

$$\left(\begin{array}{l} E_1 \cup E_2 + \text{ise, } R_i \cap E_1 \neq \emptyset \text{ veya} \\ \overline{E_1} \cup \overline{E_2} \\ R_i \cap \overline{E_2} \neq \emptyset \end{array} \right)$$

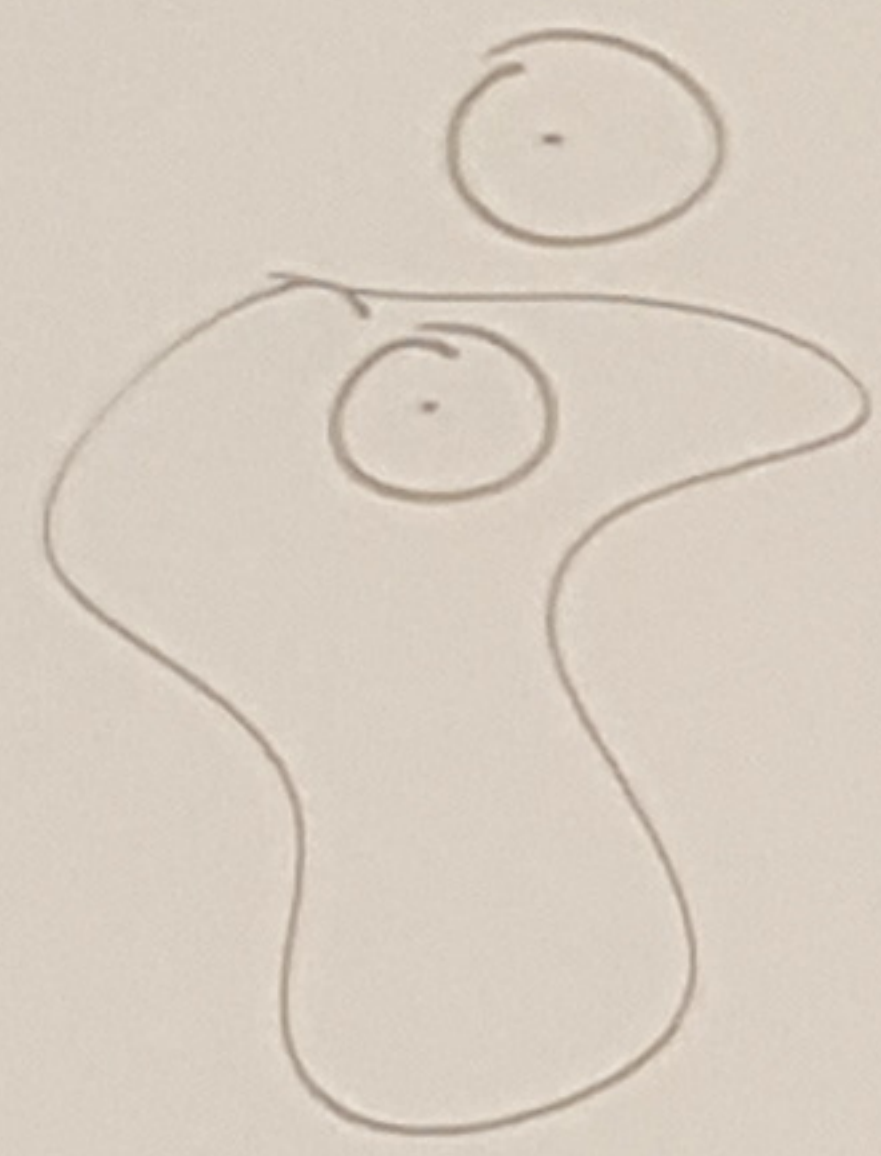
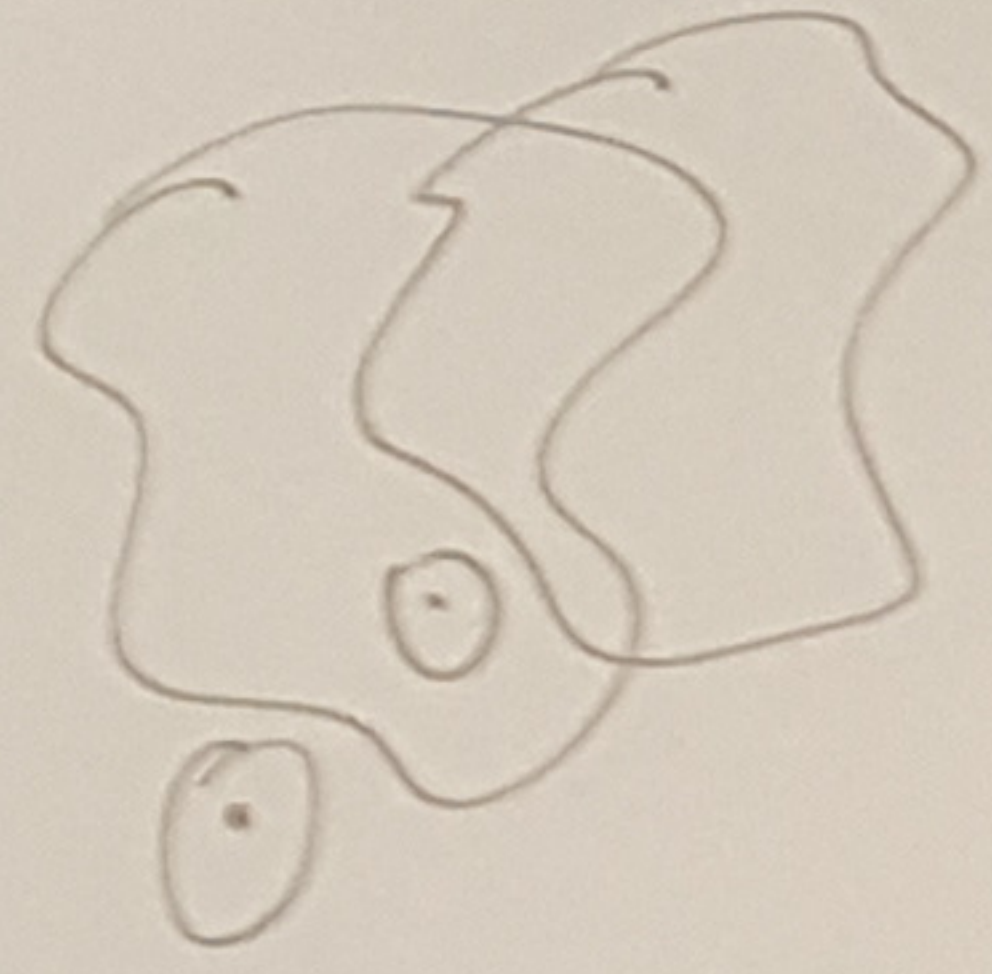
İstediğimiz kadar küçük seçebiliriz.
 $\Rightarrow \text{Vol}(E_1 \cup E_2) = 0$

Teorem (Bahadır) 1.19

$$E \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n$$

$\hookrightarrow$ Dik Dörtgen.

E bir Jordan bölge ancak ve ancak $\text{Vol}(\partial E) = 0$.



Teorem 1.20

$E_1, E_2 \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n$ iki Jordan Bölge olsun. O zaman,

- $E_1 \cup E_2$ bir Jordan bölgesidir ve $\text{Vol}(E_1 \cup E_2) \leq \text{Vol}(E_1) + \text{Vol}(E_2)$
- $E_1 \cap E_2$ bir Jordan Bölgesidir.

İspat

$$\partial(E_1 \cup E_2) \subset \partial(E_1) \cup \partial(E_2)$$

Şahap: $x \notin \partial(E_1) \cup \partial(E_2)$ olsun.

$$x \notin \partial(E_1) \Rightarrow \exists \epsilon > 0 \mid B(x, \epsilon) \subset E_1^o \text{ veya } B(x, \epsilon) \subset (E_1^c)^o$$

$$x \notin \partial(E_2) \Rightarrow \exists \epsilon > 0 \mid B(x, \epsilon) \subset E_2^o \text{ veya } B(x, \epsilon) \subset (E_2^c)^o$$

$$a) B(x, \epsilon) \subset E_1^o \subset (E_1 \cup E_2)^o \Rightarrow x \notin \partial(E_1 \cup E_2)$$

$$b) B(x, \epsilon) \subset E_2^o \Rightarrow x \notin \partial(E_1 \cup E_2)$$

$$c) B(x, \epsilon) \subset (E_1^c)^o \cap (E_2^c)^o \subset (E_1^c \cap E_2^c)^o = (E_1 \cup E_2)^c \Rightarrow x \notin \partial(E_1 \cup E_2)$$

a) $E_1 \cup E_2$ bir Jordan bölgesidir
 ve $\text{Vol}(E_1 \cup E_2) \leq \text{Vol}(E_1) + \text{Vol}(E_2)$
 b) $E_1 \cap E_2$ bir Jordan Bölgedir.

b) $B(x, \epsilon) \subset E_2^0 \Rightarrow x \notin \partial(E_1 \cup E_2)$
 c) $B(x, \epsilon) \subset (E_1^c)^0 \cap (E_2^c)^0 \subset (E_1^c \cap E_2^c)^0 = (E_1 \cup E_2)^c)^0$
 $\Rightarrow x \notin \partial(E_1 \cup E_2)$.

İddia $E_1, E_2 \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n$

($\hookrightarrow$ İki bölge Jordan ölçülebilir)

$\mathcal{G}$: Bir Ağı, $\mathbb{R}$ üzerinde.

Ölçüsel,

$$V(E_1 \cup E_2; \mathcal{G}) \leq V(E_1; \mathcal{G}) + V(E_2; \mathcal{G}) \quad (*)$$

Sebebi $\mathcal{G} = \{R_1, \dots, R_p\}$

$$V(E_1 \cup E_2; \mathcal{G}) = \sum_{R_i \cap \overline{E_1 \cup E_2} \neq \emptyset} |R_i| \leq \sum_{R_i \cap \overline{E_1} \neq \emptyset} |R_i| + \sum_{R_i \cap \overline{E_2} \neq \emptyset} |R_i|$$

($R_i \cap \overline{E_1 \cup E_2} \neq \emptyset$ ise, $R_i \cap \overline{E_1} \neq \emptyset$ veya $R_i \cap \overline{E_2} \neq \emptyset$)

$$= V(E_1; \mathcal{G}) + V(E_2; \mathcal{G}). \quad (2)$$

İddia $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$ sıfır hacimli ise,

$E_1 \cup E_2$ sıfır hacimli dir. (**)

Sebebi $V(E_1; \mathcal{G}) < \frac{\epsilon}{2}$ ve $V(E_2; \mathcal{G}) < \frac{\epsilon}{2}$

sağlayan bir ağ $\mathcal{G}$ seçelim.

$$(*) \Rightarrow V(E_1 \cup E_2; \mathcal{G}) \leq V(E_1; \mathcal{G}) + V(E_2; \mathcal{G}) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

ϵ istediğimiz kadar ϵ küçük seçebiliriz.

$$\Rightarrow \text{Vol}(E_1 \cup E_2) = 0$$

$$\partial(R \setminus E) = \partial(R) \cup \partial(E) \quad (++)$$

R, E Jordan bölgeleri olduğu için,

$$\text{vol}(\partial R) = \text{vol}(\partial E) = 0$$

$$\Rightarrow (++) \text{ den dolayı } \text{vol}(\partial(R \setminus E)) = 0$$

Thm 1.20a): $R \setminus E_1 \cup R \setminus E_2$ Jordan.

$$(+++) : R \setminus [E_1 \cup E_2] \text{ Jordan}$$

E_1, E_2 : İki Jordan Bölgesi olsun.

$$\partial(E_1 \cup E_2) \subset \partial(E_1) \cup \partial(E_2).$$

$(++) \Rightarrow \partial(E_1) \cup \partial(E_2)$ $\mathbb{R}^n$ için
hacimlidir.

$$\partial(E_1 \cup E_2) \subset \partial(E_1) \cup \partial(E_2)$$

olduğu için, her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$V(\partial(E_1 \cup E_2); \alpha) \leq V(\underbrace{\partial(E_1) \cup \partial(E_2)}; \alpha)$$

$\hookrightarrow$ İstediğimiz
kadar büyük
yapabiliriz.

$$\overline{\text{vol}}(\partial(E_1 \cup E_2)) \leq \overline{\text{vol}}(\partial E_1 \cup \partial E_2) = 0. \quad (3)$$

sonuç $E_1 \cup E_2$ bir Jordan Bölgesidir.

$(+)$ den dolayı

$$\overline{\text{vol}}(E_1 \cup E_2) \leq \overline{\text{vol}}(E_1) + \overline{\text{vol}}(E_2).$$

$$\parallel \parallel \parallel$$

$$\text{vol}(E_1 \cup E_2) \leq \text{vol}(E_1) + \text{vol}(E_2)$$

çünkü $E_1, E_2, E_1 \cup E_2$ Jordan
Bölgeleridir.

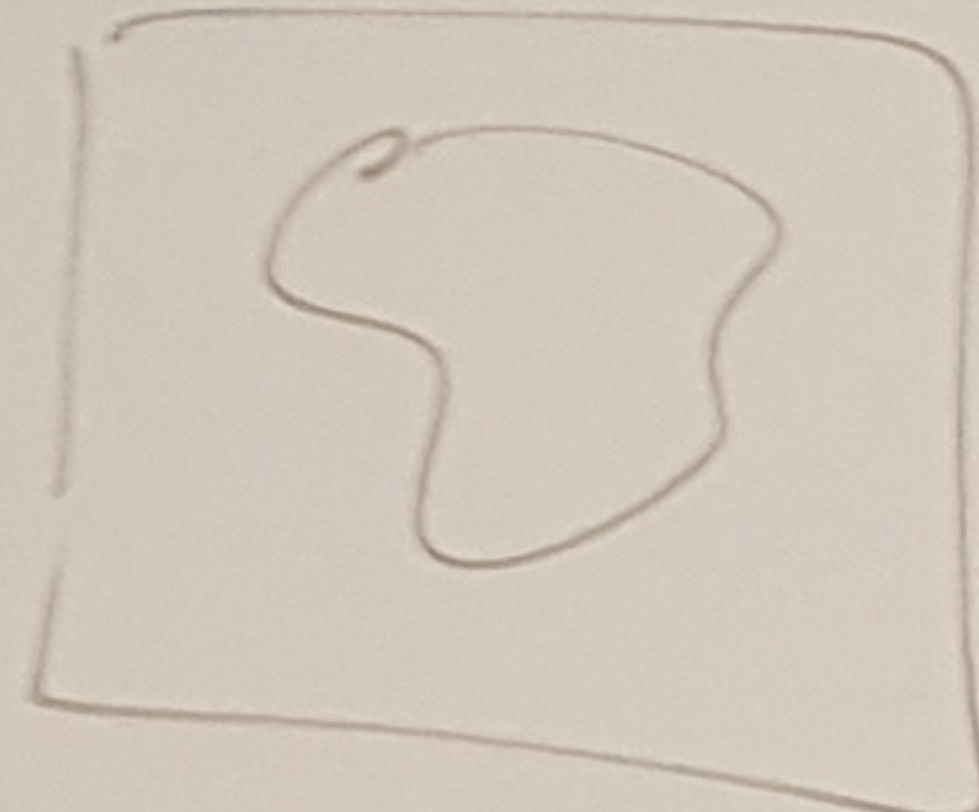
→ İstedigimiz
kadar büyük
yapabiliriz.

Çünkü $E_1, E_2, E_1 \cup E_2$ Jordan
Bölge lerdir.

1.20 b) $E_1 \cap E_2$ bir Jordan
bölge dir.

→ $R \setminus E$ bir Jordan Bölge dir. (Thm 1.19). (4)

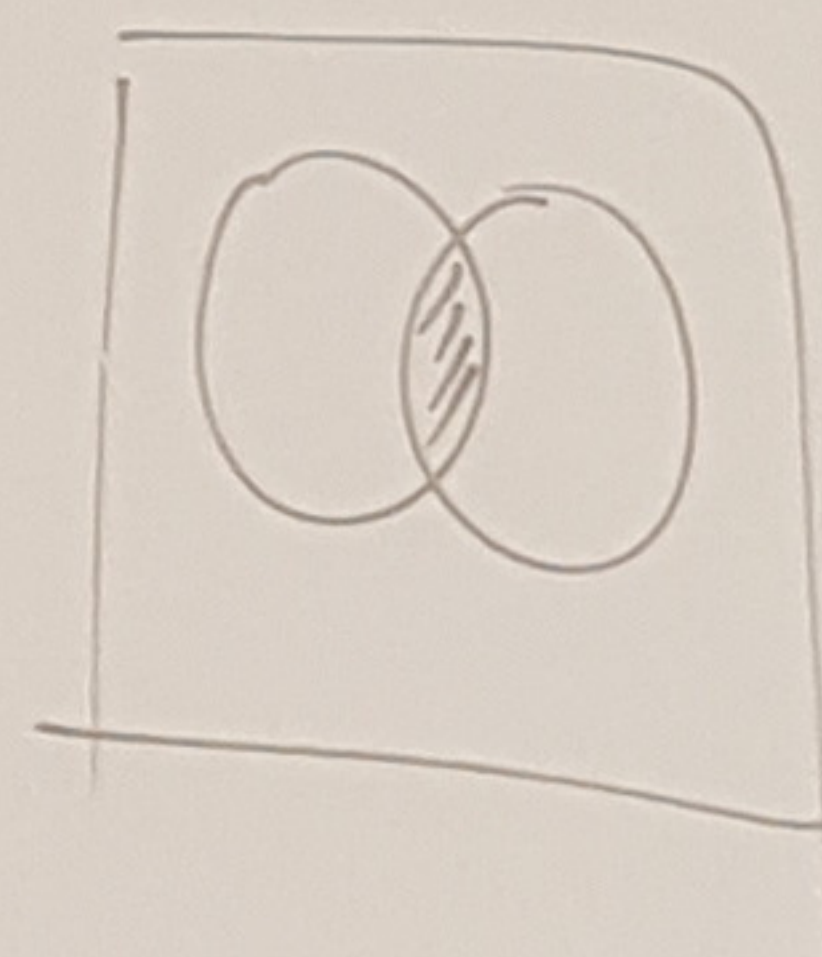
İçerik $E \subset R \subset \mathbb{R}^n$ o zaman
→ Jordan
Bölge



$$E \cap E_2 = R \setminus \left(R \setminus E_1 \cup R \setminus E_2 \right)$$

$$\hookrightarrow R \setminus (E \cap E_2) = R \setminus E_1 \cup R \setminus E_2$$

$R \setminus E$ bir Jordan Bölge dir



Sehup $\partial(R \setminus E) = \partial(R) \cup \partial(E)$ (***)

R, E Jordan bölge ler oldu ğ u için,

$$\text{vol}(\partial R) = \text{vol}(\partial E) = 0$$

$$\Rightarrow (**)'den dolayı $\text{vol}(\partial(R \setminus E)) = 0$$$

(***): $R \setminus E_1$ ve $R \setminus E_2$ Jordan

Thm 1.20 a): $R \setminus E_1 \cup R \setminus E_2$ Jordan.

(***): $R \setminus [R \setminus E_1 \cup R \setminus E_2]$ Jordan.

$V(E; \ell) < \epsilon$ sağlayan bir
ağ var.

$R_i \subset S_i$ $1 \leq i \leq q$ S_i 'nin kenarları rasyonel.
ve $\sum_{i=1}^q |S_i| < 2\epsilon$ sağlansın.

Teorem $= \epsilon \subseteq \mathbb{R}^n$

(1.1.14)

ϵ 'nin sıfır hacimli olması

icin gerek ve yeter şart

aynı hacimde

$$\bar{\epsilon} \subset \bigcup_{i=1}^p Q_i$$

$$\text{ve } \sum_{i=1}^p |Q_i| < \epsilon$$

sağlayan küplerin ailesi

$\{Q_1, \dots, Q_p\}$ bulunmalıdır.

İspat (yeterli)

$\epsilon > 0$ olsun.

$$\bar{\epsilon} \subset \bigcup_{i \in [p]} Q_i$$

$$\sum_{i \in [p]} |Q_i| < \epsilon$$

Sağlayan küplerin ailesi olsun.

ℓ : Herhangi bir ağ $(\bar{\epsilon} \subset \bigcup_{i=1}^p Q_i \subset \mathbb{R}^n)$

$$Vol(\bar{\epsilon}; \ell) \leq Vol\left(\bigcup_{i=1}^p Q_i; \ell\right)$$

Infimum alarak,

$$\overline{Vol}(\bar{\epsilon}) \leq \overline{Vol}\left(\bigcup_{i=1}^p Q_i\right)$$

(5)

$$\Rightarrow \overline{Vol}(\bar{\epsilon}) \leq \overline{Vol}\left(\bigcup_{i=1}^p Q_i\right)$$

$$\leq \sum_{i=1}^p \overline{Vol}(Q_i)$$

$$= \sum_{i=1}^p Vol(Q_i)$$

$$= \sum_{i=1}^p |Q_i|$$

$$< \epsilon.$$

Q_i : Jordan
Bölge

$i=1$
Sağlayan küplerin ailesi
 $\{Q_1, \dots, Q_p\}$ bulunmaktadır.

$$\text{Infimum alarak,}$$

$$\text{Vol}(\bar{E}) \leq \text{Vol}\left(\bigcup_{i=1}^p Q_i\right)$$

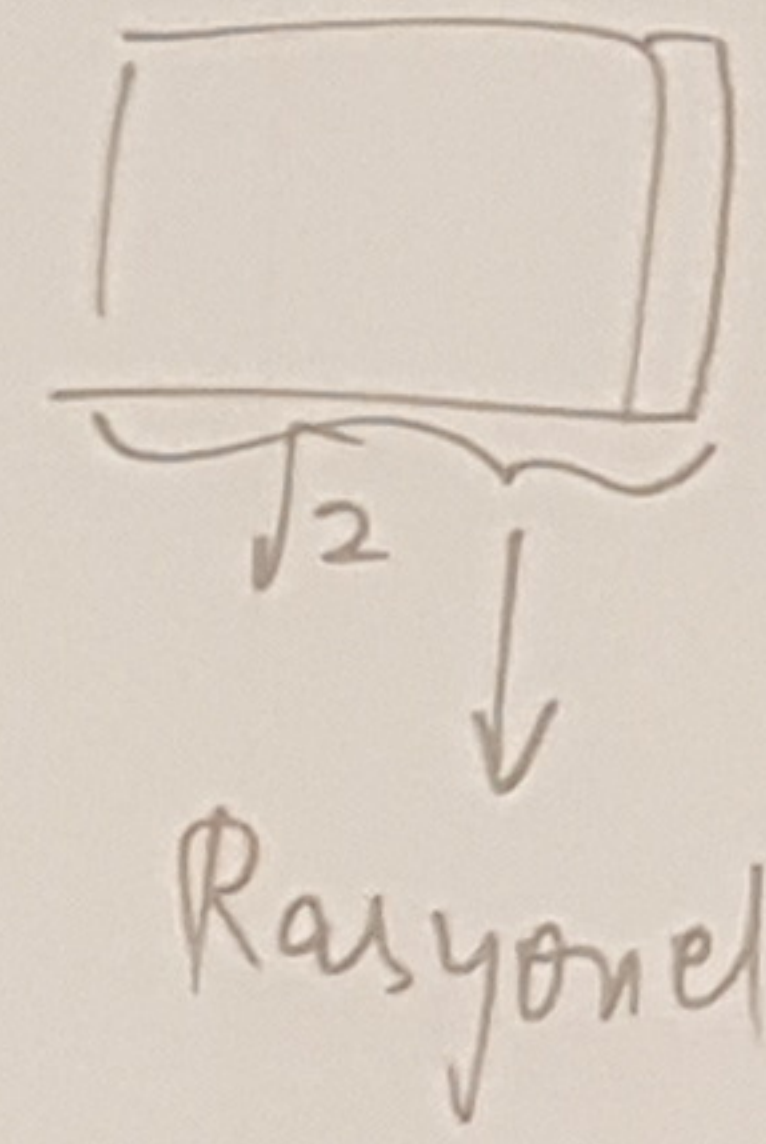
$$\sum_{i=1}^p |Q_i| < \epsilon.$$

Her $\epsilon > 0$ için, $\text{Vol}(\bar{E}) < \epsilon$.

$$\Rightarrow \text{Vol}(\bar{E}) = 0.$$

$\Rightarrow \bar{E}$ bir sıfır hacimli Jordan
Bölgedir.

$\Rightarrow E$ bir sıfır hacimli Jordan
Bölgedir.



(Gereklik). $E \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n$

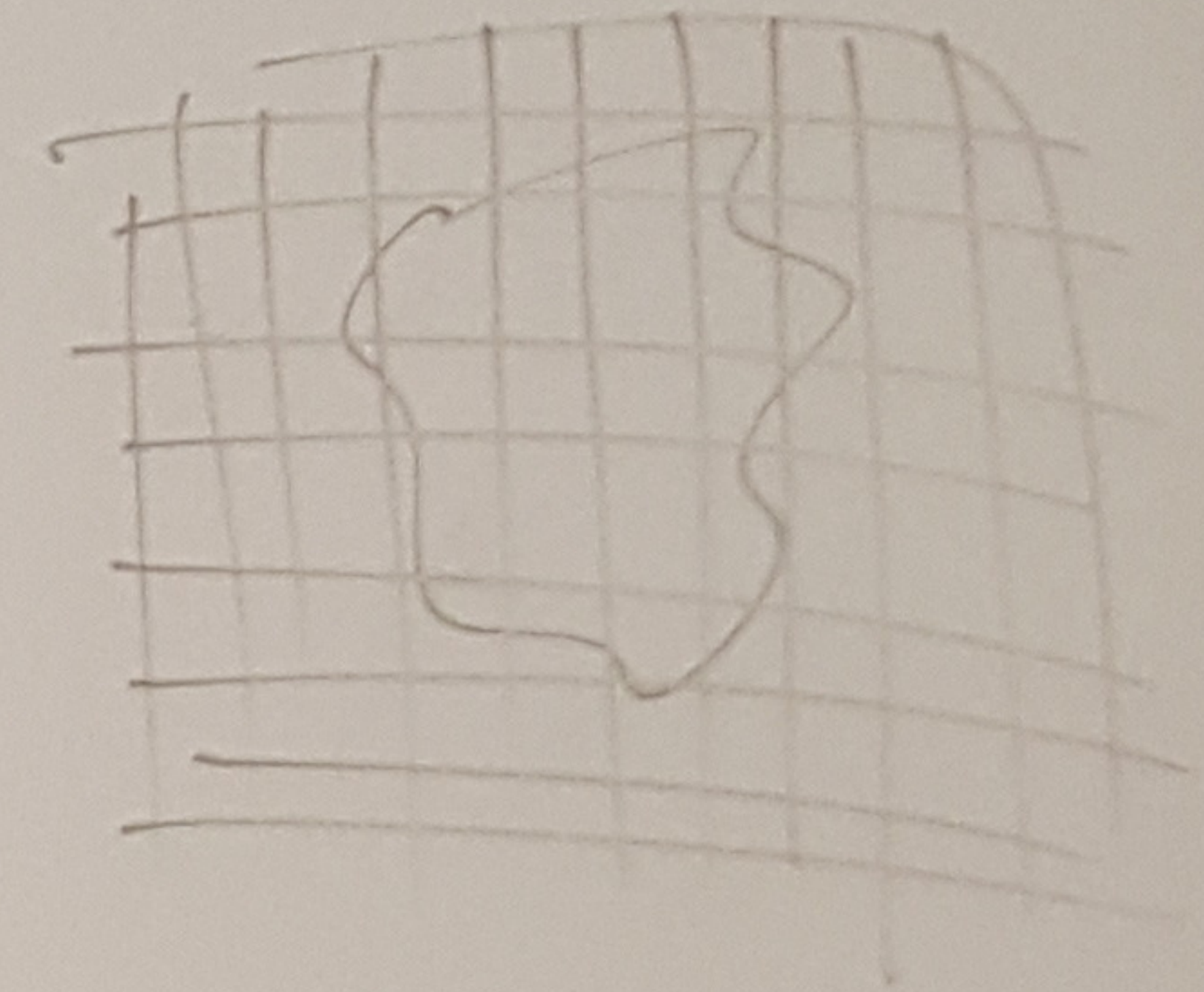
Sıfır hacimli olduğun için

$V(E; \epsilon) < \epsilon$ sağlayan bir
ağ var.

ϵ 'nin $\bar{E}$ ile kesişim boş olmayan
dik-dörtgenler $\{R_1, \dots, R_q\}$.

$$\text{Not } \sum_{i=1}^q |R_i| < \epsilon$$

$$\text{ve } \bar{E} \subset \bigcup_{i=1}^q R_i$$



$R_1, \dots, R_q$: Biraz büyüklük kenarları
rasyonel sayı olan dik-dörtgenler
oluşturalım.

$$R_i \subset S_i \quad 1 \leq i \leq q \quad S_i \text{'nin kenarları rasyonel.}$$

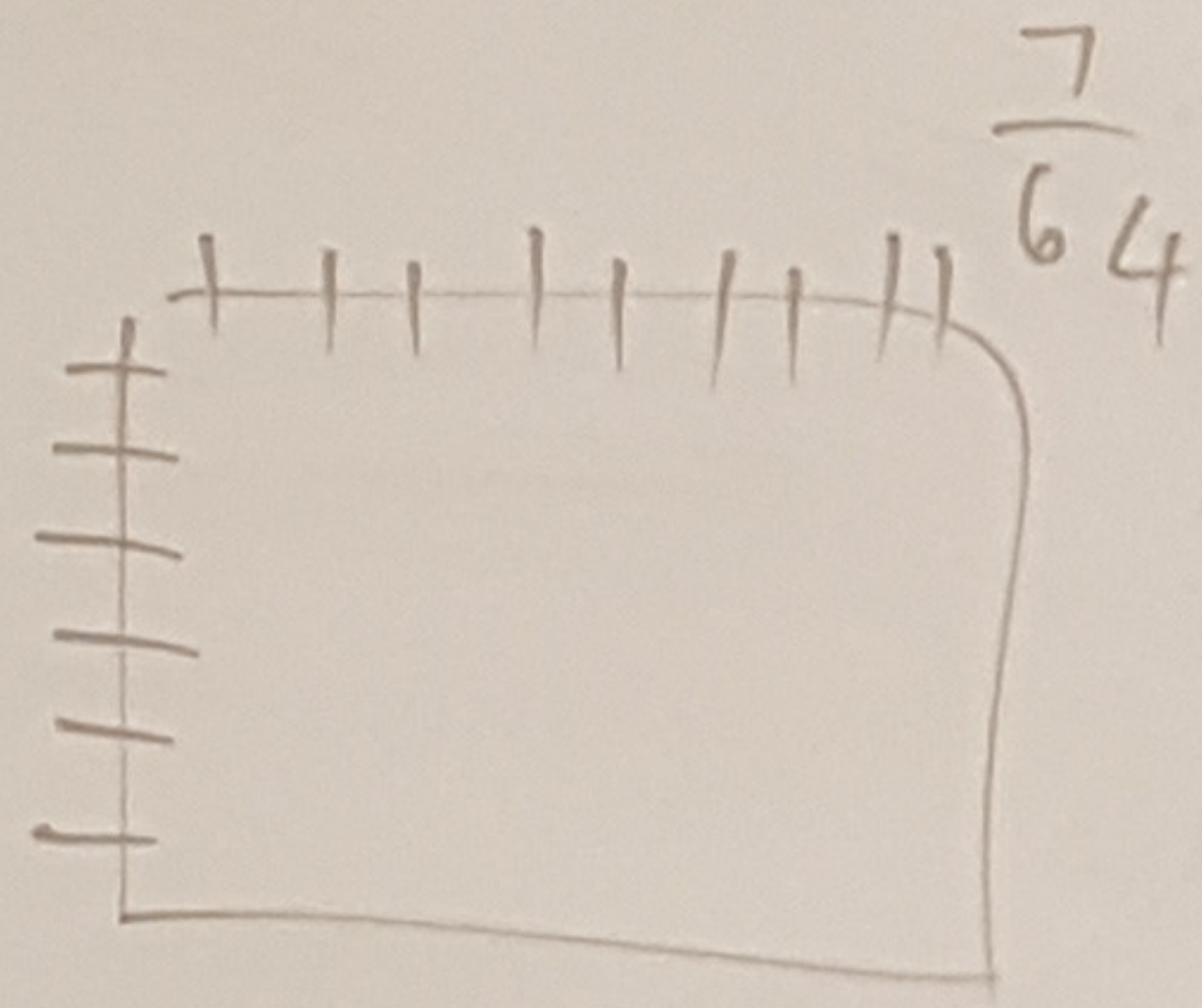
$$\text{ve } \sum_{i=1}^q |S_i| < 2\epsilon \text{ sağlansın.}$$

üzzerinde hiç bir noktada '0'
olmasın. 0 zaman
 $\phi(E)$ bir
Pordan Bölgedir.

Teorem 1.22 Geçerli.

Öyle bir N seçelim ki
her S_i 'nin her kenarı $\frac{b}{N}$ $\in \mathbb{N}$
şeklinde yazılabilir.

Her S_i 'nin her kenarı $\frac{1}{N}$ uzunluk
olan aralıklarla bölünür.
 $S_i = \bigcup_{k=1}^{N_i(k)} S_{i,k}$
 $\rightarrow \frac{1}{N}$ kenar olan
küpler.



$$\bar{E} \subset \bigcup_{i=1}^q R_i \subset \bigcup_{i=1}^q S_i \quad (7)$$

$$= \bigcup_{i=1}^q \bigcup_{k=1}^{N_i(k)} S_{i,k}$$

$$\left\{ R_i \right\}_{i=1}^q = \left\{ S_{i,k} : \begin{matrix} i=1 & k=1 \\ 1 \leq i \leq q & 1 \leq k \leq N_i \end{matrix} \right\}$$

$$(*) \quad \bar{E} \subset \bigcup_{j=1}^b R_j$$

$$m \sum_{j=1}^b |R_j| = \sum_{i=1}^q \sum_{k=1}^{N_i(k)} |S_{i,k}| = \sum_{i=1}^q |S_i|$$

İstediğimiz budur. $\square$

$$< 2\varepsilon. \quad (7+1)$$

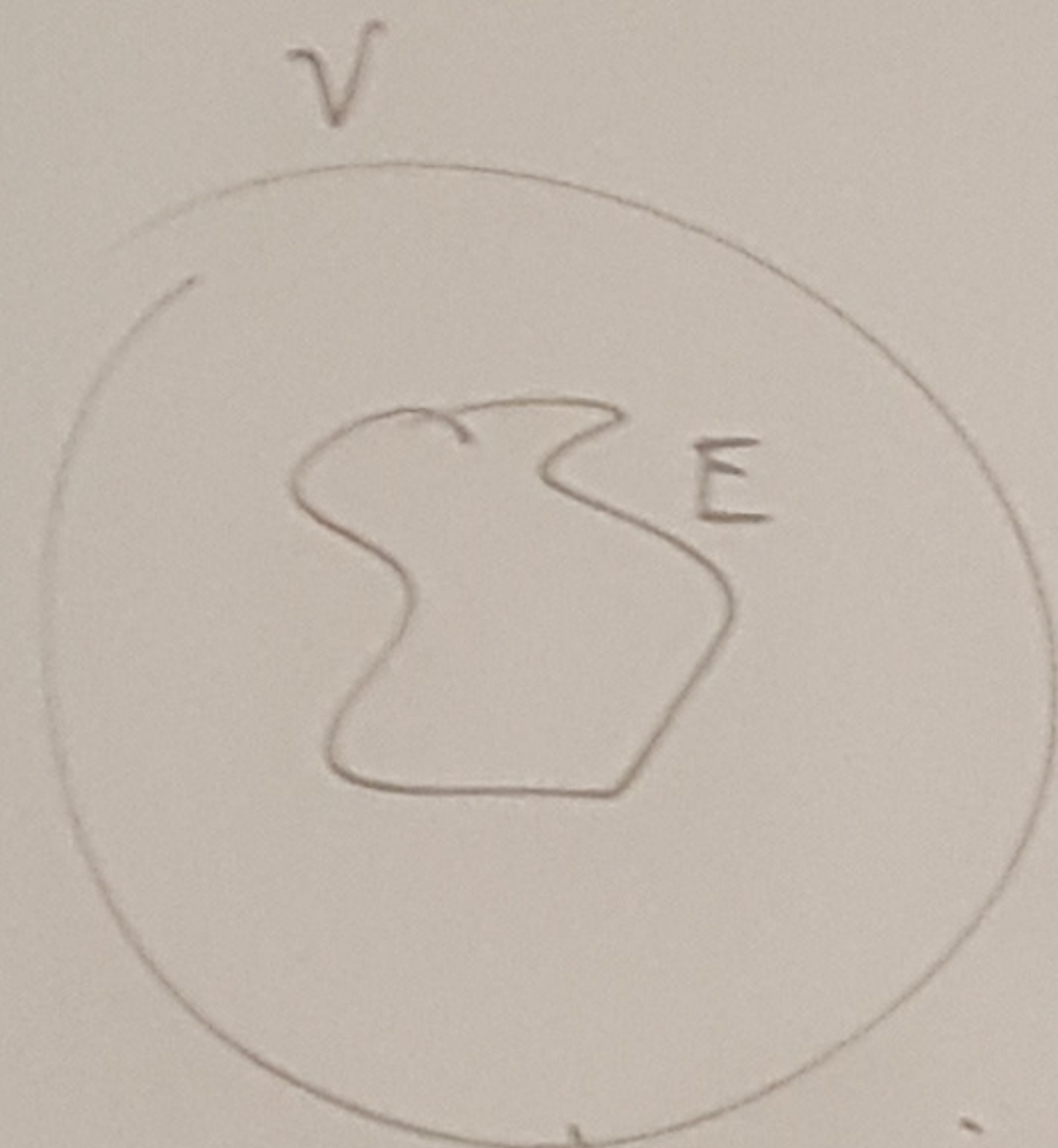
64
 $\rightarrow \frac{1}{N}$ kenar olan
 küpler.

$$\sum_{j=1}^b |Q_j| = \sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^{v_i} |z_i^{(k)}| = \sum_{i=1}^a |S_i| < 2\varepsilon \cdot (r+1)$$

İstediğimiz budur. $\square$

Teorem 1.22

$V \subset \mathbb{R}^n$ bir açık küme
 olsun ve $\bar{E} \subset V$ sağlayan
 bir Jordan bölgesi E alalım.



$\phi: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ bir

1-1 C^1 fonksiyon

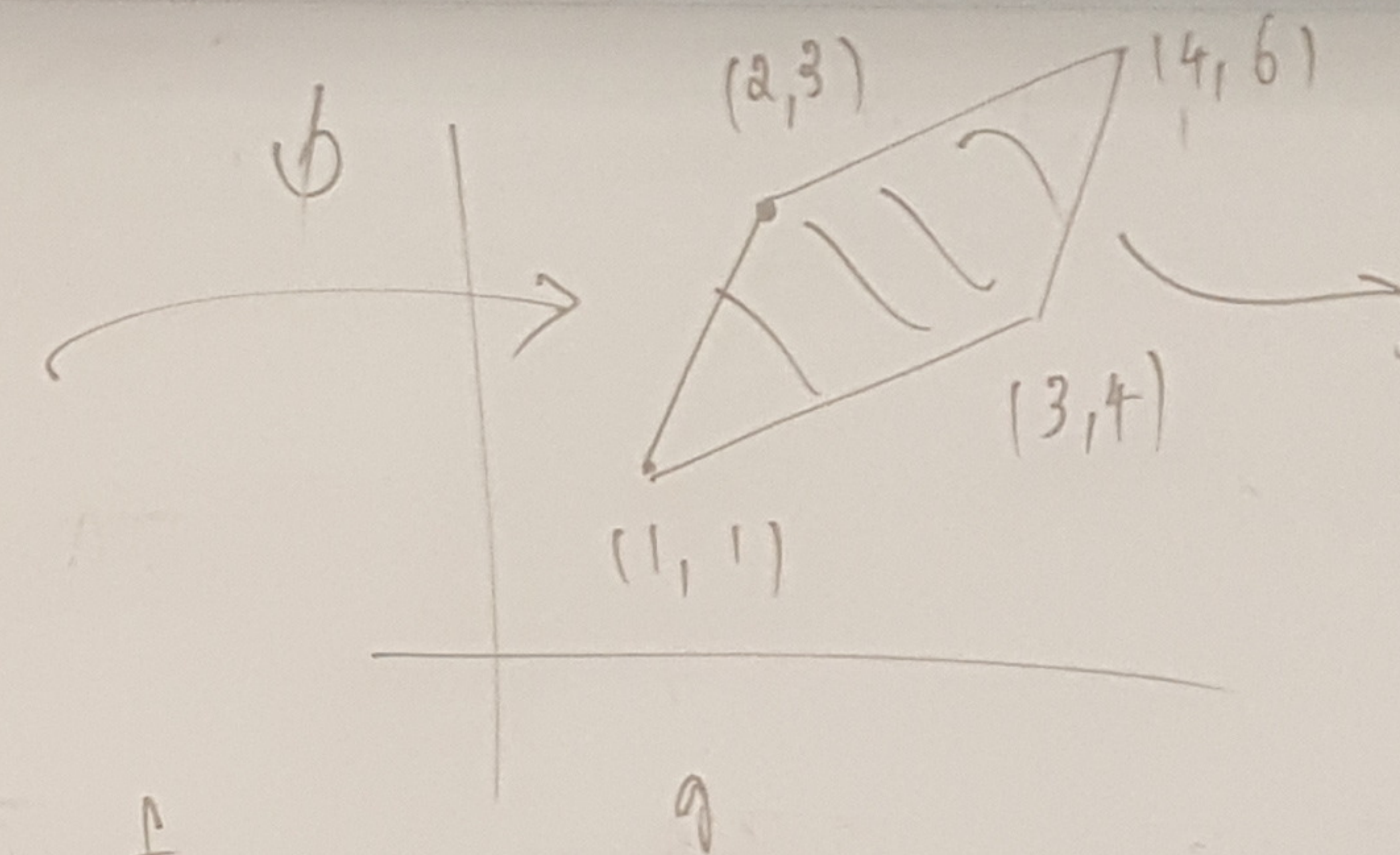
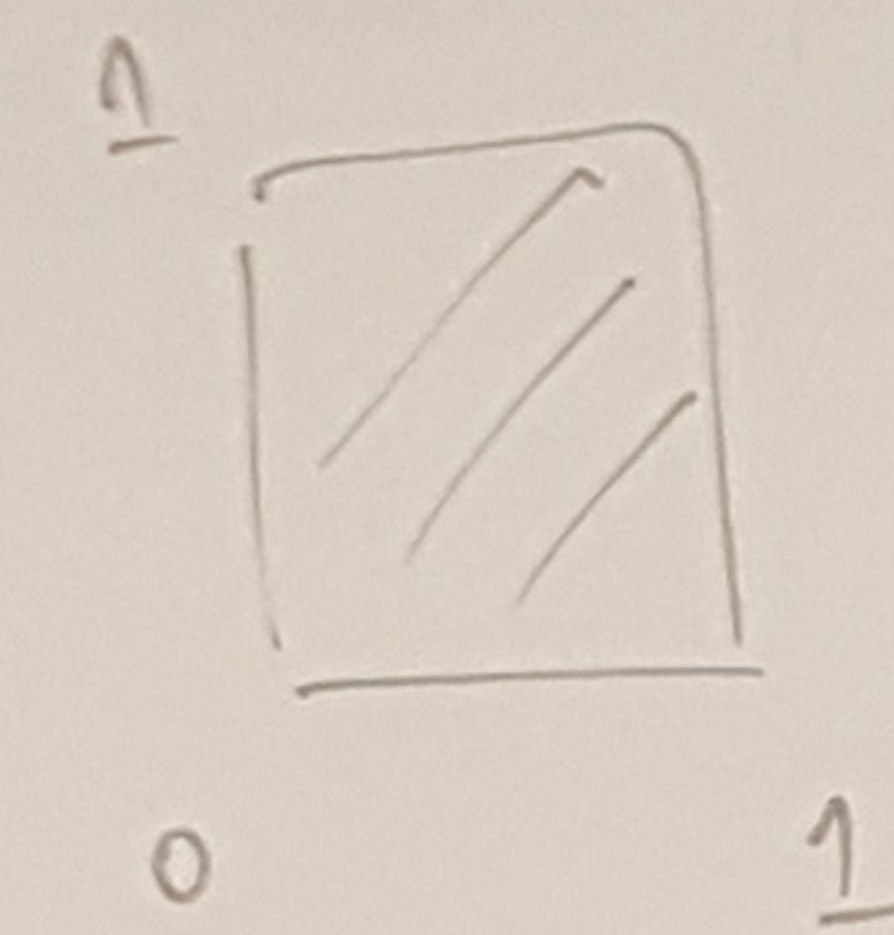
olsun ve $\Delta_\phi = V$

üzerinde hiç bir noktada '0'
 olmasın. O zaman

$\phi(E)$ bir

Jordan Bölgedir.

Örnek 1.23.



Sanırsanız,
 Jordan
 Bölgesi.

(8)

$$\phi(x, y) = (2x + y + 1, 3x + 2y + 1)$$

$$\Delta_\phi = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Teorem 1.22 Geçerli.

$$\begin{aligned} \text{Sürekli} &\Rightarrow \phi(x_n) \rightarrow \phi(x) \\ &\wedge \phi(M_n) \rightarrow \phi(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi^*(\partial \phi(E)) &\subset \partial \phi^*(\phi(E)) = \partial E \\ &\Rightarrow \phi(E) \subset \phi(\partial E) \end{aligned}$$

E : Jordan $\Rightarrow$ Her $\varepsilon > 0$ için

$$\partial E \subset \bigcup_{i=1}^p R_i$$

$$\sum |R_i| < \varepsilon$$

Sayılayan küpler var. (Thm 1.21)
 $\hookrightarrow$ eşit boy.

$$M = \sup_{x \in \bar{E}} \|f'(x)\| \text{ olsun } \left(\begin{array}{l} \bar{E}: \text{Kompakt} \\ x \rightarrow \|f'(x)\| \\ \text{Sürekli} \end{array} \right)$$

Orada Degen Thm

$$\| \phi(x) - \phi(y) \| \leq M \|x - y\|$$

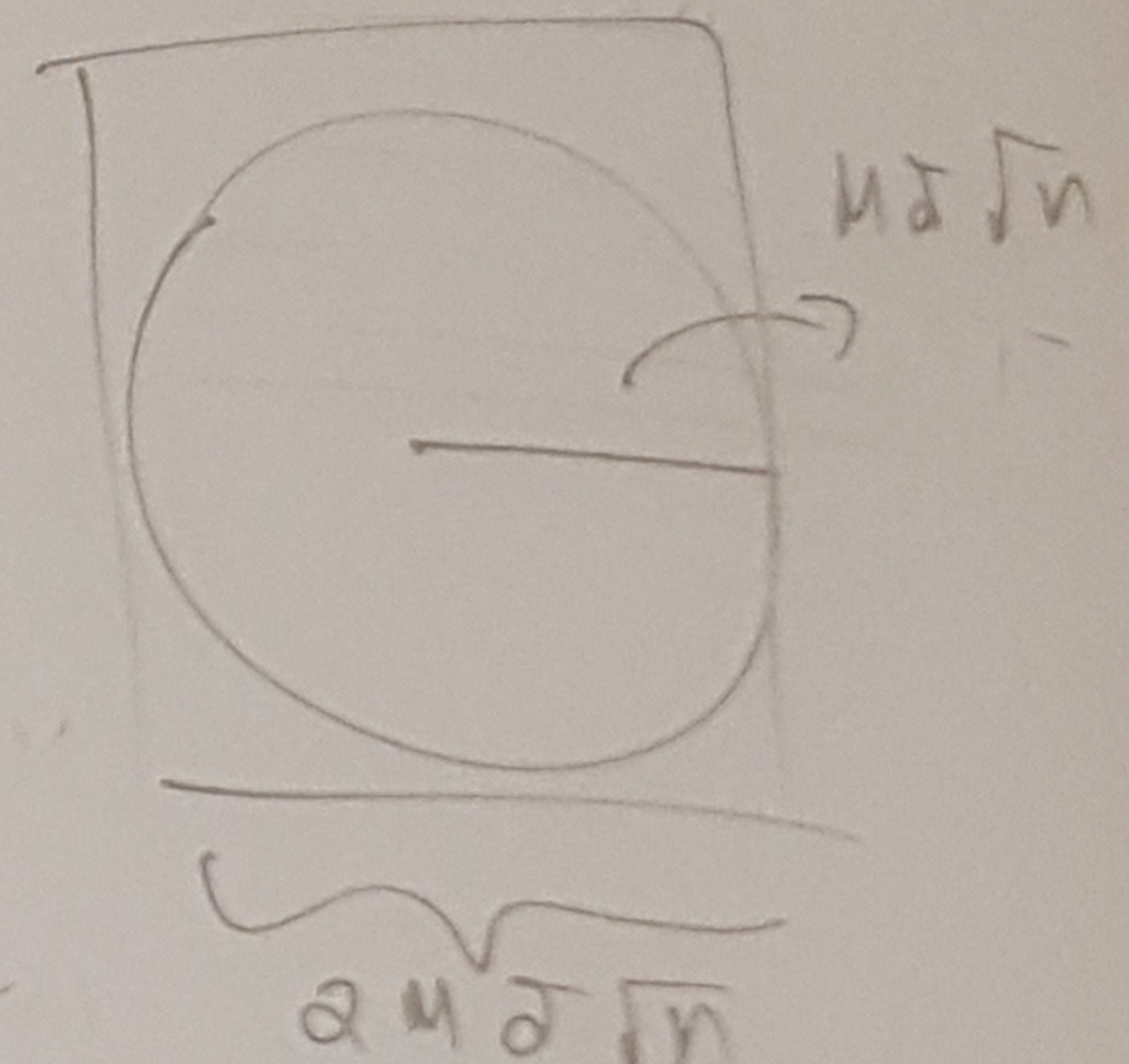
$$\forall x, y \in \bar{E}$$

$$\begin{aligned} R_i: \text{Kenarları } \delta \text{ olsun. } x, y \in R_i &\Rightarrow \sum_{i=1}^n \delta^2 < \varepsilon. \\ x, y \in R_i &\Rightarrow \|x - y\| \leq \left(\sum_{i=1}^n \delta^2 \right)^{1/2} \quad (10) \\ &= \delta \sqrt{n} \end{aligned}$$

$$\| \phi(x) - \phi(y) \| \leq M \delta \sqrt{n}$$

$\forall$ zaman $\phi(R_i)$ $2M\delta\sqrt{n}$
 kenarlı bir küp içinde
 sayabiliriz.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum |\phi(R_i)| &\leq \sum_{i=1}^p (2M\delta\sqrt{n})^n \\ &= p \left(2M\delta\sqrt{n} \right)^n \\ &< D\varepsilon \quad \rightarrow \text{sabit} \end{aligned}$$



Orada Degeri Thm

$$\| \phi(x) - \phi(y) \| \leq M \| x - y \|$$

$$\forall x, y \in E$$

$$i=1$$

$$= \sum_{i=1}^n \binom{n}{2} \binom{n}{m} \binom{n}{n} \frac{1}{2} \epsilon^n$$

$$< D \epsilon \rightarrow \text{Sabit}$$

İspat Ne göstermek lazım?

$\phi(E)$ 'nin Jordan Bölge olduğunu.

$\partial \phi(E)$ Sıfır hacimli olduğunu

İddia $\partial \phi(E) = \phi(\partial E)$

i.e a) $\phi(\partial E) \subset \partial \phi(E)$

b) $\phi(\partial E) \supset \partial \phi(E)$

$x \in \partial E \Rightarrow \exists \{x_n\} \in E, x_n \rightarrow x$

$\& \exists \{y_n\} \in E^c, y_n \rightarrow x$

ϕ sürekli $\Rightarrow \phi(x_n) \rightarrow \phi(x)$

$\& \phi(y_n) \rightarrow \phi(x)$

i.e $\phi(x) \in \overline{\phi(E)} \cap \overline{\phi(E)^c}$

ϕ 1-1 $\Rightarrow \phi(E^c) = \phi(E)^c$

$\Rightarrow \phi(x) \in \overline{\phi(E)} \cap \overline{\phi(E)^c}$

$\Rightarrow \phi(x) \in \partial \phi(E)$

sonuç: $\phi(\partial E) \subset \partial \phi(E)$

Ters Fonksiyon Thm: $\phi^{-1}: \phi(V) \rightarrow V$
 ϕ^{-1} fonksiyondur.

ϕ^{-1} için bunu kullanırsak,

$\phi^{-1}(\partial \phi(E)) \subset \partial \phi^{-1}(\phi(E)) = \partial E$

$\Rightarrow \partial \phi(E) \subset \phi(\partial E)$

$\phi(E^o) \supseteq \phi(E)^o$

$\partial[\phi(E)] = \phi[\partial(E)]$

