

sürekli.

Sağlayan f 'a' noktasında türevlenebilir
varsa, f 'a' noktasında türevlenebilir
denir. Ayrıca, $f'(a) = L_a$.

Hatırlatma

Çok değişkenli analiz

2.1 Tanım $f: E \rightarrow \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^n$
 $a \in E$. Eğer her $\epsilon > 0$
için $|x - a| < \delta, x \in E$
demek $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ sağlayan
bir $\delta > 0$ varsa,

0 Zaman f 'a' noktasında
sürekli denir.

Not 2.2 $a, b \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$

$$|a - b| = \left[\sum_{i \in [n]} (a_i - b_i)^2 \right]^{1/2}$$

Şu şekilde tanımlanır.

Not 2.3 $f: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
 $a \in E$. Eğer her $\epsilon > 0$ için
 $\forall x \in E, |x - a|_n < \delta$ ise

$|f(x) - f(a)|_m < \epsilon$
sağlayan bir $\delta > 0$ varsa, f 'a'
noktasında sürekli denir.

bir $\delta > 0$ varsa,
 0 Zaman f 'a' noktada
 sürekli denir.

$|f(x) - f(a)| < \epsilon$
 sağlayan bir $\delta > 0$ varsa, f 'a'
 noktada sürekli denir.

($\Rightarrow$)

Not 2.4 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$f = (f_1, \dots, f_m)$$

$$f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Basit: f 'a' noktada
 sürekli ($\Leftrightarrow$) Her f_i
 sürekli.

Tanım 2.5 (Türevlenebilirliği)

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad a \in \mathbb{R}^n$$

Eğer

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - L_a(h)|}{|h|} = 0$$

↪ Matris $m \times n$

sağlayan bir lineer fonksiyon $L_a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
 varsa, f 'a' noktada türevlenebilir
 denir. Ayrıca, $f'(a) = L_a$.

Tanı

türevlenebilir

Not 2.6

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

f 'a' noktasında türevlenebilir

$$\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ var.}$$

limit $f'(a)$ şeklinde yazılır.

$$\sim \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - hf'(a)}{h} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - f'(a)h|}{|h|} = 0. \quad (9)$$

$$L_a(h) = f'(a) \cdot h$$

$\hookrightarrow 1 \times 1$ matris.

Sonuç,

Çok değişkenli Tanım

Tek değişkenli Tanımla uyumludur.

Tanım 2.7 Kısmi Türevler

$$f: U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$\hookrightarrow$ açık

$a \in U$.

$$f = (f_1, \dots, f_m)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_i(a + h e_j) - f_i(a)}{h}$$

$$j \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Teorem 2.8 (Kübra Kuş)

(4)

$$f: U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad f = (f_1, \dots, f_m)$$

$\hookrightarrow$ açık

$a \in U$. Eğer bütün kısmi

Türevler $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ U bölgesinde var

ve 'a' noktada sürekli ise,

f 'a' noktada Türevlenebilir

$$|f(a+h) - f(a) - \sum h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)| < \varepsilon \left(\sum h_i^2 \right)^{1/2}$$

Şimdi $f = (f_1, \dots, f_m)$ $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ olsun.

Soru

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = 1$$

İstediğimiz

$$f'(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2/2} dx$$

hesaplayalım.

$$\int f'g = fg - \int fg'$$

Ama

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{(h^2 + k^2)^{3/2}}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{h^2}{(h^2 + k^2)^{3/2}} \right| = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{h^2}{k^3} \right| \neq 0 \quad (6)$$

Sonuç, $f(0,0)$ noktasında
Türevlenebilir değil.

Teorem 2.8'nin İspat (Kısmi Türevler
Sürekli $\Rightarrow$
Türevlenebilir)

İlk olarak $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ için
ispatlayalım.

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^n \left[f(a_1+h_1, \dots, a_{i-1}+h_{i-1}, a_i+h_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \right. \\ \left. - f(a_1+h_1, \dots, a_{i-1}+h_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \right]$$

Ortalama değer Thm $\left(\begin{array}{l} y \rightarrow f(a_1+h_1, \dots, a_{i-1}+h_{i-1}, y, a_{i+1}, \dots, a_n) \\ \text{ için} \\ y \in [0, 1] \end{array} \right)$
not: $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ U üzerinde var.

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1+h_1, \dots, a_{i-1}+h_{i-1}, a_i+\lambda_i h_i, a_{i+1}, \dots, a_n) h_i \quad (7)$$

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ U üzerinde sürekli.

$\varepsilon > 0$. $\exists \delta > 0$ $\mid \|h\| < \delta$ ise

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+h) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right| < \varepsilon.$$

$$\left(\sum h_i^2 \right)^{1/2} < \delta \Rightarrow$$

$$\left| f(a+h) - f(a) - \sum h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right| < \varepsilon \sum |h_i|$$

hesaplaymız.

Cauchy-Schwarz

$$\sum |h_i| \leq \left(\sum |h_i|^2 \right)^{1/2} \sqrt{n}$$

$$\left(\sum a_i h_i \right) \leq \left(\sum a_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum h_i^2 \right)^{1/2}$$

$$\left| f(a+h) - f(a) - \sum h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right| < \varepsilon \left(\sum h_i^2 \right)^{1/2} \sqrt{n}$$

$$\Rightarrow \frac{\left| f(a+h) - f(a) - \sum h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right|}{|h|} < \varepsilon \sqrt{n}$$

$$\text{i.e. } |h| < \delta \Rightarrow \frac{\left| f(a+h) - f(a) - \sum h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right|}{|h|} < \varepsilon \sqrt{n} \quad (8)$$

$$\varepsilon \rightarrow 0$$

Örneğe,

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{\left| f(a+h) - f(a) - \sum h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right|}{|h|} = 0.$$

Şimdi $f = (f_1, \dots, f_m)$ $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ olsun.

→ (Quiz) $f_1, \dots, f_m$ 'a' noktasında türevlenebilir
Soru ise f türevlenebilir
→ 'a' noktasında

$$|f(a+h) - f(a) - \sum h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)| < \varepsilon \left(\sum h_i^2 \right)^{1/2}$$

Şimdi $f = (f_1, \dots, f_m)$ $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ olsun.

Soru

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = 1$$

İstediğimiz

$$f'(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2/2} dx$$

hesaplayalım.

$$\int f'g = fg - \int fg'$$

Ama

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{(h^2 + k^2)^{3/2}}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{h^3}{\frac{3}{2} h^2 k^2} \right| \neq 0 \quad (6)$$

Sonuç, $f(0,0)$ noktada
Türevlenebilir değil.