

$0 \leq |f|$ olduğu için

$$\int |f(y)| dy \geq 0, \quad \int |f(y)| dy \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

Quiz Soruları

① $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli olsun.

0 zaman,

$$\int_0^1 |f(x)| dx = 0 \iff$$

$f \equiv 0$ olduğunu ispatlayınız.

Cevap a) $f \equiv 0$ olsun.

$P: \{0=t_0, 1=t_1\}$ alalım.

$$L(f, P) := \inf_{x \in [0,1]} f(x) (1-0) = 0$$

$$U(f, P) := \sup_{x \in [0,1]} f(x) (1-0) = 0$$

$$\Rightarrow \sup_P L(f, P) = 0 = \inf_P U(f, P)$$

$$\Rightarrow f \text{ integrellenebilir ve } \int_0^1 f dx = \int_0^1 0 \cdot dx = 0$$

$$b) F(x) := \int_0^x |f(y)| dy$$

Not: $|f(y)|$ sürekli (çünkü f sürekli)

$P: \{0=t_0, 1=t_1\}$ alalım.

Not: $|f(y)|$ sürekli (Çünkü f sürekli)

(2)

Sürekli fonksiyonlar her
sınırlı aralık'ta integrellenebilir
(Teorem,)
 $\Rightarrow |f|$ $[0, x]$ üzerinde derste
yaptık

Integrellenebilir. $\Rightarrow$

$$F(x) := \int_0^x |f(y)| dy \text{ Tanımlıdır.}$$

Integral'in Temel özelliklerinden

$$\int_0^x |f(y)| dy + \int_x^1 |f(y)| dy = \int_0^1 |f(y)| dy = 0$$

$$\int_x^1 |f(y)| dy \geq 0, \int_0^x |f(y)| dy \geq 0$$

$0 \leq |f|$ olduğu için

$\Rightarrow$ özellikli

$$\int_0^1 |f(y)| dy = 0.$$

$$\Rightarrow F(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

Analizin Temel Teoremi:

$$\forall x \in [0, 1], |f(x)| := F'(x) \quad / \quad f \text{ sürekli}$$

$$\Rightarrow |f(x)| = 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$F(x) := \int_0^x f(y) dy$$

$$\Rightarrow \forall x \quad F'(x) = f(x)$$

(2)

İspat

İspat

İntegrelenilmesi biz sadece
Sınırlı fonksiyonlar için
Tanımlamıştık.

$$\Rightarrow \exists M \quad |f(x)| \leq M \quad \forall x \in [0,1]$$

Şimdi,

$$\left| \int_0^1 f(x) x^n dx \right| \leq \int_0^1 |f(x)| x^n dx \leq M \int_0^1 x^n dx = M \frac{1}{n+1}$$

Başka İspat

Eğer bir $c \in [0,1]$

için $|f(c)| > 0$,

Sürekliliğin Tanım dan,

öyle bir $\delta > 0$ var ki

$|x-c| < \delta, x \in [0,1]$ ise

$$|f(x)| > \frac{|f(c)|}{2}$$

$$\Rightarrow 0 \geq \frac{|f(c)|}{2} \delta$$

Çünkü

$$|f| \equiv 0 \Leftrightarrow f \equiv 0 \quad \square$$

δ uzunluk

bir aralık $[d,e]$

üzerinde

$$|f(x)| > \frac{f(c)}{2}$$

Ama

$$\int_0^1 |f(x)| dx =$$

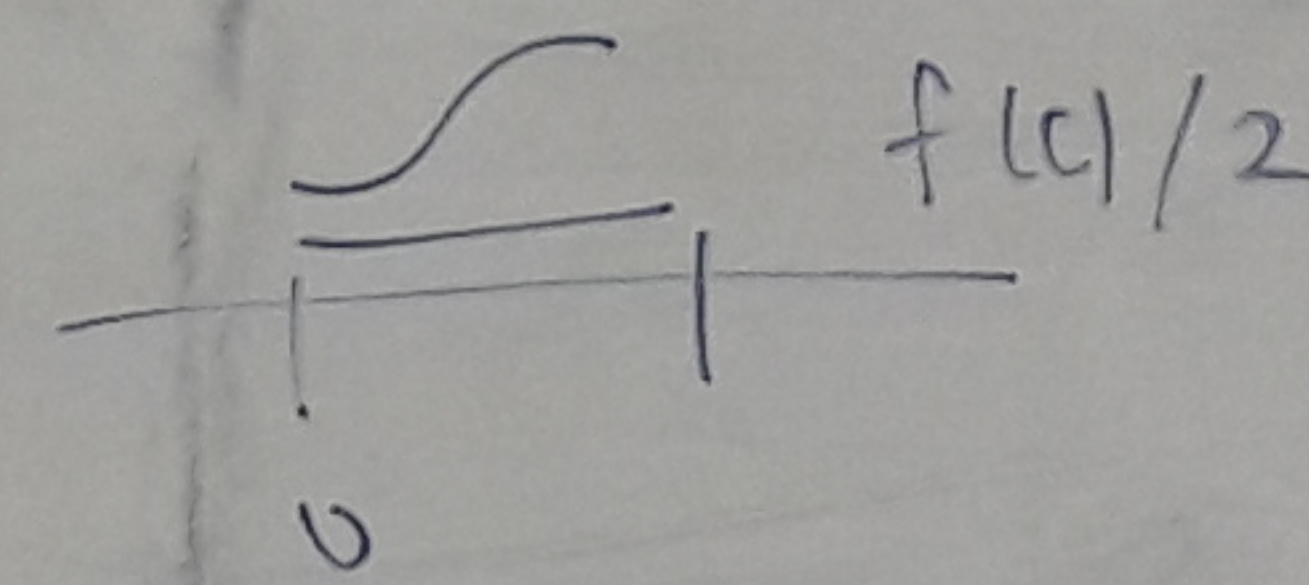
$$\int_0^d |f(x)| dx +$$

$$\int_d^e |f(x)| dx +$$

$$\int_e^1 |f(x)| dx$$

$$\geq \frac{|f(c)|}{2} (e-d)$$

$$\geq \frac{|f(c)|}{2} \delta$$



③

Çelişki!

$$f(x) > \left| \frac{f(c)}{2} \right|$$

$$\Rightarrow 0 \geq \frac{|f(c)|}{2} \delta$$

$$\text{Sonuç} \quad |f| \equiv 0 \Leftrightarrow f \equiv 0 \quad \square$$

Çelişki!

$$\begin{aligned} &\geq \frac{|f(c)|}{2} (e-d) \\ &\geq \frac{|f(c)|}{2} \delta \end{aligned}$$

Σ

(2)

$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ Integ.

olsun. 0 Zaman

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) x^n dx = 0$$

olduğunu gösteriniz.

İspat

İntegrelenmesi biz sadece Sınırlı fonksiyonlar için Tanımlamıştık.

$$\Rightarrow \exists M \quad |f(x)| \leq M \quad \forall x \in [0, 1]$$

Bunları biliyoruz

$$(a) - \int_0^1 |f(x)| dx \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 |f(x)| dx$$

$$\text{Çünkü} \quad -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

$$\Rightarrow \left| \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \int_0^1 |f(x)| dx$$

$$\begin{aligned} \text{Şimdi,} \quad \left| \int_0^1 f(x) x^n dx \right| &\leq \int_0^1 |f(x)| x^n dx \\ &\leq M \int_0^1 x^n dx = 0 \quad \frac{M}{n+1} \end{aligned}$$

Bun İntegrelenebilir f için (4)

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_0^1 f(x) x^n dx \right| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M}{n+1} = 0 \quad \square \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{-\cos\left(\frac{2n+1}{2n}\right) + \cos\left(\frac{1}{2n}\right)}{2n \sin\left(\frac{1}{2n}\right)} \Rightarrow \int_0^1 \sin(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{2n}\right) - \cos\left(\frac{2n+1}{2n}\right)}{2n \sin\left(\frac{1}{2n}\right)} = \cos(0) - \cos(1)$$

$$(3) \int_0^1 \sin(x) dx$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 \sin(x) dx. \quad (5)$$

$\sin(x)$ sürekli $\Rightarrow [0, 1]$
 üzerinde İntegrelenbilir.

$\epsilon > 0$ olsun. 0 zaman ayda

bir δ var ki her $|P| < \delta$
 olan noktalı parçalamış için $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$

$$\left| \int_0^1 \sin(x) dx - \sum_{i=0}^n f(c_i) (t_i - t_{i-1}) \right| < \epsilon$$

$\epsilon > 0$ olsun.

δ bu şekilde seçelim. $n > \frac{1}{\delta}$ seçelim.

$$P := \left\{ 0 \leq \frac{1}{n} \leq \dots \leq \frac{n-1}{n} \leq 1 \right\}$$

$$C_i = \frac{i+1}{n}$$

(2)

İspat

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - \sum_{i=0}^n f(t_i) (t_i - t_{i-1}) \right| < \epsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \sin\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + \sin\left(\frac{n-1}{n}\right) + \sin(1) \right] \quad (6)$$

$$\cos\left[\frac{i}{n} + \frac{1}{2n}\right] - \cos\left[\frac{i-1}{n} + \frac{1}{2n}\right] = -2 \sin\left(\frac{i}{n}\right) \sin\left(\frac{1}{2n}\right)$$

$a = \frac{1}{n} \quad \downarrow \quad r = \frac{i}{n} - \frac{1}{2n}$

$$\Rightarrow -2 \sin\left(\frac{1}{2n}\right) \sum_{i=1}^n \sin\left(\frac{i}{n}\right) = \left[\cos\left(\frac{3}{2n}\right) - \cos\left(\frac{1}{2n}\right) \right] + \left[\cos\left(\frac{5}{2n}\right) - \cos\left(\frac{3}{2n}\right) \right] + \dots + \left[\cos\left(\frac{2n+1}{2n}\right) - \cos\left(\frac{2n-1}{2n}\right) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{-\cos\left(\frac{2n+1}{2n}\right) + \cos\left(\frac{1}{2n}\right)}{2n \sin\left(\frac{1}{2n}\right)} \Rightarrow \int_0^1 \sin(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{2n}\right) - \cos\left(\frac{2n+1}{2n}\right)}{2n \sin\left(\frac{1}{2n}\right)}$$

$$= \cos(0) - \cos(1) \quad \square$$