

$$\int_I f$$

$$\int f \circ \phi$$

arasında
ne bağlantısı
var?

$[a, b]$

$\partial[a, b]$
 $\rightarrow$ Sum

Çok Değişkenli İntegrasyon (Jordan İntegrasyon)

$\hookrightarrow$ Camille Jordan

Jordan Eğri Teoremi

$\mathbb{R}^2$

İç

Dış

① Hangi Bölgeler
üzerinde İntegrasyon
yapmak mümkün?

② İyi Bölgeler üzerinde
Hangi fonksiyonlar

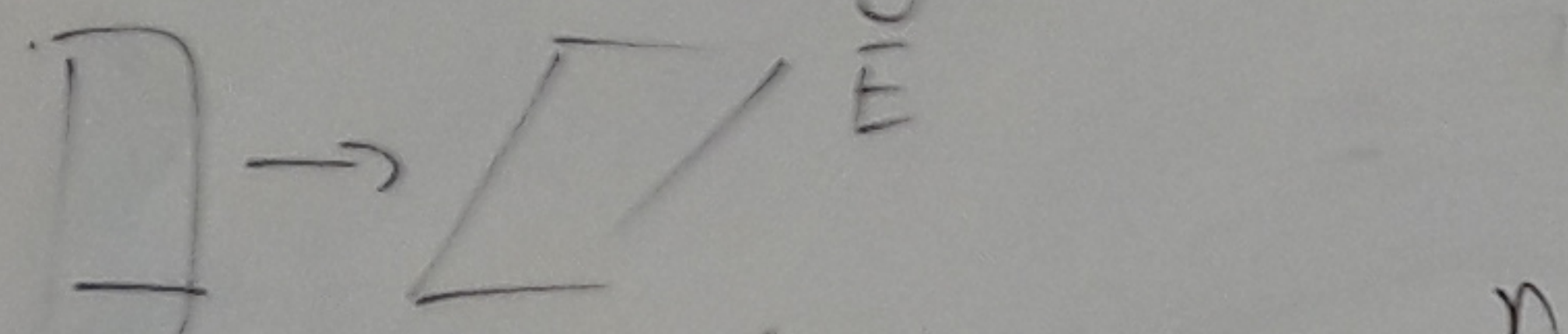
— İntegrelenebilir?

③ İntegrasyon Yöntem

- İntegrelenebilirlik ?
 3) İntegrasyon yöntem

4) E 'iyi' Bölge $\subset \mathbb{R}^n$
 f 'iyi' fonksiyon, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$

Diyeelim $\int_E f$ 'nin bir anlam
 var



$$\phi: E \rightarrow \mathbb{R}^n$$

'iyi' bir
 fonksiyon.

$$\int_E f$$

$$\int_{\phi(E)} f \circ \phi^{-1}$$

arasında
 ne bağlantısı
 var ?

5) İntegrasyon ve Türev (2)
 arasındaki bağlantısı.

1 değişken $F' = f$

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

$$\int_{[a,b]} F' = \int_{\partial[a,b]} F$$

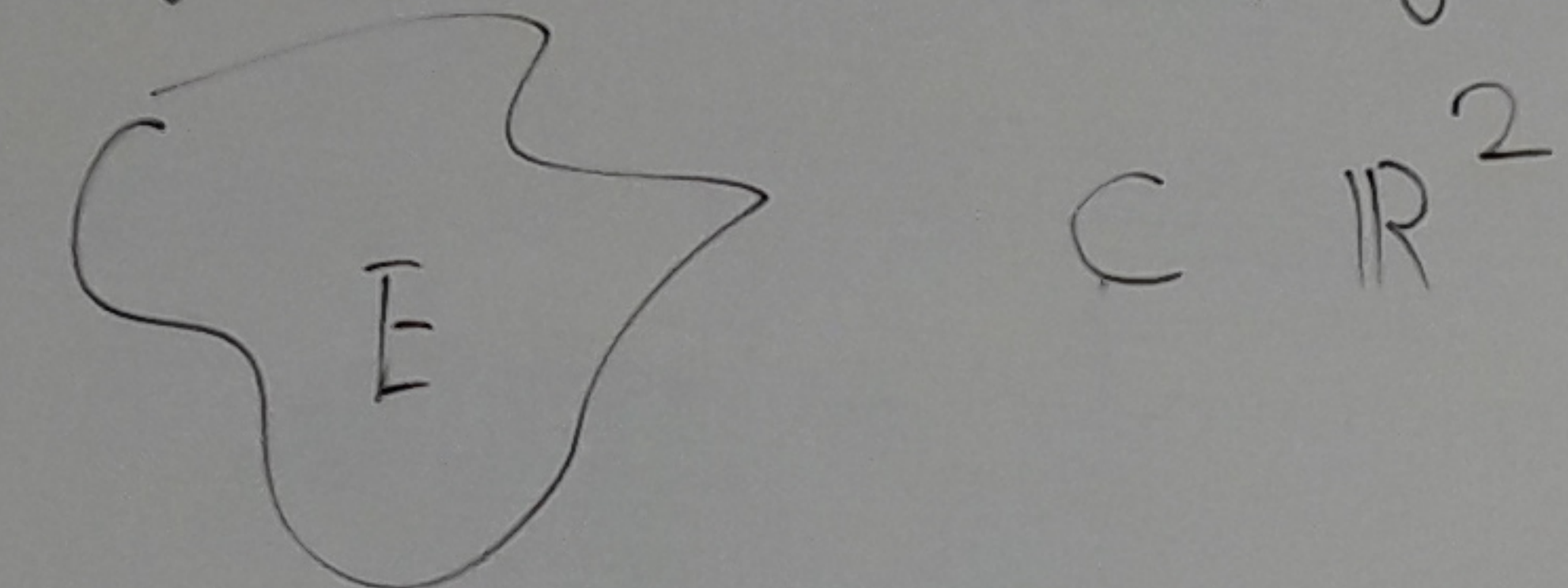
↪ Summa

(Kötü Bölge) $E = \{ (x, y) \mid \begin{matrix} x \in \mathbb{Q}, x \in [0, 1] \\ y \in \mathbb{Q}, y \in [0, 1] \end{matrix} \}$
 $\text{vol}(E) = ?$ (ne olmalı)

Aynen
 $\text{vol}(E) \approx \sum |R_j|$
 İnce R_j dik dörtgenler $\rightarrow \approx 0$
 $R_i \cap R_j = \emptyset \quad i \neq j$
 $R_i \subset E$

(2)

Çok Değişkenli vektör alan



$$\int_E F' \text{ turev} = \int_{\partial E} F$$

Green Teoremi $\mathbb{R}^2$
 Stokes Teoremi $\mathbb{R}^3$ daki Yüzeyler
 Gauss / Divergence Teoremi $\mathbb{R}^3$

not

$$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$F' : \mathbb{R}^n \rightarrow M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

(3)

Not $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
 $F': \mathbb{R}^n \rightarrow M_{m \times n}(\mathbb{R})$

(2)

Not 1.1 Bir bölge
 üzerinde sabit fonksiyon

1. Integre Etsek, sonuç
 hacim olmalı.

Not 1.2 $E \subset \mathbb{R}^2$

(Kötü Bölge)

$E = \left\{ (x, y) \mid \begin{array}{l} x \in \mathbb{Q}, x \in [0, 1] \\ y \in \mathbb{Q}, y \in [0, 1] \end{array} \right\}$
 $\text{vol}(E) \neq (\text{ne olmalı})$

$\text{vol}(E) \approx \sum |R_j|$ üst-ten kaplamak (4)
 Alt-ten kaplamak
 Daldurmak
 farklı sonuçlar veriyor.
 Dik dörtgenlerle kaplamak
 Sıkıntı
 Aynen $\rightarrow \approx 1$

$\text{vol}(E) \approx \sum |R_j|$
 Aynen $\rightarrow \approx 0$
 Ince R_j dik dörtgenler
 $R_i \cap R_j = \emptyset \quad i \neq j$
 $R_i \subset E$

6) A İyi Bölge, $c > 0$. $0 \neq a$ man
 $cA := \{ cx : x \in A \}$ İyi
 Bölge olmak ve $|cA| = c^n |A|$ olmak.

$|T(A)| = |A|$ olmak
 8) $A \subset \mathbb{R}^n$ $B \subset \mathbb{R}^m$ İyi Bölgeler
 $A \times B \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{n+m}$ İyi Bölge olmak
 $|A \times B| = |A| |B|$

Tanım 1.3

Dir dik dörtgen : $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$
 $\subset \mathbb{R}^n$

Not 1.4

$R \subset \mathbb{R}^n$ Dir dik dörtgen
 $R = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$

Bunun hacim

$$|R| = (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n)$$

olması lazım.

Not 1.5

Hacim'leri beklenen
 özellikler.

5

A, B 'İyi' Bölgeler
 $|A|, |B|$: Hacimlar

Beklenen özellikler

1) $|\emptyset| = 0$

(Referans) 2)

A : Dir dik dörtgen ise

$$A = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

3) Zaman

$$|A| = (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n) \text{ olmak.}$$

3) $|A \cup B| \leq |A| + |B|$ olmak
 $+ A \cup B$ İyi Bölge olması lazım.

Sunum hacim

$$|R| = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$$

olması lazım.

0 zaman

$$|A| = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n) \text{ olmak}$$

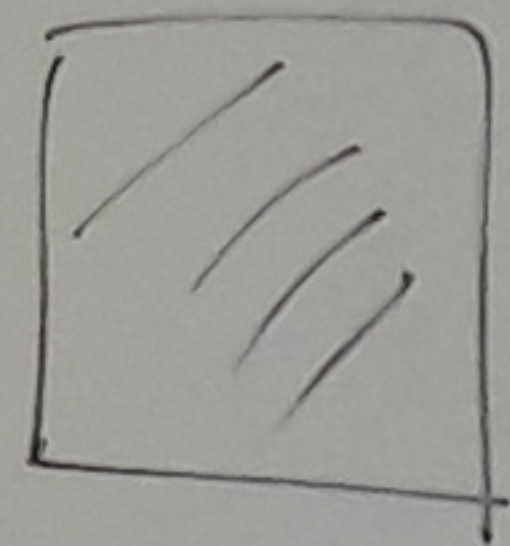
$$3) |A \cup B| \leq |A| + |B| \text{ olmak}$$

+ AUB İyi Bölge olması lazım.

4) A, B İyi Bölgeler

$$A \cap B = \emptyset, 0 \text{ zaman}$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| \text{ olmak.}$$



5) $A \subset B$ İyi Bölgeler

0 zaman

$$|A| \leq |B| \text{ olmak.}$$

6) A İyi Bölge, $c > 0$. 0 zaman

$$cA := \{ cx : x \in A \} \text{ İyi}$$

$$\text{Bölge olmak ve } |cA| = c^n |A| \text{ olmak.}$$

$$7) T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

6)

uzaklık koruyan dönüşüm

$$A \subset \mathbb{R}^n \text{ İyi Bölge}$$

0 zaman

$$T(A) \text{ iyi bölge olmak}$$

ve

$$|T(A)| = |A| \text{ olmak}$$

8) $A \subset \mathbb{R}^n$ $B \subset \mathbb{R}^m$ İyi Bölgeler

$$A \times B \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{n+m} \text{ İyi Bölge olmak}$$

$$|A \times B| = |A| |B|$$

Tanım 1.2

$$I_1^1 \times I_1^2$$

E bir dik-dörtgen
 $R \subset \mathbb{R}^n$ içinde bir
 küme olsun. ($E \subset R$)

$\mathcal{I} = \{R_1, \dots, R_k\}$ R üzerinde
 bir ağ olsun.

Tanım 1.3

$R = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$
 bir dik-dörtgen denir.

Tanım 1.6

Bir dik-dörtgen $R = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$
 n hacmi

$$|R| := (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n)$$

Şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.7.1

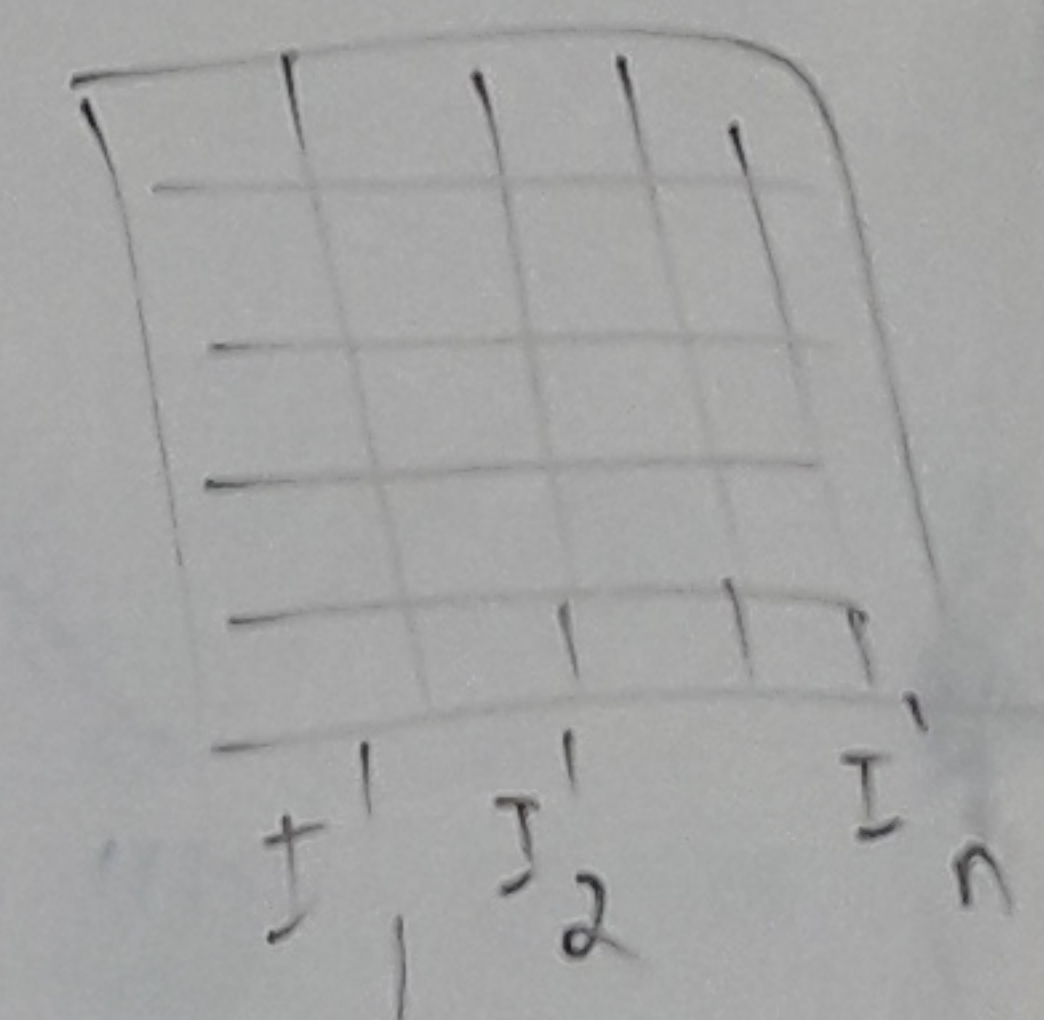
$\mathcal{A}_R$: $R \subset \mathbb{R}^n$ bir Dik-dörtgen olsun.
 $R = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$

Her kenar sonlu kapalı aralıklara
 ayrıştıralım.

$$[a_1, b_1] = I_1^1 \cup \dots \cup I_{m_1}^1$$

$$[a_n, b_n] = I_1^n \cup \dots \cup I_{m_n}^n$$

$$m \binom{k}{i} n \binom{k}{j} = 0 \quad i \neq j, \quad k \in [n]$$

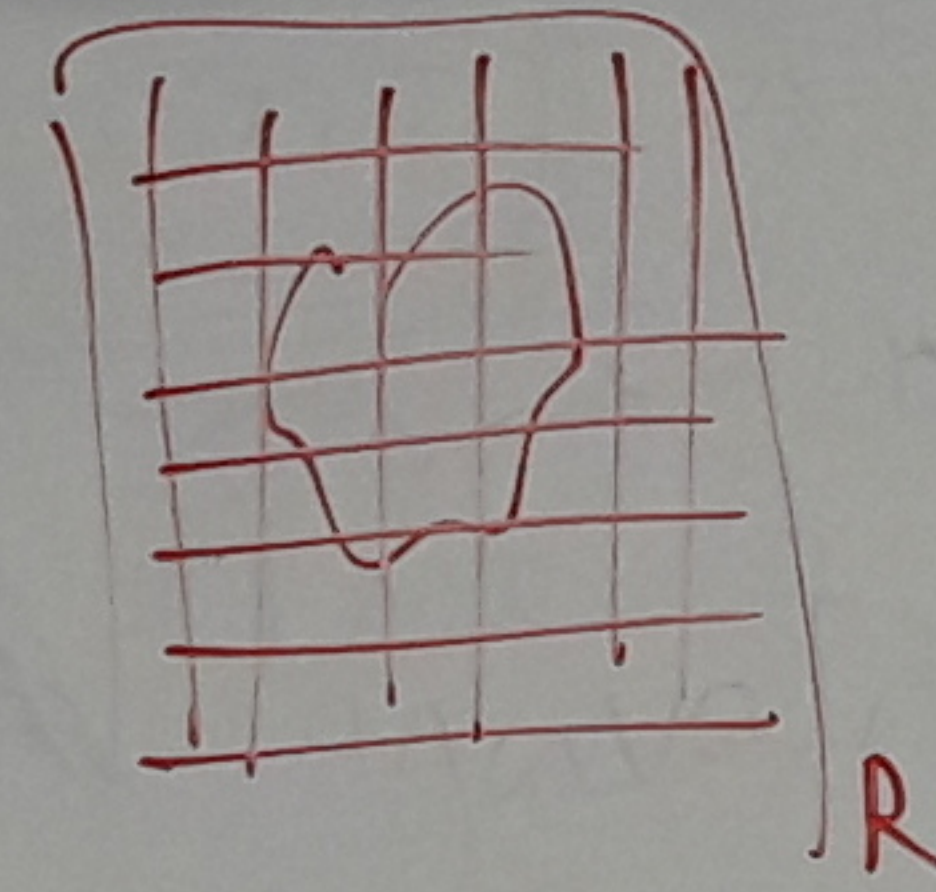
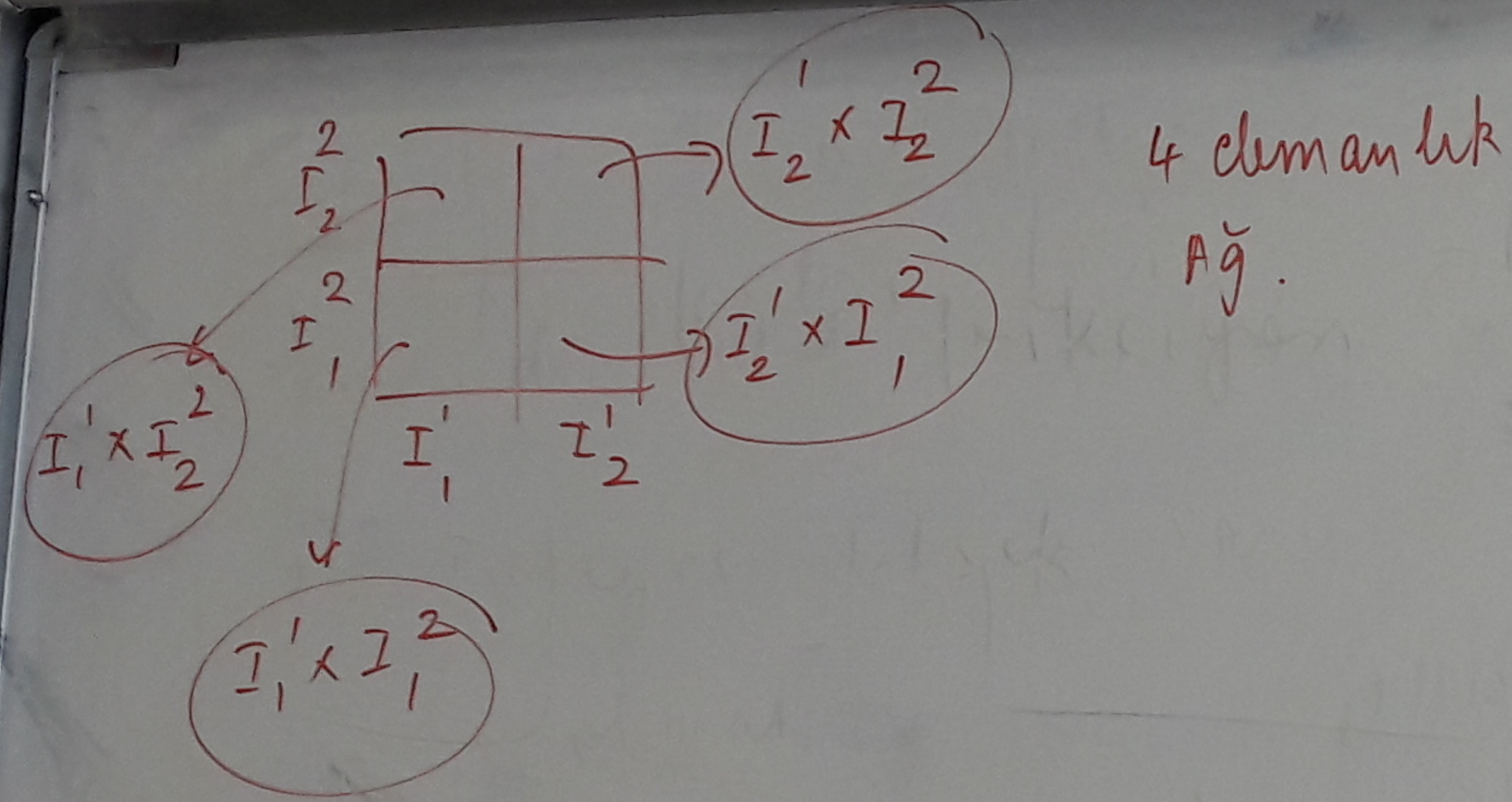


$$\mathcal{I} = \left\{ I_{i_1}^1 \times \dots \times I_{i_n}^n : i_1 \in [m_1], \dots, i_n \in [m_n] \right\}$$

R üzerinde bir ağ denir.

$|R| := (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$
 Şeklinde tanımlanır.

0 zaman, $\{I_1^1 \times \cdots \times I_n^1 : i_1 \in [m_1], \dots, i_n \in [m_n]\}$
 R üzerinde bir ağ denir.



$$V(E; \mathcal{G}) := \sum_{\substack{R_j \in \mathcal{G} \\ R_j \cap E \neq \emptyset}} |R_j|$$

üst Toplamı

$$v(E; \mathcal{G}) := \sum_{\substack{R_j \in \mathcal{G} \\ R_j \subset E^0}} |R_j|$$

Alt - Toplamı

(8)

Tanım 1.8 I bir dik-dörtgen
 $R \subset \mathbb{R}^n$ içinde bir
 küme olsun. (E, R)

$\mathcal{G} = \{R_1, \dots, R_k\}$ R üzerinde
 bir ağ olsun.

$\mathcal{H}$ $\mathcal{G}$ 'den daha ince olur.

$$\mathcal{H} \not\subset \mathcal{G}$$

(üst Toplamı)

$$v(E; \mathcal{H}) \geq v(E; \mathcal{G})$$

(Alt - Toplamı)

Tanım 1.11 $R \subset \mathbb{R}^n$ dik dörtgen

$E \subset R$ olsun.

$$V(E) := \inf_{\substack{\mathcal{G} \text{ R üzerinde} \\ \text{ağ}}} V(E; \mathcal{G})$$

üst Halm

$$v(E) := \sup_{\substack{\mathcal{H} \text{ R üzerinde} \\ \text{ağ}}} v(E; \mathcal{H})$$

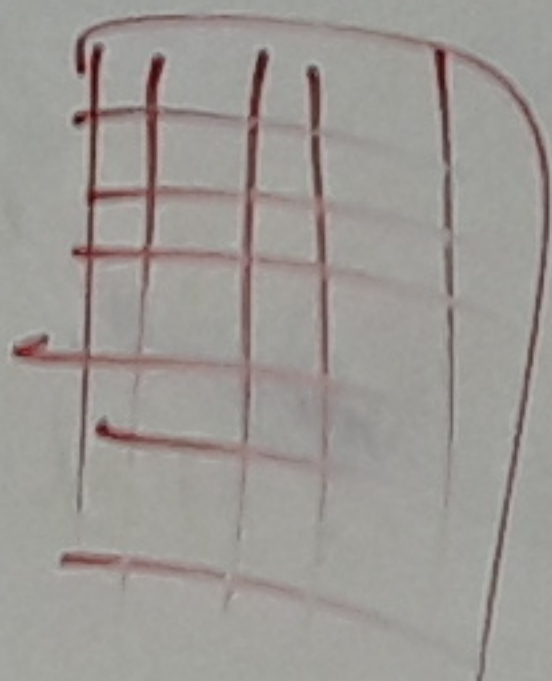
Alt - Halm

Örnek 1.12 $E = (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap [0,1] \times [0,1]$

$R = E$ olsun.

8 zaman

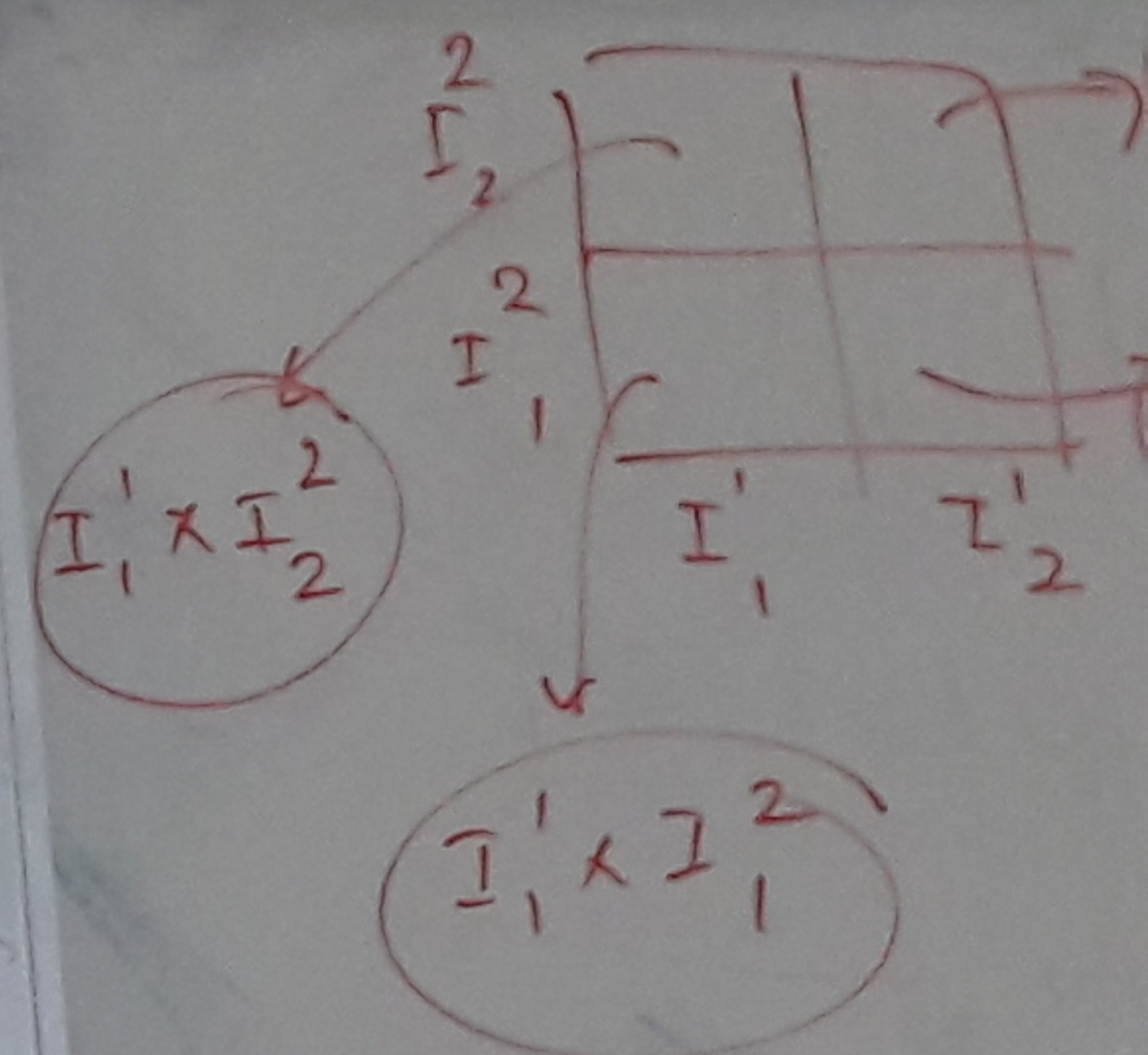
$$\left. \begin{aligned} V(E) &= 1 \\ v(E) &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &V(E) \text{ m} \\ &v(E) \text{ m} \\ &\text{farklı olabilir.} \end{aligned}$$



Tanım 1.13 $E \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n$

$\hookrightarrow$ dik dörtgen.

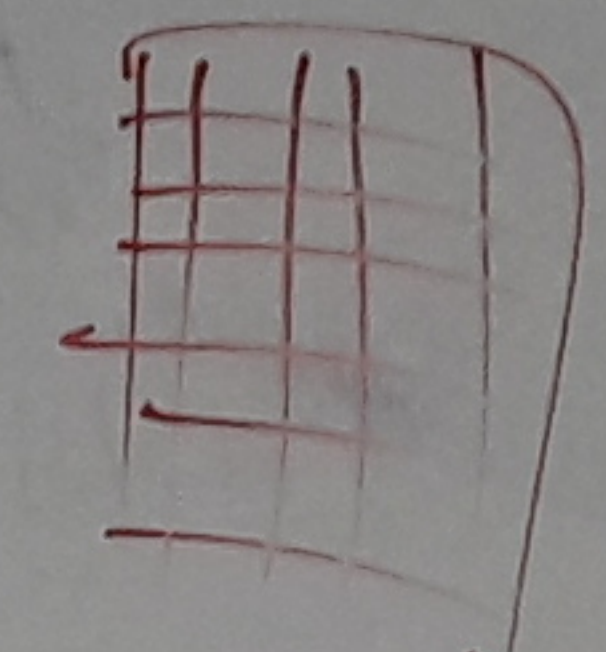
Eğer $V(E) = v(E)$ ise,
E JORDAN BÖLGE denir.



Tanım 1.14

üst hacim ağ

$$v(E) = \sup_{\gamma \in \mathcal{R} \text{ üzerinde}} v(E; \gamma)$$
 Alt-Hacim



Tanım 1.13 $E \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n$
 ↗ dik dörtgen.

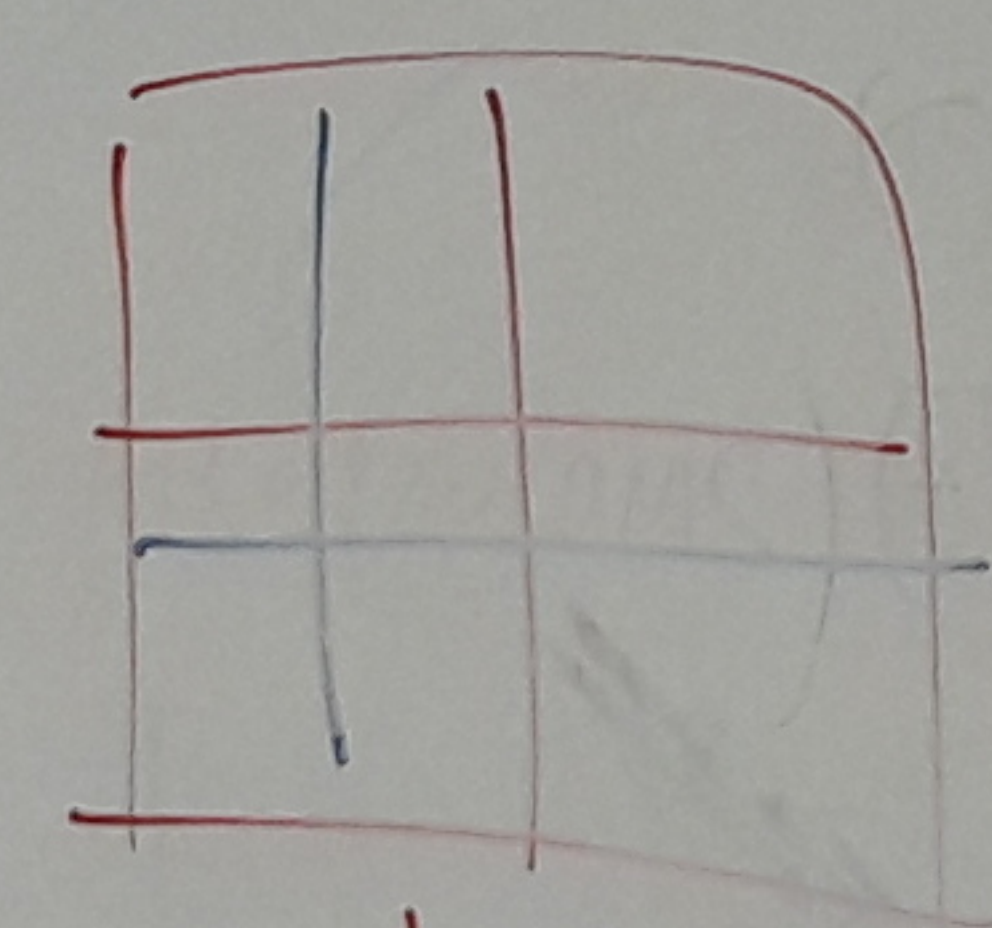
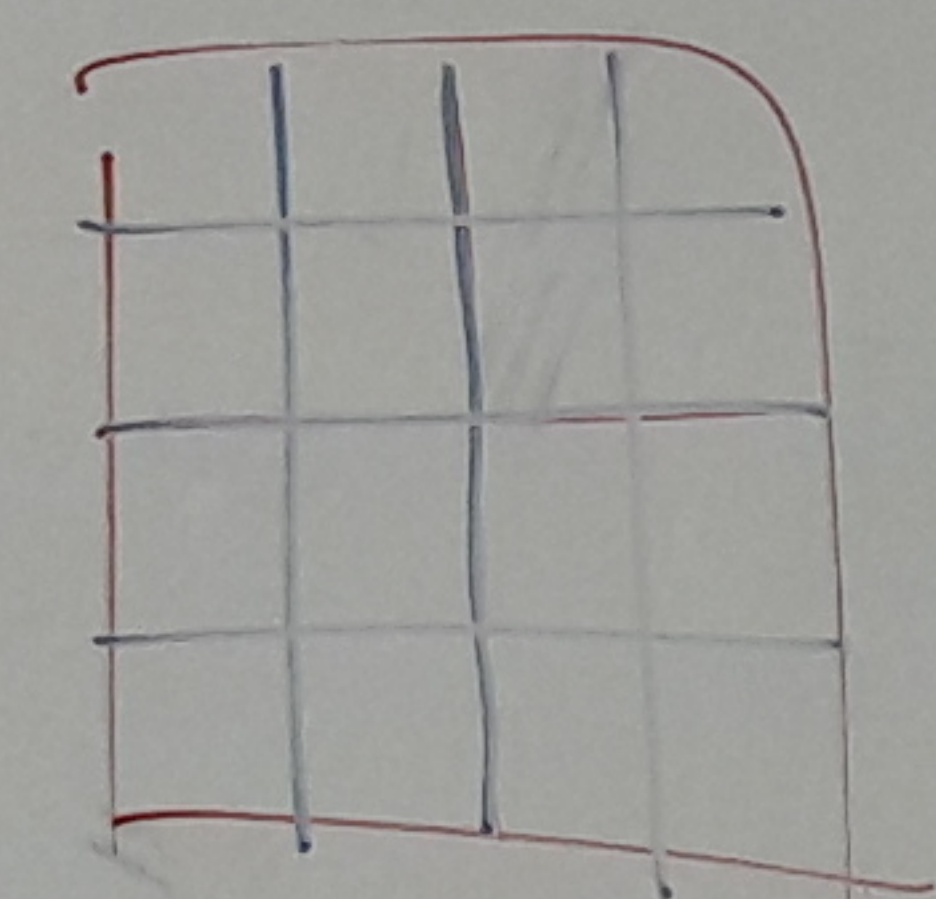
Eğer $V(E) = v(E)$ ise,
 E JORDAN BÖLGE denir.

Tanım 1.9 $R \subset \mathbb{R}^n$ dik
 dörtgen.

$\gamma, \mathcal{H}$ $\mathbb{R}$ üzerinde
 iki ağlar.

Eğer her $R_i \in \mathcal{H}$ için
 $R_i \subset S_j$ sağlayan
 bir $S_j \in \gamma$ varsa,
 $\mathcal{H}$ γ 'den daha incedir.

$\mathcal{H} < \gamma$

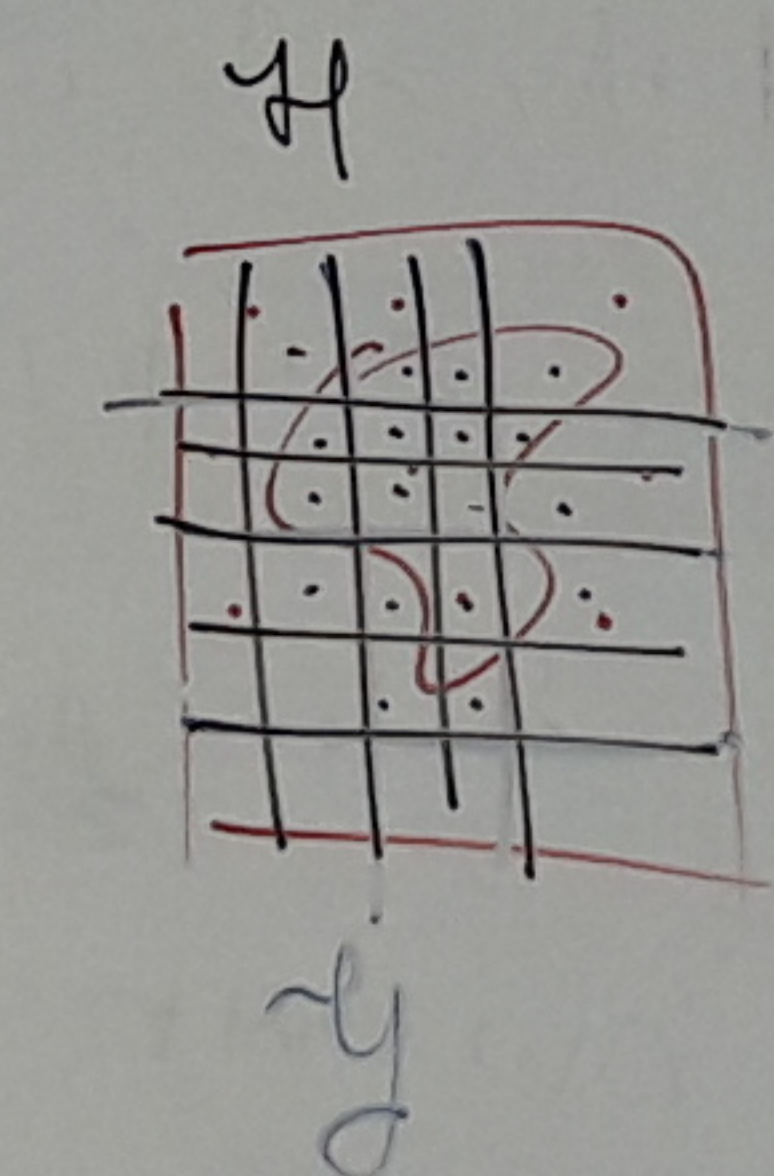


$\mathcal{H} \nless \gamma$

Lemma 1.10

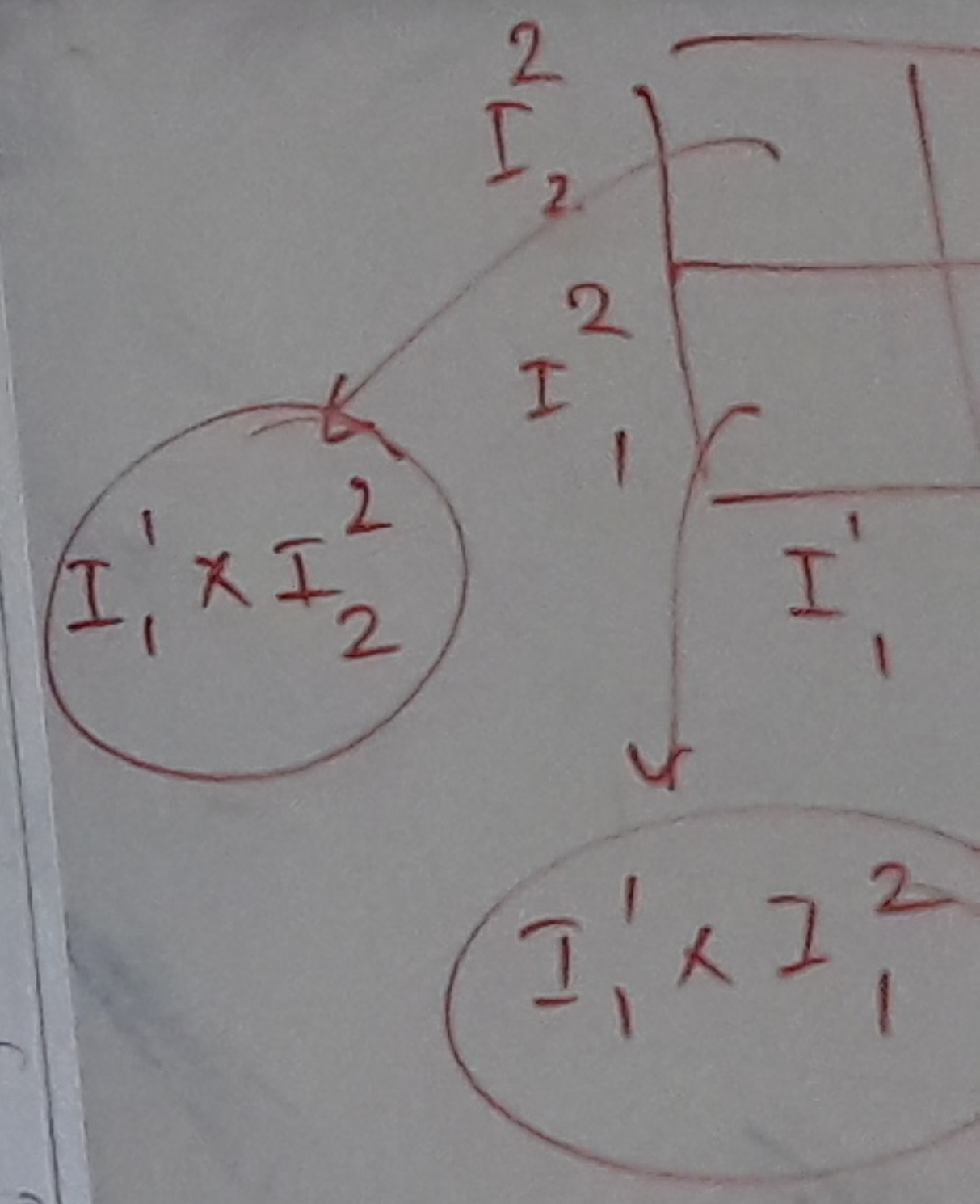
$R \subset \mathbb{R}^n$ bir dik - dörtgen
 olsun $w \in \gamma, \mathcal{H} \in \mathbb{R}$
 üzerinde iki ağ olsun.

Eğer $\mathcal{H}$ γ 'den daha ince
 ise, her $E \subset R$ için,



$$V(E; \mathcal{H}) \leq V(E; \gamma)$$
 (üst toplamış)

$$v(E; \mathcal{H}) \geq v(E; \gamma)$$
 (Alt - Toplamış)



Tanım 1.8