

Kalkülüs'ün Temel Teoremi

Teorem 1.15 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

sürekli olsun. 0 $\neq$ aman,

$$F(x) := \int_a^x f(y) dy$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon

$[a, b]$ üzerinde türevlenebilir

ve her $x \in [a, b]$ için $F'(x) = f(x)$

İspat

$c \in [a, b]$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\int_a^{c+h} f(x) dx - \int_a^c f(x) dx}{h} \right]$$

$[a, b]$ üzerinde türevlenebilir
ve her $x \in [a, b]$ için $F'(x) = f(x)$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_c^{c+h} f(x) dx}{h}$$

$\varepsilon > 0$ sabit olsun. f

$[a, b]$ üzerinde sürekli olduğunu

için, $\forall \varepsilon > 0 \mid \exists \delta > 0 \Rightarrow |f(c+k) - f(c)| \leq \varepsilon$

$\downarrow$
c'de süreklilik
kullanıp

$$\Rightarrow \int_c^{c+h} (f(c) - \varepsilon) dx \leq \int_c^{c+h} f(x) dx \leq \int_c^{c+h} (f(c) + \varepsilon) dx \quad (2)$$

$$\Rightarrow h(f(c) - \varepsilon) \leq \int_c^{c+h} f(x) dx \leq (f(c) + \varepsilon)h$$

$$\Rightarrow \left| f(c) - \frac{\int_c^{c+h} f(x) dx}{h} \right| \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_c^{c+h} f(x) dx}{h} = f(c)$$

$$\Rightarrow F'(c) = f(c) \quad \square$$

Corollary 1.16 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Integrelebilir olsun. x

$$F(x) := \int_a^x f(y) dy$$

Eğer $c \in [a, b]$ ve f 'c' noktada sürekli ise,

F 'c' noktada türevlenebilir

ve $F'(c) = f(c)$.

(3)

Theorem 1.17 (Kalkulus'un
Temel Teorem II)

$F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir

olsun ve $f = F'$ integrelenebilir

olsun. O zaman her $c \in [a, b]$

için
$$\int_a^c f(x) dx = F(c) - F(a)$$

ispat f $\int_a^c$ Integrelenebilir bir L için,
 $[a, c]$ üzerinde

ancak ve ancak her $\varepsilon > 0$

için öyle bir $\delta > 0$ var ki

eğer $P: a = d_0 \leq \dots \leq d_n = b$

$$t_1 \in [d_0, d_1], \dots, t_n \in [d_{n-1}, d_n]$$

$|P| < \delta$ sağlayan bir noktali

parçalanış ise

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(d_i - d_{i-1}) - L \right| < \varepsilon$$

$\epsilon > 0$ δ seçelim. "Limit" L olsun.

$$p: d_0 = a \leq \dots \leq d_n = c$$

$$t_i \in [d_{i-1}, d_i]$$

$|P| < \delta$ sağlayan bir nokta
parçalanış olsun.

$$F(c) - F(a) = \sum_{i=1}^n F(d_i) - F(d_{i-1})$$

Ortalama değer Tm (F $[d_{i-1}, d_i]$
üzerinde türetkenliği)

$$\Rightarrow \exists t_i \in [d_{i-1}, d_i]$$

⑤

$$F(d_i) - F(d_{i-1}) = F'(t_i) (d_i - d_{i-1})$$

$$= f(t_i) (d_i - d_{i-1})$$

$$\Rightarrow F(c) - F(a) = \sum_{i=1}^n f(t_i) (d_i - d_{i-1})$$

$$\Rightarrow \left| F(c) - F(a) - L \right| \leq \epsilon$$

$$\Rightarrow F(c) - F(a) = L$$

üzerinde türetlenebilir)

sonuç,

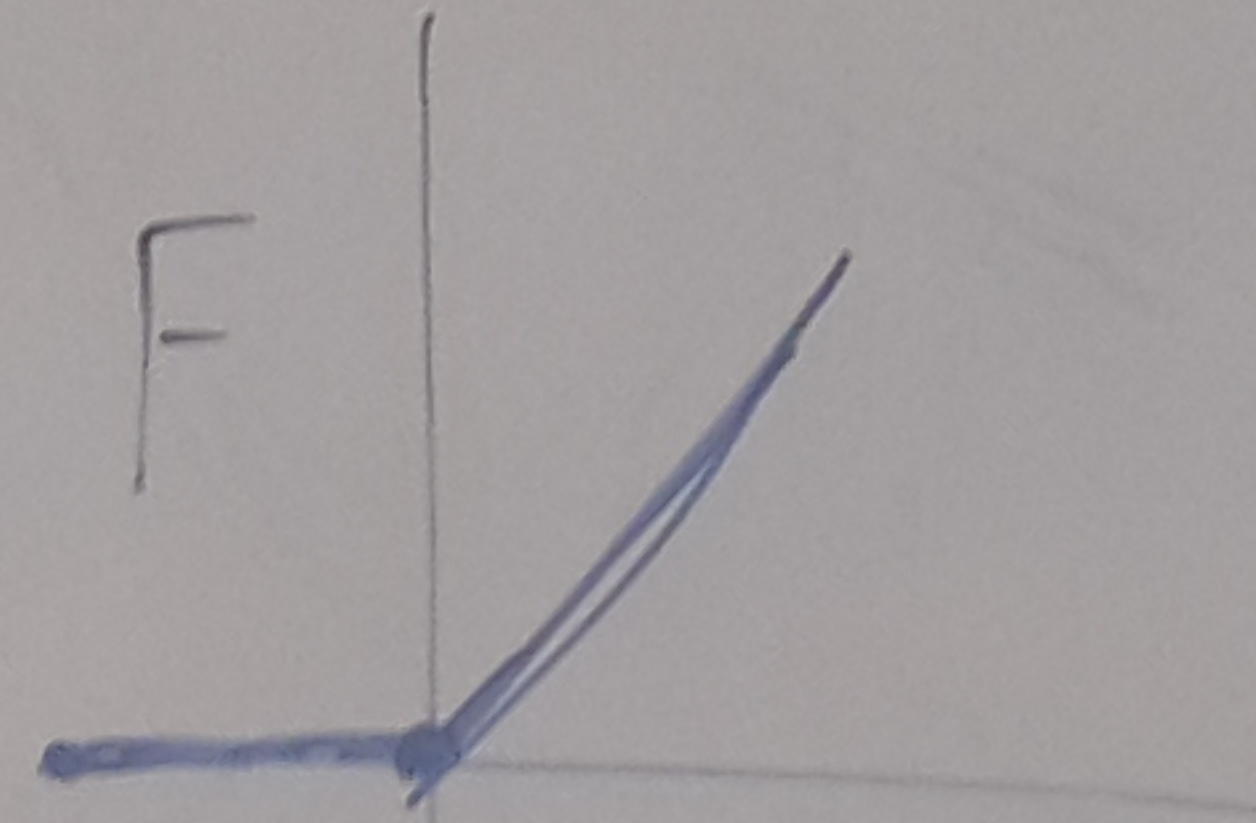
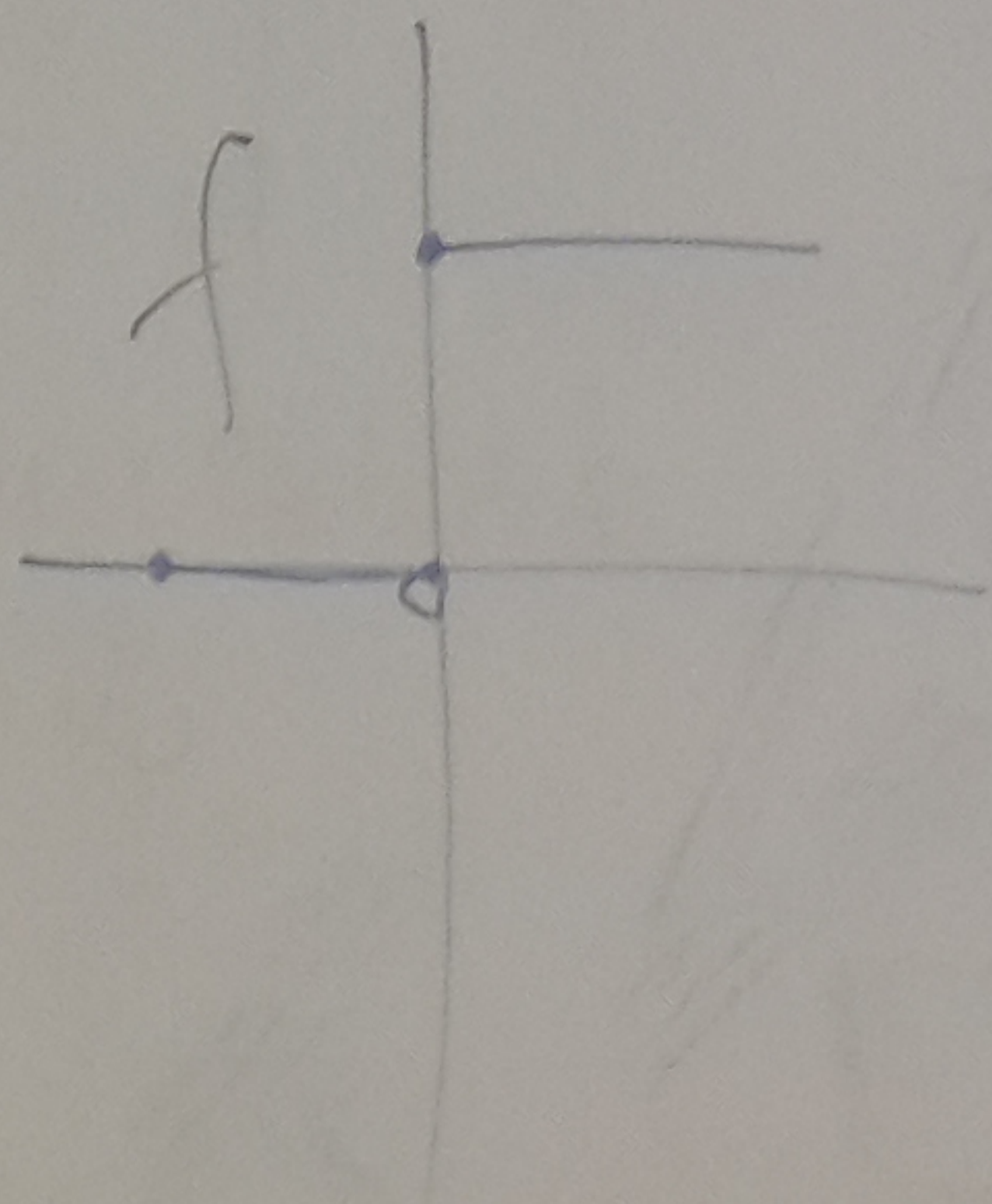
$$F(c) - F(a) = \int_a^c f(x) dx$$

Basit :

$$F(x) := \int_{-1}^x f(y) dy$$

örnek 1-18

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1] \\ 0 & x \in [-1, 0) \end{cases}$$



$$= \begin{cases} 0 & -1 \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

'0' noktada Türetlenebilir değil.

$\forall n, |f_n| \leq M$
ve ③ f İntegrelenebilir mi?

Örnek 1.19

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

f' Sınırlı mı değil!

0'ın etrafında

$$f'\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$$

Demek $[-1, 1]$ üzerinde
İntegrelenebilir değil
(Sınırlı değil)

⑦:

f' Sınırlı bir fonksiyon!
0'ın etrafında

$$f\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$$

Theorem (Dominated
convergence
Theorem) 1.20

$$\{f_n\} \quad [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

integrelenebilir olsun

ve ① $\forall x \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ olsun

ve ② bir $M > 0$ için

$$\forall n, \quad |f_n| \leq M$$

ve ③ f Integrelenebilir olsun.

0 Zaman

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad (2)$$

LEBESGUE

İspat

Kendi Kendine
Okuyunuz.

(9)

Not: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ var mı?

örnek 1.21

$\{r_n\}$ $[0, 1]$ 'deki Tüm rasyonel sayıların numaralandırma olsun.

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in r_n \\ 0 & x \neq r_n \end{cases}$$

$$f_n = \sum_{k=1}^n g_k(x)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{yoksa.} \end{cases}$$

→ Eger bir fonksiyon sadece sonlu noktalarda süreksiz ise, f İntegrelenbilirdir.

→ Her f_n İntegrelenbilir, her n için $|f_n| \leq 1$

$$|f_n| \leq 1$$

(10)

Ama, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ İntegrelenabilir
değil.

Not 1.22 Eğer $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

sadece sayılabilir sonsuz noktalarda

sürekli ise, f İntegrelenir.