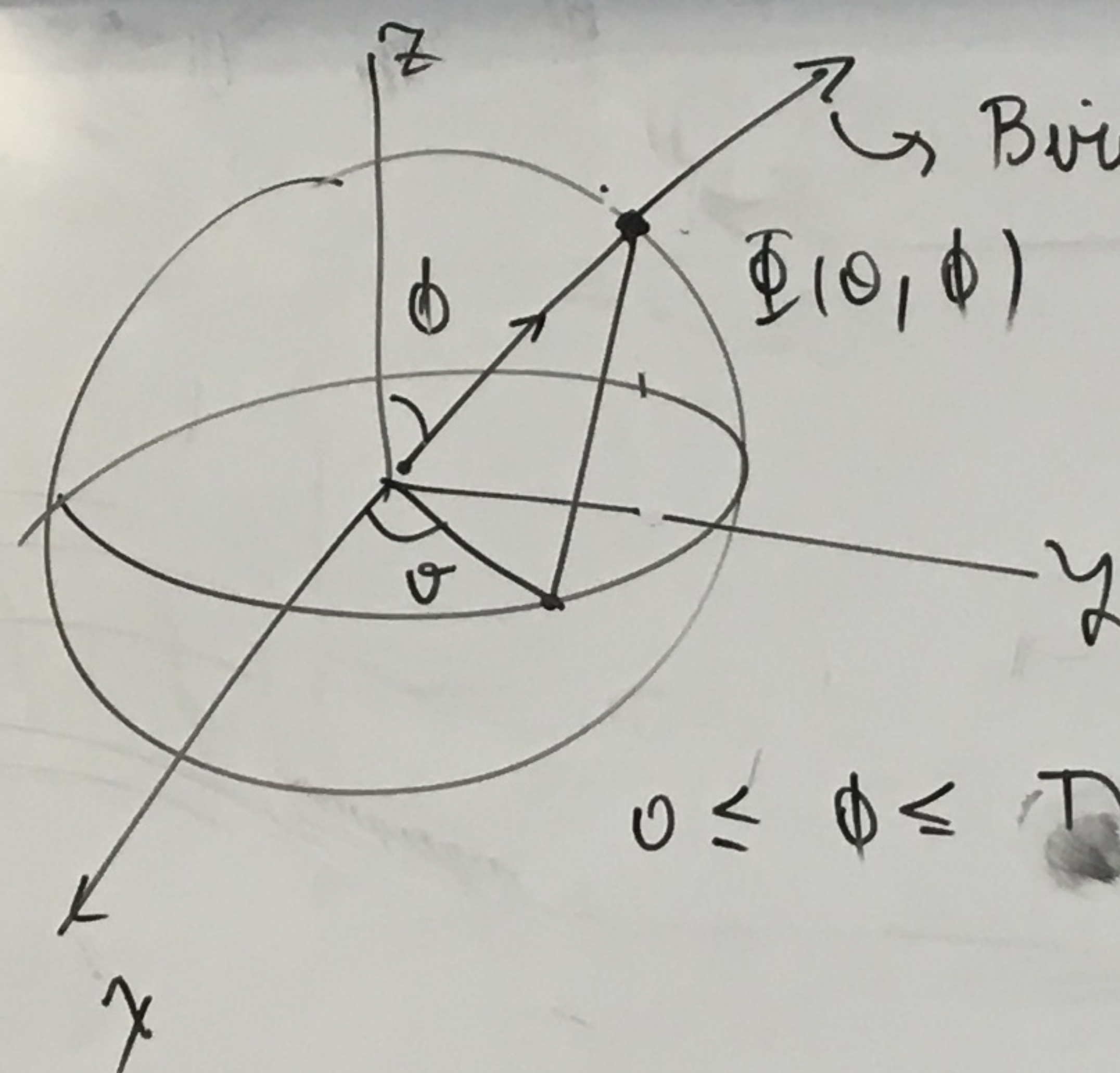
$$\Phi_x \times \Phi_y = (-\sin^2 \phi \cos \theta, -\sin^2 \phi \sin \theta, -\sin \phi \cos \phi)$$

$$\begin{vmatrix} -\sin \phi \sin \theta & \sin \phi \cos \theta & 0 \\ \cos \phi \cos \theta & \cos \phi \sin \theta & -\sin \phi \end{vmatrix}$$

$$\Phi_\theta \times \Phi_\phi = (-\sin \phi) \underbrace{\quad}_{\leq 0} N_{\Phi(\theta, \phi)}$$

Negatif orientasyon.

2 nokta hariç Φ_θ ve Φ_ϕ paralel değil. Düzgün



Not

$$\int_{\partial V} F \cdot dS = (-1) \int_{\partial V} F \cdot dS$$

+ve orientasyon ile

$$\int_{\partial V} F \cdot dS$$

negatif orientasyon ile.

$$\int_{\Gamma} F(\Phi) \cdot (\Phi_x \times \Phi_y) dx dy$$

(6)

$$\begin{aligned}
 0 \leq \theta \leq 2\pi \\
 0 \leq \phi \leq \pi \\
 &= 2\pi \int_0^\pi \sin \phi \, d\phi \\
 &= 4\pi
 \end{aligned}$$

2.4.3 Örnek.

$$F(x, y, z) = (x, y, z)$$

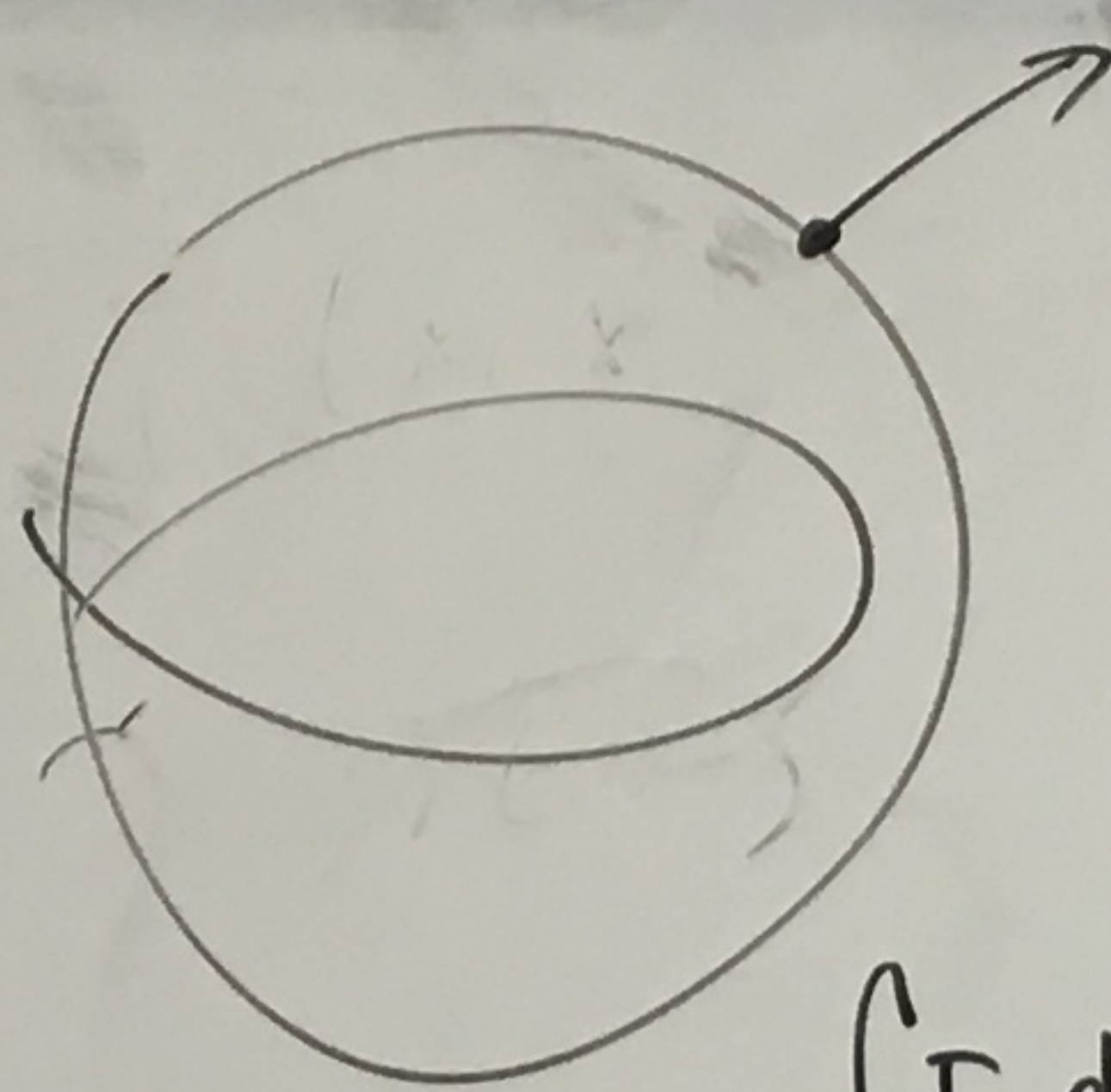
bir vektör alan olsun.

$$V = B_2^3 = \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$$

0 zaman
 ∂V 'e

+ve
 parametrisasyon
 vererek

$F \cdot dS$ hesaplayınız



Aralık

∂V için parametrisasyon.

$$\Phi(\theta, \phi) = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi)$$

(Negatif)

$$\int_{\partial V} F \cdot dS = - \int_E F(\Phi) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right) d\theta d\phi$$

$$F(\Phi(\theta, \phi)) = F(, ,) = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = -\sin \phi (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi)$$

parametrizasyon
vererek

$$\Phi_\theta \times \Phi_\phi = -\sin \phi (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi)$$

$$\Rightarrow \int_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \int_{0 \leq \phi \leq \pi} (-\sin \phi) (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi) \cdot (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi) d\theta d\phi \quad (8)$$

$$= \int_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \int_{0 \leq \phi \leq \pi} \sin^2 \phi d\phi d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^\pi \sin^2 \phi d\phi$$

$$= 4\pi$$

$$(\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi) \} d\theta d\phi \quad (8)$$

2.4.4 örnek

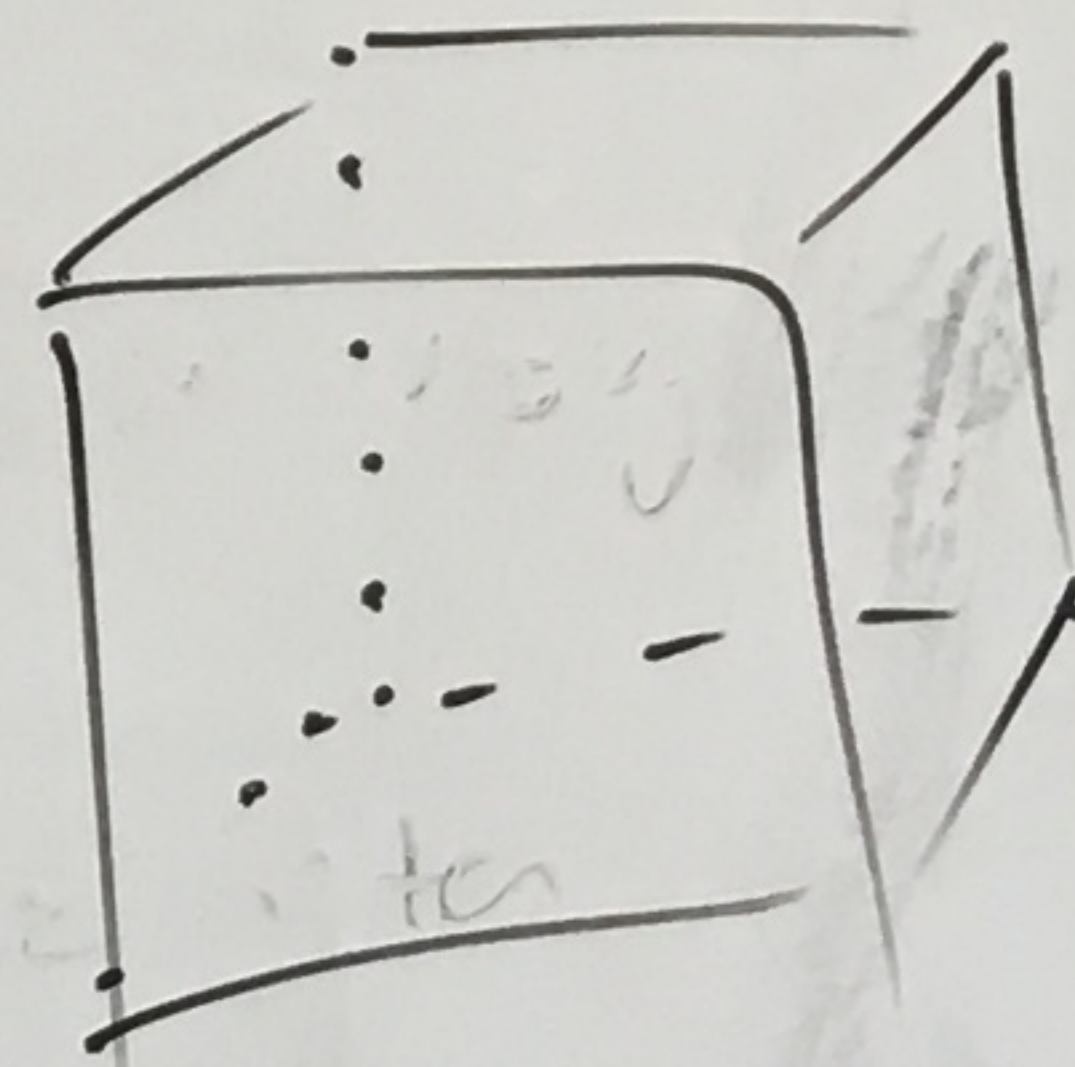
$$F(x, y, z) = (x, y, z)$$

$$\int F \cdot dS$$

$$\partial([-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1])$$

+ve orientasyon S_1

$$\begin{aligned} &= \{ (x, y, 1) : -1 \leq x, y \leq 1 \} \cup \{ (x, y, -1) : -1 \leq x, y \leq 1 \} \\ &\cup \{ (x, 1, z) : -1 \leq x, z \leq 1 \} \cup \{ (x, -1, z) : -1 \leq x, z \leq 1 \} \\ &\cup \{ (1, y, z) : -1 \leq y, z \leq 1 \} \cup \{ (-1, y, z) : -1 \leq y, z \leq 1 \} \end{aligned}$$

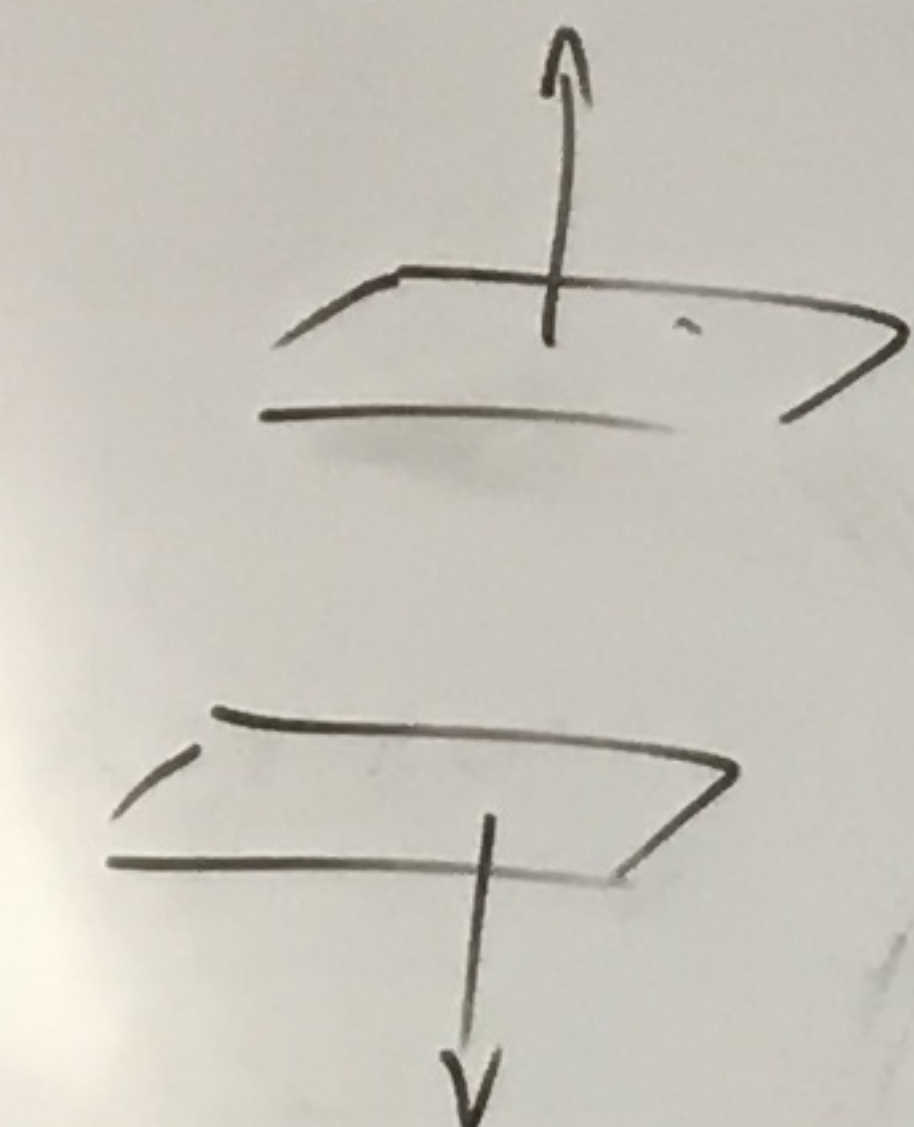


$$\int_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\Phi(x, y) = (x, y, -1)$$

$$\Phi_x \times \Phi_y = (0, 0, 1)$$

-ve orientation

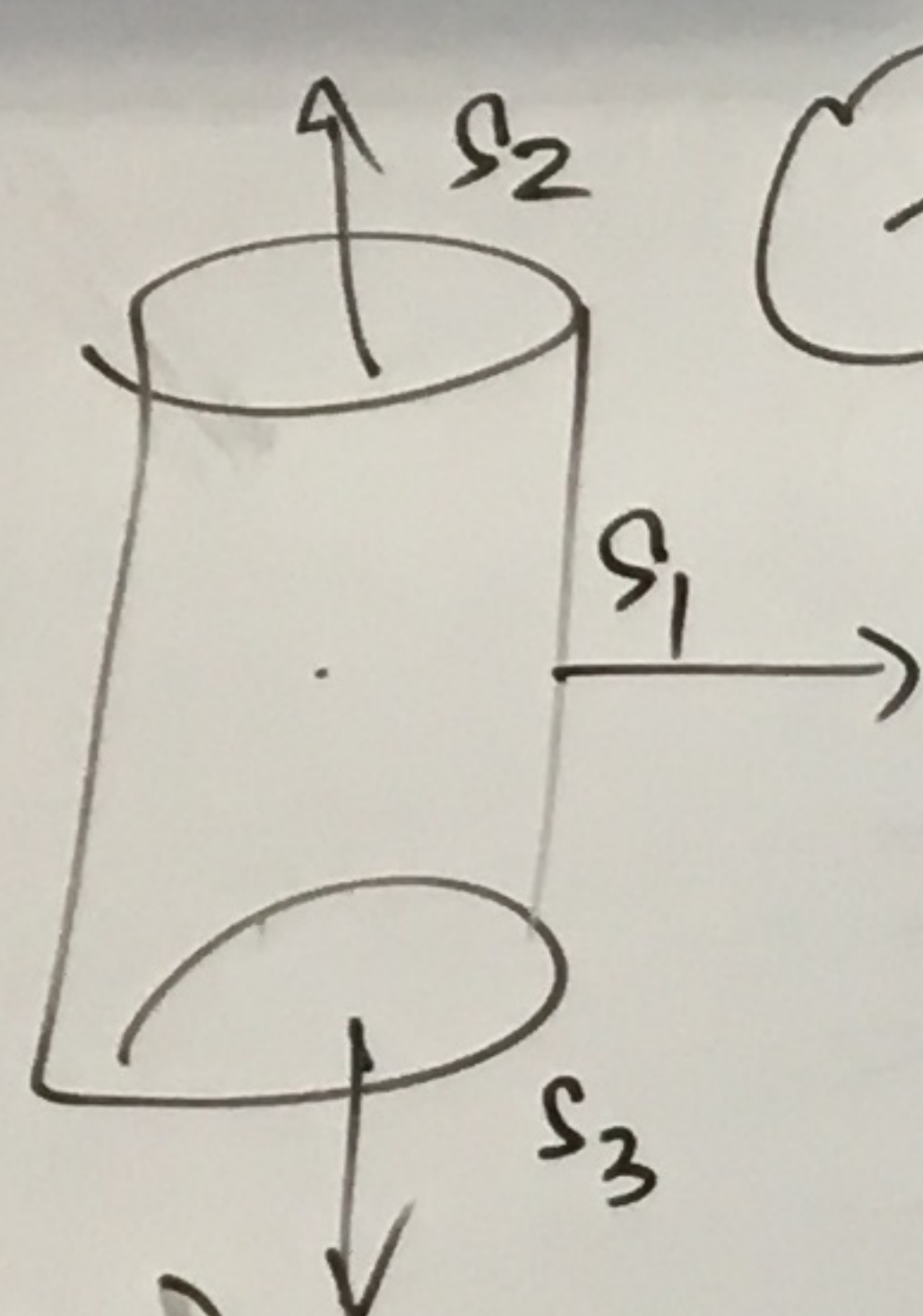


$$= - \int (x, y, -1) \cdot (0, 0, 1) dx dy = 1$$

$$\partial[-1, 1]^3$$

Örnek 2.4.5

$$V = \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ -1 \leq z \leq 1 \end{array} \right\}$$



$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, yz, zx)$$

$$\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

∂V

+ve orientation

$$\Phi(0, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z)$$

$$\Phi_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$$

$$\Phi_\theta \times \Phi_z = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$$

$$S_2: \Phi(x, y) = (x, y, 1)$$

$$\Phi_x \times \Phi_y = (0, 0, 1)$$

+ve orientation

$$S_3: \Phi(x, y) = (x, y, -1)$$

$$\Phi_x \times \Phi_y = (0, 0, -1)$$

-ve orientation

(10)

s_2

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

$$r=0 \quad \theta=0$$

$$\int_{s_2} F \cdot dS = - \int_{x^2+y^2 \leq 1} (xy, -y, -x) \cdot (0, 0, 1) dx dy = \int_{x^2+y^2 \leq 1} x dx dy = 0.$$

$$\int_{\partial V} F \cdot dS = \int_{s_1} + \int_{s_2} + \int_{s_3}$$

$$= \pi + 0 + 0$$

$$= \pi.$$

Green
Stokes
Gauss

Çok Boyut

Calculus'un
Temel
Teoremi

$$F' = f \quad \text{! Boyut}$$

$$\frac{1}{a} \rightarrow \frac{1}{b}$$

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) = \int_{\partial[a,b]} F$$

Fonksiyon sınır üzerinde
İntegre etmek

Türev'e bölge üzerinde
İntegre etmek.

$$F(x, y, z) = (xy, yz, zx)$$

$$\int_{\partial V} F \cdot ds$$

the orientation

$$S_3: \Phi(x, y) = (x, y, -1)$$

$$\Phi_x \times \Phi_y = (0, 0, 1) \quad \text{--ve orientation}$$

$$\int_{S_1} F \cdot ds = \int_{[-1,1] \times [-1,1]} F(\Phi(x, y)) \cdot (\Phi_x \times \Phi_y) dx dy = \int_{[-1,1] \times [-1,1]} (x, y, 1) \cdot (0, 0, 1) dx dy = 1$$

the orientation

$$\Phi(x, y) = (x, y, 1)$$

$$\Phi_x \times \Phi_y = (1, 0, 0) \times (0, 1, 0)$$

$$= (0, 0, 1) \quad \text{Disarunya}$$

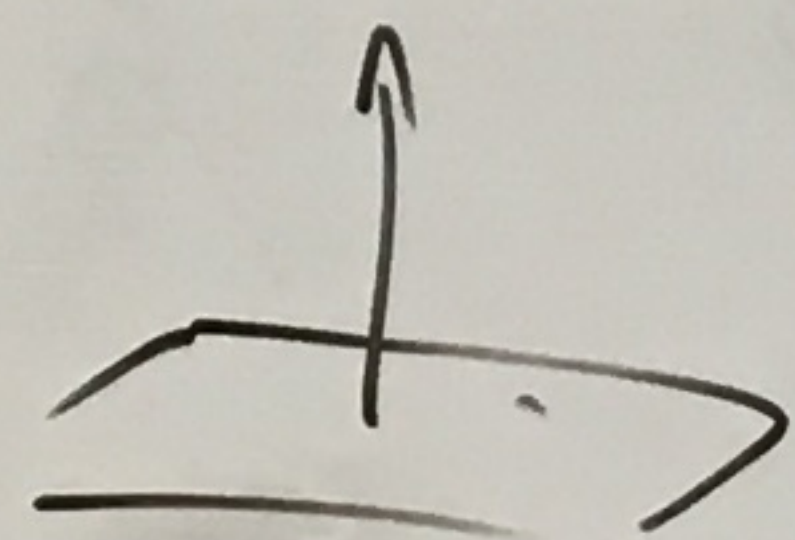
the orientation

gidiyor

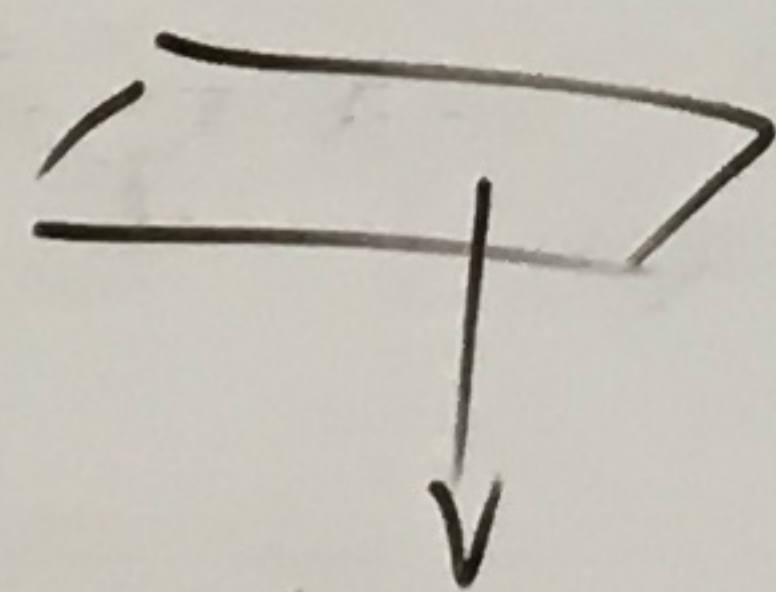
$$\Phi(x, y) = (x, y, -1)$$

$$\Phi_x \times \Phi_y = (0, 0, 1)$$

--ve orientation



$$= - \int (x, y, -1) \cdot (0, 0, 1) dx dy = 1$$



Benzar Şeklinde

$$\int_{S_2} = \int_{S_4} = \int_{S_5} = \int_{S_6} = 1$$

Sonuç, $\int_{\partial[-1,1]^3} F \cdot ds = 6$

Gauss

Türer'e bölge üzerindeki
İntegre etmek.

$$\int_{S_1} F \cdot dS = \int_{\substack{0 \leq \theta \leq 2\pi \\ -1 \leq z \leq 1}} (\cos \theta \sin \theta, z \sin \theta, z \cos \theta) \cdot (\cos \theta, \sin \theta, 0) dz d\theta = \int_{\substack{0 \leq \theta \leq 2\pi \\ -1 \leq z \leq 1}} (z \cos^2 \theta \sin \theta) d\theta dz \quad (11)$$

$$F(\cos \theta, \sin \theta, z) = (\cos \theta \sin \theta, z \sin \theta, z \cos \theta)$$

$$\int_{S_2} F \cdot dS = \int_{x^2+y^2 \leq 1} (xy, y, x) \cdot (0, 0, 1) dx dy = \int_{x^2+y^2 \leq 1} x dx dy = \int_{r=0}^1 \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos \theta \cdot r dr d\theta = 0$$

$$\int_{S_3} F \cdot dS = - \int_{x^2+y^2 \leq 1} (xy, -y, -x) \cdot (0, 0, 1) dx dy = \int_{x^2+y^2 \leq 1} x dx dy = 0$$