

U zaman hem den hem H den
daha ince bir ağı k bulunabilir.

$$\left. \begin{aligned} V(E; H) &\geq V(E; K) \\ v(E; K) &\leq V(E; K) \end{aligned} \right\}$$

Hatırlatma

$$E \subset R \subset \mathbb{R}^n$$

$\hookrightarrow$ Dik dörtgen

$\mathcal{g}: R$ üzerinde bir ağı $\mathcal{g} = \{R_1, \dots, R_p\}$

$$V(E; \mathcal{g}) := \sum_{R_i \cap \bar{E} \neq \emptyset} |R_i|$$

$$v(E; \mathcal{g}) := \sum_{R_i \subset E^\circ} |R_i|$$

$$\overline{\text{Vol}}(E; R) := \inf_{\substack{\mathcal{g}: R \\ \text{üzerinde} \\ \text{ağı}}} V(E; \mathcal{g})$$

$$\underline{\text{Vol}}(E; R) := \sup_{\substack{\mathcal{g}: R \\ \text{üzerinde} \\ \text{ağı}}} v(E; \mathcal{g})$$

Tanım Eğer $\overline{\text{Vol}}(E) = \underline{\text{Vol}}(E)$ ise
 E bir Jordan Bölge dir.

$$v(E, \mathcal{G}) := \sum_{R_i \in \mathcal{G}} |R_i|$$

$\mathcal{G}$ bir $\mathcal{G}$ ise $\text{vol}(E) = \text{vol}(E)$ ise
 E bir Jordan Bölge dir.

Not a) $v(E, \mathcal{G}) \leq V(E, \mathcal{G})$

$\mathcal{H}$ $\mathcal{G}$ 'den daha ince
 ise

$$V(E, \mathcal{H}) \leq V(E, \mathcal{G})$$

$$v(E, \mathcal{H}) \geq v(E, \mathcal{G})$$

c) $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ $\mathbb{R}$ üzerinde ağlar.

O zaman hem $\mathcal{G}$ 'den hem $\mathcal{H}$ 'den
 daha ince bir ağ $\mathcal{K}$ bulunabilir.

d) Sonuç: Her E için

$$\underline{\text{vol}}(E) \leq \overline{\text{vol}}(E)$$

Sebebi $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ iki ağ olsun.

$\mathcal{K}$ hem $\mathcal{G}$ 'den hem $\mathcal{H}$ 'den
 ince olsun.

$$v(E, \mathcal{G}) \leq v(E, \mathcal{K}) \Rightarrow v(E, \mathcal{G}) \leq V(E, \mathcal{H})$$

$$V(E, \mathcal{H}) \geq V(E, \mathcal{K})$$

$$v(E, \mathcal{K}) \leq V(E, \mathcal{K})$$

$$\mathcal{H} = \{R_1 \cap S, \dots, R_p \cap S\} \rightarrow R \cap S \text{ uzerinda bir ag.}$$

$$\begin{aligned} & R_i \cap S \cap E \neq \emptyset \\ & \leq \sum_{R_i \cap \bar{E} \neq \emptyset} |R_i \cap S| \leq \sum_{R_i \cap \bar{E} \neq \emptyset} |R_i| = V(E; \mathcal{H}) \end{aligned}$$

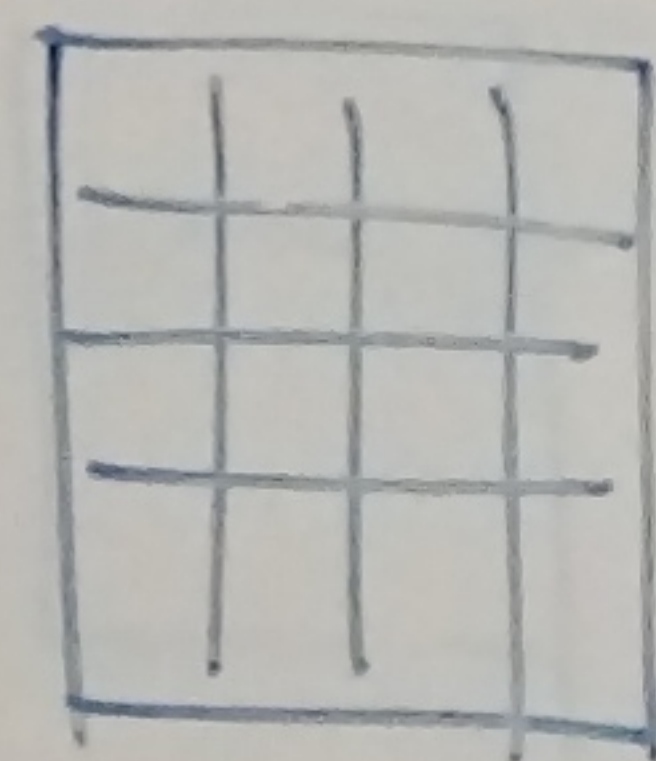
$$\Rightarrow \sup v(E; \mathcal{G}) \leq \inf V(E; \mathcal{H})$$

$$\Rightarrow \underline{\text{Vol}}(E) \leq \overline{\text{Vol}}(E)$$

Örnek

$$E \subset [0, 1] \times [0, 1]$$

$$E = \left\{ (p, q) \mid \begin{array}{l} p, q \in \mathbb{Q} \\ p, q \in [0, 1] \end{array} \right\}$$



$$V(E; \mathcal{G}) = 1 \Rightarrow \underline{\text{Vol}}(E) < \overline{\text{Vol}}(E)$$

$$v(E; \mathcal{G}) = 0$$

E bir Jordan bölgesi değil.

(3)

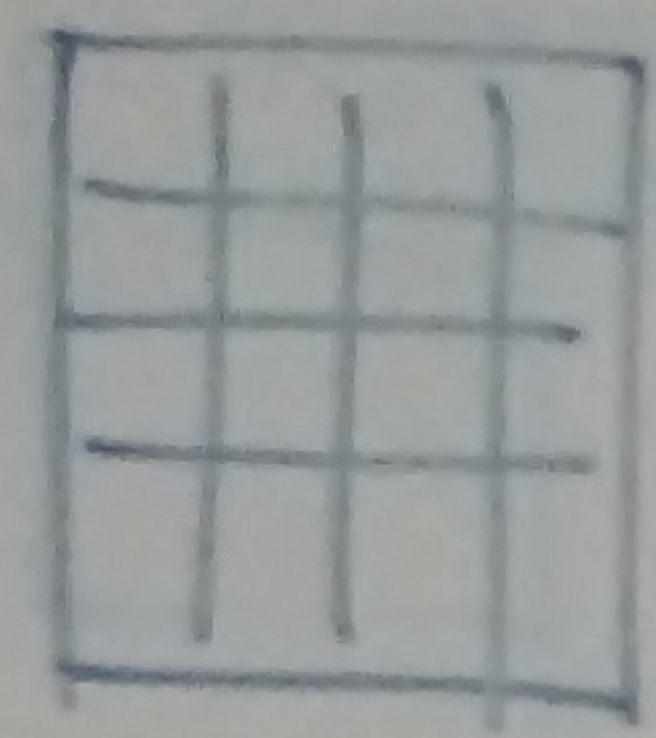
Teorem 1.20 $R, S \subset \mathbb{R}^n$ iki

dik-dörtgen olsun.

$E \subset R, E \subset S$ olsun.

Eğer E R 'ye göre Jordan

Bölge ise, E S 'e göre bir Jordan bölgesidir.



$$V(E; \mathcal{G}) = 1 \Rightarrow \underline{\text{Vol}}(E) \neq \overline{\text{Vol}}(E)$$

$$v(E; \mathcal{G}) = 0$$

E R'ye göre Jordan Bölge ise, E'ye göre bir Jordan bölgesidir.

İspat

E, R'ye göre

Jordan olsun. $\epsilon > 0$ olsun. $V(E; K) \leq V(E; \mathcal{G})$

R üzerinde öyle bir ağı ($\mathcal{G}$) bulunabilir ki,

$$V(E; \mathcal{G}) - v(E; \mathcal{G}) < \epsilon$$

$$\mathcal{G} = \{R_1, \dots, R_p\}$$

$$\mathcal{H} = \{R_1 \cap S, \dots, R_p \cap S\} \rightarrow R \cap S \text{ üzerinde bir ağı.}$$

H'ye S üzerindeki bir ağı'na uzatalım. Bunu K diyelim.

$$K = \{R_1 \cap S, \dots, R_p \cap S, S_1, \dots, S_q\}$$

$$\text{Not } S_i \in (R \cap S) \Rightarrow S_i \cap \bar{E} = \emptyset$$

$$V(E; K) = \sum_{R_i \cap S \cap \bar{E} \neq \emptyset} |R_i \cap S| + \sum_{S_i \cap \bar{E} \neq \emptyset} |S_i|$$



$$= \sum_{R_i \cap S \cap \bar{E} \neq \emptyset} |R_i \cap S|$$

$$\leq \sum_{R_i \cap \bar{E} \neq \emptyset} |R_i \cap S| \leq \sum_{R_i \cap \bar{E} \neq \emptyset} |R_i| = V(E; \mathcal{G})$$

→ Bir bölge'nin Jordan Bölge
olup olmadığını kapsayan
Dik - Dörtgenli bağımsız
□.

$R_i \cap E \neq \emptyset$ Jordan
Hacim

Lemma 1.1.9. $\mathbb{R}^n$ uzayının her sınırlı $\bar{E}$ alt-kümesi
için $0 \leq \underline{\text{Vol}}(E) \leq \overline{\text{Vol}}(\bar{E})$ sağlanır. $\bar{E}$ kümesinin
bir Jordan bölgesi olabilmesi için gerek ve
yeter koşul

$$\underline{\text{Vol}}(E) \leq \overline{\text{Vol}}(E) \text{ eşitsizliğinin gerçekleş-}$$

$$\underline{\text{Vol}}(E) = \overline{\text{Vol}}(E) = \text{Vol}(E)$$

mesidir.

$$v(E; K) = \sum_{R_i \cap S \subset E^0} |R_i \cap E| + \sum_{S_i \subset E^0} |S_i|$$

Not $R_i \cap S \subset E^0$ olsun

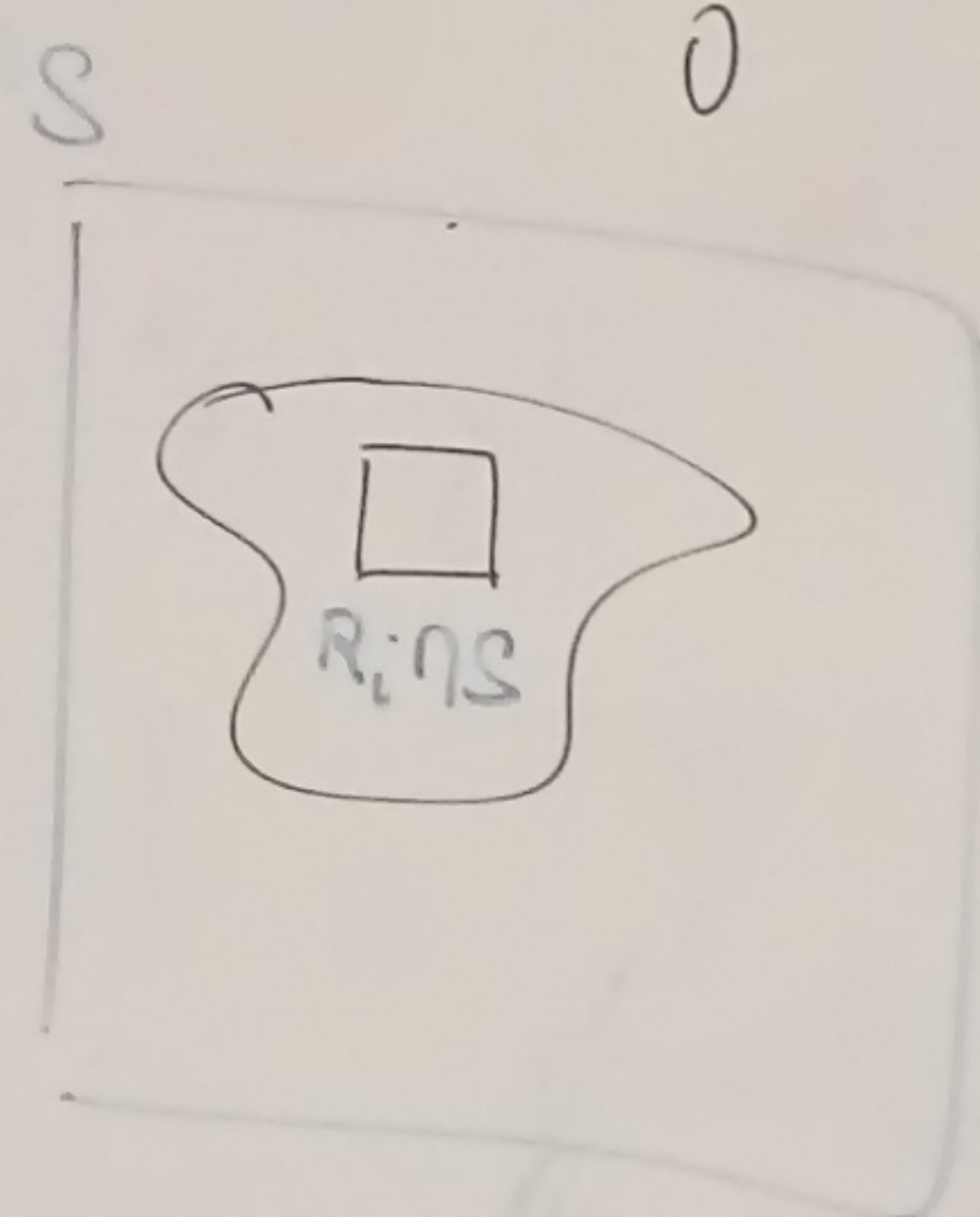
O zaman $R_i \subset E^0$

Seçer $R_i \cap S \subsetneq R_i$

$$\Rightarrow R_i \cap \partial S \neq \emptyset$$

$x \in R_i \cap \partial S$ Bu $x \in E^0$ içinde olamaz.

$\Rightarrow R_i \in E^0$ içinde olamaz. çelişki



Özellik, $R_i \cap S \subset E^0 \Rightarrow$

$$R_i \subset E^0 \text{ ve } R_i = R_i \cap S$$

$$v(E; K) = \sum_{R_i \cap S \subset E^0} |R_i \cap E|$$

$$= \sum_{R_i \subset E^0} |R_i| = v(E; \mathcal{G})$$

$$(*) \quad v(E; K) = v(E; \mathcal{G})$$

$$(**) \quad v(E; K) \leq v(E; \mathcal{G})$$

$$\Rightarrow v(E; K) - v(E; K) < \varepsilon$$

Her $\varepsilon > 0$ için S üzerinde bir ağ K bulabiliriz

$$\Rightarrow \inf V(E; K) = \sup v(E; K)$$

K : Süzünde
ağ

K : Süzünde
ağ

$$\Rightarrow \text{vol}(E) = \underline{\text{vol}}(E) \quad (\text{S' e göre}) \quad V(E; G) =$$

$$\sum_{R_j \cap E \neq \emptyset} |R_j| \quad \text{Jordan Hacım}$$

$$\text{vol}(\mathbb{R}) = |\mathbb{R}|$$

$$R = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \quad |R| = \prod_{i=1}^n |b_i - a_i|$$

→ Bir bölge'nin Jordan Bölge
olup olmadığını kapsayan
Dik - Dörtgenle bağımsız
□.

Teorem 1.21 Her dik - dörtgen $R \subset \mathbb{R}^n$ (6)

bir Jordan Bölgesi ve

Lemma 1.1.9. $\mathbb{R}^n$ uzayının her sınırlı E alt-kümesi
için $0 \leq \underline{\text{Vol}}(E) \leq \overline{\text{Vol}}(E)$ sağlanır. E kümesinin
bir Jordan bölgesi olabilmesi için gerek ve
yeter koşul

$$\underline{\text{Vol}}(E) \leq \overline{\text{Vol}}(E) \text{ eşitsizliğinin gereklen-
mesi için } \underline{\text{Vol}}(E) = \overline{\text{Vol}}(E) = \text{Vol}(E)$$

göer

$$\checkmark \underline{Vol(R)} \geq |R| \geq \overline{Vol(R)} \text{ eşitsizliği}$$

" $\underline{Vol(R)}$ ①

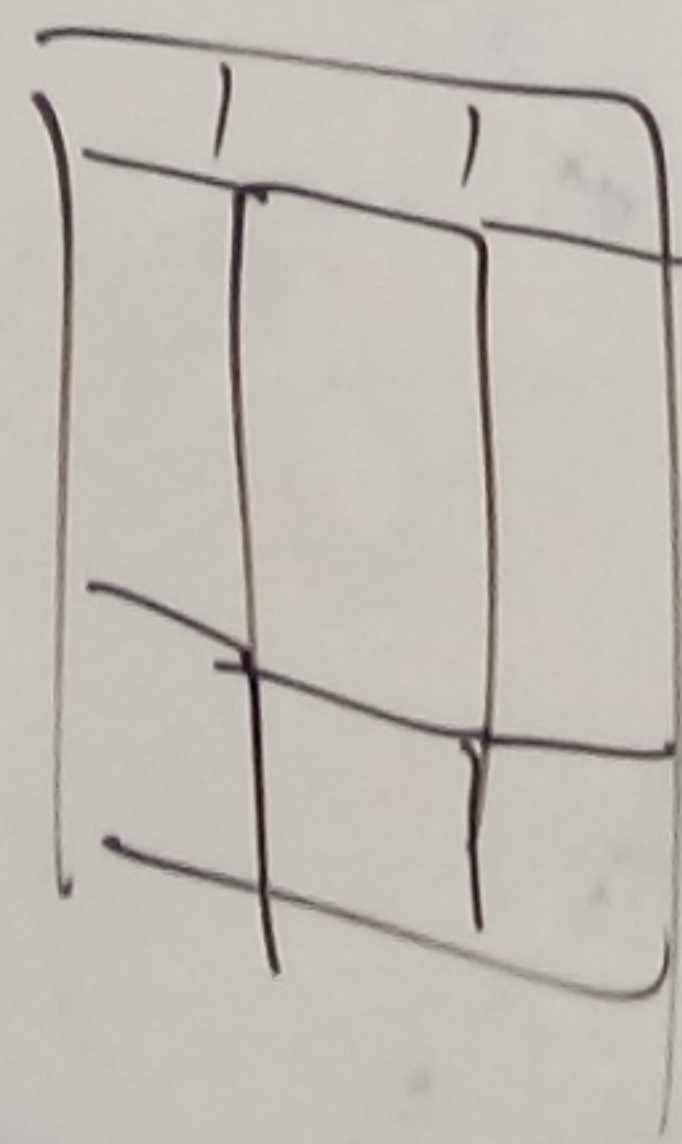
geçerli ise R bir Jordan bölgesidir ve $Vol(R) = |R|$

Şimdi $\mathcal{G} = \{R\}$ ailesi R üzerinde bir ağ olarak tanımlasın.

$$|R| = V(R; \mathcal{G}) \geq \overline{Vol(R)} \text{ olduğu için}$$

0 halde;

$$|R| \geq \overline{Vol(R)}. \quad \text{①}$$



Diger taraftan bir $\varepsilon > 0$ sayısı sabitlere ⑦
rek

$$R := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

olduğu varsayılırsa, $\delta \rightarrow 0$ için $b_j - a_j - 2\delta \rightarrow b_j - a_j$

yakınsamasının $j = 1, \dots, n$ için geçerli olduğu
kullanılarak

$$Q := [a_1 + \delta, b_1 - \delta] \times \dots \times [a_n + \delta, b_n - \delta]$$

olarak alındığında

$$|R| - |Q| < \varepsilon \text{ Sağlamak biçiminde}$$

yeterince küçük bir $\delta > 0$ sayısının seçilebileceği
görülür.

Her $j=1, \dots, n$ için

$$P(g) := \{a_j, a_j + \delta, b_j - \delta, b_j\} \quad (V(E; K) \leq V(E; g))$$

parçaları vasıtasıyla elde edilen ag g ile gösterilirse, g ağına ait olan ve $\mathbb{R}^0$ ta-
rafından kapsanan tek dikdörtgenin Q olduğu
sonucuna ulaşılır, bu ise tanım kullanıldığında

Tanım

$$v(E, g) := \sum_{R_j \in \mathbb{R}^0} |R_j|$$

$$\underline{Vol}(R) \geq v(R; g) = |Q| > |R| - \varepsilon$$

yani $\underline{Vol}(R) > |R| - \varepsilon$ olması demektir,
bu son eşitsizliğin $\varepsilon \rightarrow 0$ için limiti alınarak

$$\underline{Vol}(R) \geq |R| \text{ elde edilir.}$$