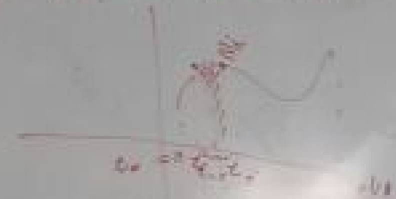
Tanım (Hatırlatma)

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ sınırlı, tanımlı bir fonksiyon olsun.

$[a,b]$ n parçaya bölelim

Eğer her her $\varepsilon > 0$ için;



$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$ sağlayan bir P parçalanışı

varsa fonksiyon integrallenebilir denir.

$M_i = \sup\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$

$m_i = \inf\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$

$= \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (t_i - t_{i-1})$

$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i (t_i - t_{i-1})$

Geçen derste bunları göstermiştik

Teorem $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli ise, f integrallenebilirdir.

Örnek $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$

olsun. f $[0,1]$ üzerinde

Tanım 1.12 (Genel Riemann Toplamı)

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ sınırlı fonksiyon olsun.

$P \begin{cases} a = c_0 \leq \cdots \leq c_n = b & \text{bir parçalanış olsun} \\ t_i \in [c_{i-1}, c_i] & \text{olsun} \quad i \in [n] \end{cases}$

$\hookrightarrow \{1, \ldots, n\}$

t_i

varsa fonksiyon integrallenebilir denir.

$M_i=\sup\{f(x): t_{i-1}\le x\le t_i\}$

$m_i=\inf\{f(x): t_{i-1}\le x\le t_i\}$

$U(f,P)=\sum_{i=1}^{n} M_i\cdot(t_i-t_{i-1})$

$L(f,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i(t_i-t_{i-1})$

Geçen derste bunları göstermiştik

Teorem $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ sürekli ise, f integrallenebilirdir.

Örnek $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\in\mathbb{Q}^c\end{cases}$

olsun. f $[0,1]$ üzerinde integrellenebilir değil.

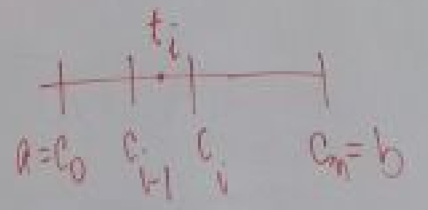
(2)

Tanım 1.12 (Genel Riemann Toplamı)

$f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ sınırlı fonksiyon olsun

$P\begin{cases} a=c_0\le\cdots\le c_n=b & \text{bir parçalanış olsun}\\ t_i\in[c_{i-1},c_i] & \text{olsun } i\in[n]\end{cases}$

$\hookrightarrow\{1,\dots,n\}$

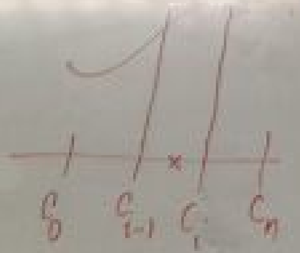


3

$I(f,P) = I(f, \{c_0, \dots, c_n\}, \{t_1, \dots, t_n\})$

$:= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(c_i - c_{i-1})$

→ Genel Riemann Toplamı



Not $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ sınırlı
P Genel parçalanış olsun.
O zaman

$$\boxed{L(f,P) \le I(f,P) \le U(f,P)}$$

$P: \{c_0 = a \le \dots \le c_n = b\} + t_i \in [c_{i-1}, c_i] \quad i \in [n]$

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \inf\{f(x) : x \in [c_{i-1}, c_i]\}(c_i - c_{i-1})$$

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \sup\{f(x) : x \in [c_{i-1}, c_i]\}(c_i - c_{i-1})$$

$$I(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(c_i - c_{i-1})$$

4

Teorem 1.14 $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ sınırlı olsun.
O zaman bunlar birbirini gerektiriyor

1. f İntegrallenebilir
2. Öyle bir α var ki her $\varepsilon > 0$ için aşağıdaki

Tanım 1.13 P $[a,b]$ üzerinde bir Genel Parçalanış olsun
(Noktalı Parçalanış)

$P = \{a = c_0 \le \dots \le c_n = b\} + t_i \in [c_{i-1}, c_i] \quad i \in [n]$

O zaman

$$I(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(c_i - c_{i-1})$$

Tanım 1.13 P $[a,b]$ üzerinde bir Genel Parçalanış olsun (Noktalı Parçalanış)

$$P = \{a = c_0 \le \dots \le c_n = b\} + t_i \in [c_{i-1}, c_i] \quad i \in [n]$$

O zaman

$$|P| := \max_{i \in [n]} |c_i - c_{i-1}|$$

şeklinde tanımlayalım.

Teorem 1.14 $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ sınırlı olsun. O zaman bunlar birbirini gerektiriyor

1. f integrallenebilir
2. Öyle bir α var ki her $\varepsilon > 0$ için aşağıdaki özelliği sağlayan $\delta > 0$ var:

Her $|P| < \delta$ olan noktalı parçalanış için

$$|I(f,P) - \alpha| < \varepsilon$$

Yani parçalanış çok ince ise, Riemann Toplamı 'Integral'e yakın.

Teorem 1.14'nin İspatı

② ⇒ ①

Öyle bir α var ki her $\varepsilon > 0$ için noktalı P parçalanış, $\|P\| < \delta$

$\Rightarrow \quad |I(f,P) - \alpha| < \varepsilon$

sağlayan bir $\delta > 0$ var.

Ne göstermek lazım? Her $\varepsilon > 0$ için

$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$

sağlayan bir parçalanış var.

Hipotez'e göre öyle bir parçalanış $P: \{a = c_0 < \dots < c_n = b\}$ var ki her $t_1 \in [c_0, c_1], \dots, t_n \in [c_{n-1}, c_n]$ için

$$\left| \sum f(t_i)(c_i - c_{i-1}) - \alpha \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

⑤

$\Rightarrow$ seçtiğimiz her $t_i \in [c_{i-1}, c_i] : i \in [n]$ için,

$$\alpha - \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(c_i - c_{i-1}) \leq \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$$

Aynen,

$L(f,P) \geq \alpha - \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow U(f,P) - L(f,P) \leq (\alpha + \frac{\varepsilon}{2}) - (\alpha - \frac{\varepsilon}{2})$

$= \varepsilon.$ $\square$

① ⇒ ②

⑥

sağlayan bir $\delta > 0$ var.

bir parçalanış $P: \{a = c_0 \leq \dots \leq c_n = b\}$ var ki her $t_1 \in [c_0, c_1]$, ..., $t_n \in [c_{n-1}, c_n]$ için $\left| \sum f(t_i)(c_i - c_{i-1}) - \alpha \right| < \frac{\varepsilon}{2}$

(6)

$\Rightarrow$ seçtiğimiz her $t_i \in [c_{i-1}, c_i] : i \in [n]$ için,

$$\alpha - \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(c_i - c_{i-1}) \leq \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\sup_{\substack{t_i \in [c_{i-1}, c_i] \\ i \in [n]}} \sum f(t_i)(c_i - c_{i-1}) \leq \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \sup_{t_i \in [c_{i-1}, c_i]} f(t_i)(c_i - c_{i-1}) \leq \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow U(f, P) \leq \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$$

Aynı,

$$L(f, P) \geq \alpha - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow U(f, P) - L(f, P) \leq \left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$$

(1) $\Rightarrow$ (2)

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sınırlı Integrallenebilir.

Yani, $\varepsilon > 0$ olsun. O zaman $U(f, P) - L(f, P) < \frac{\varepsilon}{2}$ sağlayan bir P var.

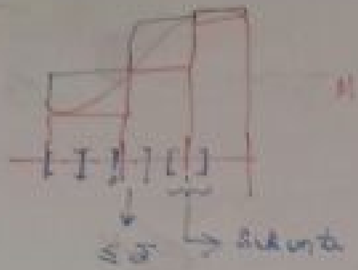
$P: \{a = c_0 \le c_1 \le \cdots \le c_n = b\}$

$M := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ olsun.

$M \cdot n \cdot \delta < \frac{\varepsilon}{2}$ sağlayan bir δ seçelim.

$Q: \{a = d_0 \le \cdots \le d_m = b\}$, $t_i \in [d_{i-1}, d_i]$, $i \in [m]$

$|Q| < \delta$ sağlayan bir noktalı parçalanış olsun.



$M \cdot n \cdot \delta$

$Q_i = [d_{i-1}, d_i] : i \in [m]$ (7)

$P_i = [c_{i-1}, c_i] : i \in [n]$ olsun.

P_i

Q_i

$\#\{ i \mid$ Hiçbir P_j için $Q_i \subset P_j$ geçerli değil $\} \le n.$

---

(8)

$$I(f,Q) = \sum_{i=1}^{m} f(t_i)(d_i - d_{i-1})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{Q_i = [d_{i-1}, d_i] \subset P_j} f(t_i)(d_i - d_{i-1}) \right]$$

$$\le \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{Q_i \subset P_j} \left(\sup_{x \in P_j} f(x)\right)(d_i - d_{i-1}) \right] + M \cdot n \cdot \delta$$

$$\le \sum_{j=1}^{n} \sup_{x \in P_j} f(x)\,(c_i - c_{i-1}) + M n \delta$$

Teorem 1.14'nin I

(2) $\Rightarrow$ (1)

Öyle bir d

Her $\varepsilon > 0$

noktalı

P parçalan

$\Rightarrow$

sağlayan

$\Rightarrow$ S

$d -$

bir δ seçelim.

$Q \; \{a = d_0 \leq \cdots \leq d_m = b\}$, $\in [d_{i-1}, d_i]$, $i \in [m]$

$\|Q\| < \delta$ sağlayan bir noktalı parçalanış olsun.

$\#\left\{ i \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{hiç bir } P_j \text{ için} \\ Q_i \subset P_j \text{ geçerli} \\ \text{değil} \end{array} \right\} \leq n$

(8)

$$I(f,Q) = \sum_{i=1}^{m} f(t_i)(d_i - d_{i-1})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{Q_i = [d_{i-1}, d_i] \subset P_j} f(t_i)(d_i - d_{i-1}) \right]$$

$$+ \sum_{Q_i = [d_{i-1}, d_i]} f(t_i)(d_i - d_{i-1})$$

$Q_i = [d_{i-1}, d_i]$ Hiçbir P_j içinde değil

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{Q_i \subset P_j} \left(\sup_{x \in P_j} f(x) \right) \left(d_i - d_{i-1} \right) \right]$$

$$+ M \cdot n \cdot \delta$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \sup_{x \in P_j} f(x) \left(c_i - c_{i-1} \right) + M n \delta$$

$$= U(f,P) + M n \delta$$

Sonuç: $I(f,Q) \leq U(f,P) + M n \delta$

Aynen: $I(f,Q) \geq L(f,P) - M n \delta$

$$L(f,P) \le \int_a^b f(x)\,dx \le U(f,P)$$

ve $U(f,P) - L(f,P) \le \frac{\varepsilon}{2}$ varsaymıştık

$(*) \Rightarrow \quad I(f,R) \le U(f,P) + Mn\delta = U(f,P) + \frac{\varepsilon}{2}$

$\varepsilon/2 \quad \varepsilon/2 \quad \varepsilon/2 \quad I(f,R) \ge L(f,P) - Mn\delta = L(f,P) - \frac{\varepsilon}{2}$

$L(f,P) \quad U(f,P)$

$$\Rightarrow \left| I(f,R) - \int_a^b f\,dx \right| \le \left| I(f,R) - U(f,P) \right| + \left| U(f,P) - \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Sonuç

$|R| < \delta$ noktalı parçalanış

$$\Rightarrow \left| I(f,R) - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

10

$\delta > 0$ Thm 1.14 ε f, g

δ

$|P| \le \delta$ $\quad P: a = c_0 \le \dots \le c_n = b$

$t_i \in [c_{i-1}, c_i]$

f Integrallenebilir ($f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sınırlı)

$\Leftrightarrow$ Bir α var ve

α ... sağlıyor

$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$

$\delta > 0$ Thm 1.14 $\quad \varepsilon \quad$ f, g 10

δ

$|P| \leq \delta$ $\quad P: a = c_0 \leq \cdots \leq c_n = b$

$t_i \in [c_{i-1}, c_i]$

$$\Sigma(f, P) = \sum_{i=1} f(t_i)(c_i - c_{i-1})$$

$$\sum (f+g)(t_i)(c_i - c_{i-1})$$

f Integrallenebilir $\left(\begin{array}{c} f : [a,b] \to \mathbb{R} \\ \text{sınırlı} \end{array}\right)$

$\Longleftrightarrow$ Bir α var ve α bunu sağlıyor:

Her $\varepsilon > 0$ için aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\delta > 0$ var.

$|Q| < \delta$ sağlayan her noktalı parçalanış için

$$|\Sigma(f, Q) - \alpha| < \varepsilon.$$