

Analysis IV, Odev 2 : Teslim tarihi Sali, Mart 21

1. $g : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ intgrellenebilir ve her noktada $g(x) \geq 0$ olsun. Ayrica,

$$\int_1^3 g(x)dx = 1,$$

olsun. O zaman,

$$\int_1^9 g(\sqrt{x})dx < 2\pi,$$

oldugunu ispatlayiniz.

2. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ surekli olsun. Eger her $c \in (a, b)$ icin,

$$\alpha \int_a^c f(x)dx + \beta \int_c^b f(x)dx = 0,$$

saglayan $\alpha \neq \beta$ varsa, f 'nin $[a, b]$ uzerinde $f \equiv 0$ oldugunu ispatlayiniz.

3. $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ surekli ve turevlenebilir olsun ve $\phi([a, b])$ uzerinde f surekli olsun. O zaman,

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)dt = \int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)dx,$$

oldugunu kanitlayiniz. Bir ornek vererek, f sadece integrellenebilir ise, bu gecerli olmayabilecegini gosteriniz.

- 4.

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy^3 - yx^3}{x^2 + y^2} & \text{yoksa} \end{cases}$$

olsun. O zaman, f 'nin turevlenebilir oldugunu, f_x ve f_y 'nin her noktada turevlenebilir oldugunu ama

$$f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0),$$

oldugunu ispatlayiniz.

5. $f(x, y) = xy + x^2 \sin(x)$ ve $u = x + 2 \sin(y)$ ve $v = 2x - \sin(y)$ olsun. O zaman, f_u ve f_v hesaplayiniz.

6. Ortalama deger teoremi kullanarak bunu ispatlayiniz. Eger $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ bir acik konveks kume U uzerinde turevlenebilir ise ve U uzerinde $\|f'\| < M$ gecerli ise, her iki $x, y \in U$ icin,

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|,$$

oldugunu ispatlayiniz.

7. $U \subset \mathbb{R}^n$ acik olsun ve $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ bir $\mathcal{C}^1$ fonksiyon olsun. $a \in U$ olsun ve $\det(f'(a)) \neq 0$ olsun. O zaman bir r icin f 'nin $B_r(a)$ uzerinde 1 - 1 oldugunu ispatlayiniz. (Ters fonksiyon teoremi kullanmadan).

8. Ters fonksiyon teoremin ifadesi yaziniz.

9. Bir $r > 0$ icin $B_r(1, 1)$ uzerinde surekli ve kısmi turevler surekli olan ve

$$u^5 + xv^2 - y + w = 0, \quad v^5 + yu^2 - x + w = 0, \quad w^4 + y^5 - x^4 = 1,$$

saglayan $u(x, y), v(x, y), w(x, y)$ oldugunu ispatlayiniz.