

Analiz IV - Ders II

Tanım 1.1 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ olsun.

$$I: a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$$

Bu bir parçalanış denir.

Tanım 1.2 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Sınırlı

olsun ve I bir parçalanış

$$\text{olsun } I: a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$$

0 zaman,

$$U(f, I) := \sum_{i=1}^n M_i (a_i - a_{i-1})$$

ÜST
RIEMANN
TOPLANIS

$$M_i := \sup_{x \in [a_{i-1}, a_i]} f(x)$$

$$L(f, I) := \sum_{i=1}^n m_i (a_i - a_{i-1})$$

$$m_i := \inf_{x \in [a_{i-1}, a_i]} f(x)$$

ALT
RIEMANN
TOPLANIS

Lemma 1.3

$I, J [a, b]$ 'nin iki parçalanış olsun.

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Sınırlı olsun.

0 zaman,

$$L(f, I) \leq U(f, J)$$

$$\inf_{x \in I} f(x) = - \sup_{x \in I} -f(x)$$

Lemma 1.4

$$I = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n = b$$

$$\text{ve } J = b_0 \leq b_1 \leq \dots \leq b_m = b$$

$[a, b]$ 'nin iki parçalanışları olsun. Eğer her b_i $\{a_0, \dots, a_n\}$ içinde ise, o zaman I J 'den daha **ince** denir.

Lemma 1.5 I, J $[a, b]$ 'nin

iki parçalanışları olsun. O zaman hem I 'den, hem J 'den daha **ince** bir parçalanış $\neq$ var.

$$\left(\begin{array}{l} I: a_0 \leq \dots \leq a_n = b \\ J: b_0 \leq \dots \leq b_m = b \\ K: c_0 \leq \dots \leq c_k = b \end{array} \right)$$

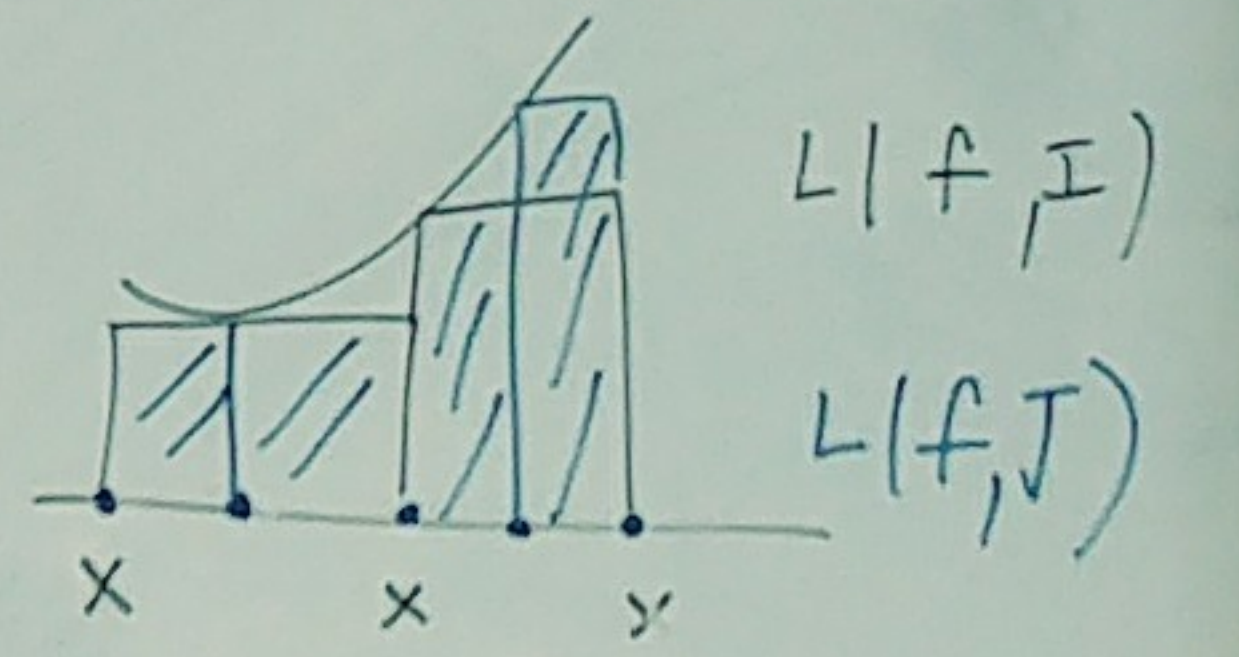
Lemma 1.6 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **sum** olsun.

I ve J $[a, b]$ 'nin iki parçalanışları olsun ve J I 'den daha **ince** olsun.

$$L(f, I) \leq L(f, J)$$

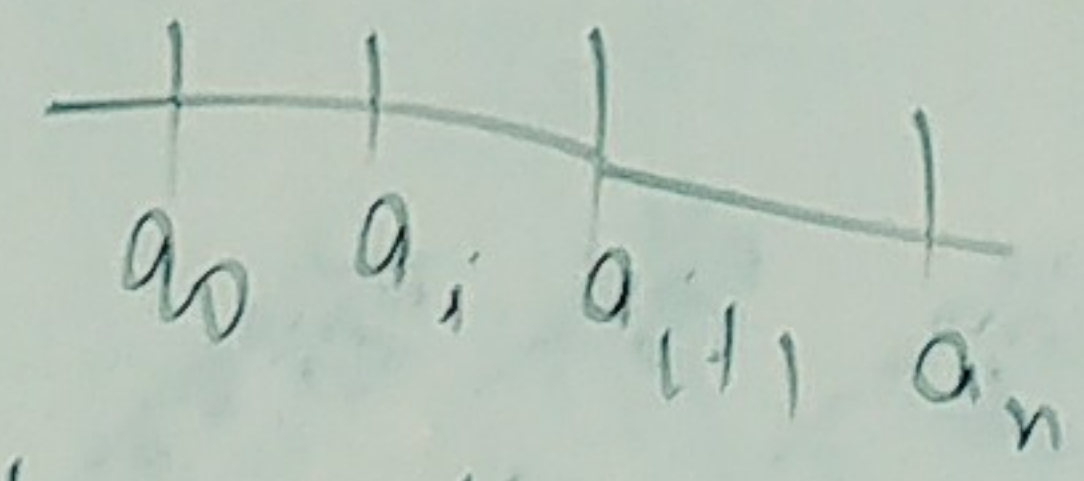
$$\text{ve}$$

$$U(f, I) \geq U(f, J)$$

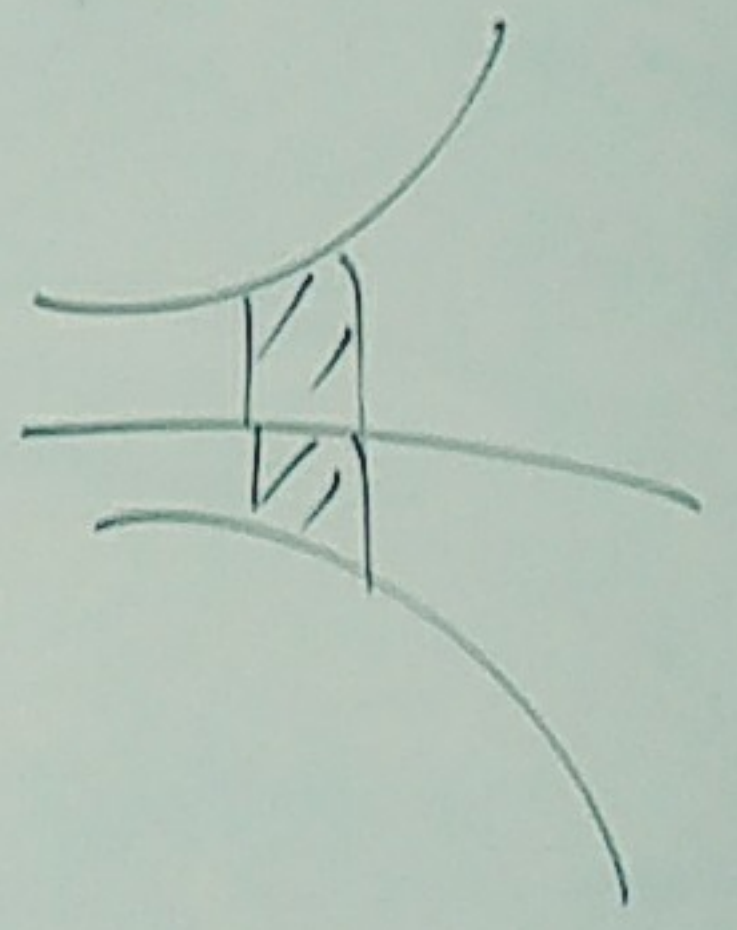


İspat

$$I: a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n = b$$



J I 'den daha **ince**.



$I_1: [a_0, a_1], \dots, I_n: [a_{n-1}, a_n]$ olsun.

J 'deki her aralık I deki bir aralık içindedir.

I_1 içinde olan J deki aralıklar

$J_1^1, \dots, J_1^{i_1}$ şeklinde yazalım.

I_n içindeki J 'den gelen aralıklar

$J_n^1, \dots, J_n^{i_n}$ şeklinde yazalım.

$$I_1 = J_1^1 \cup \dots \cup J_1^{i_1}$$

$$I_n = J_n^1 \cup \dots \cup J_n^{i_n}$$

$$L(f, J) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{i_j} \left[\inf_{x \in J_j^k} f(x) \right] |J_j^k|$$

$$L(f, I) = \sum_{j=1}^n \left[\inf_{x \in I_j} f(x) \right] |I_j|$$

Am,

$$\inf_{x \in J_j^k} f(x) \geq \inf_{x \in I_j} f(x)$$

$$(J_j^k \subset I_j)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow L(f, J) &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{i_j} \left[\inf_{x \in J_j^k} f(x) \right] |J_j^k| \\ &\geq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{i_j} \left[\inf_{x \in I_j} f(x) \right] |J_j^k| \\ &= \sum_{j=1}^n \left[\inf_{x \in I_j} f(x) \right] \sum_{k=1}^{i_j} |J_j^k| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^n \left[\inf_{x \in I_j} f(x) \right] |I_j| \quad (4) \\ &\quad \sum_{k=1}^{i_j} |J_j^k| = |I_j| \end{aligned}$$

Gunkw

Gonue,

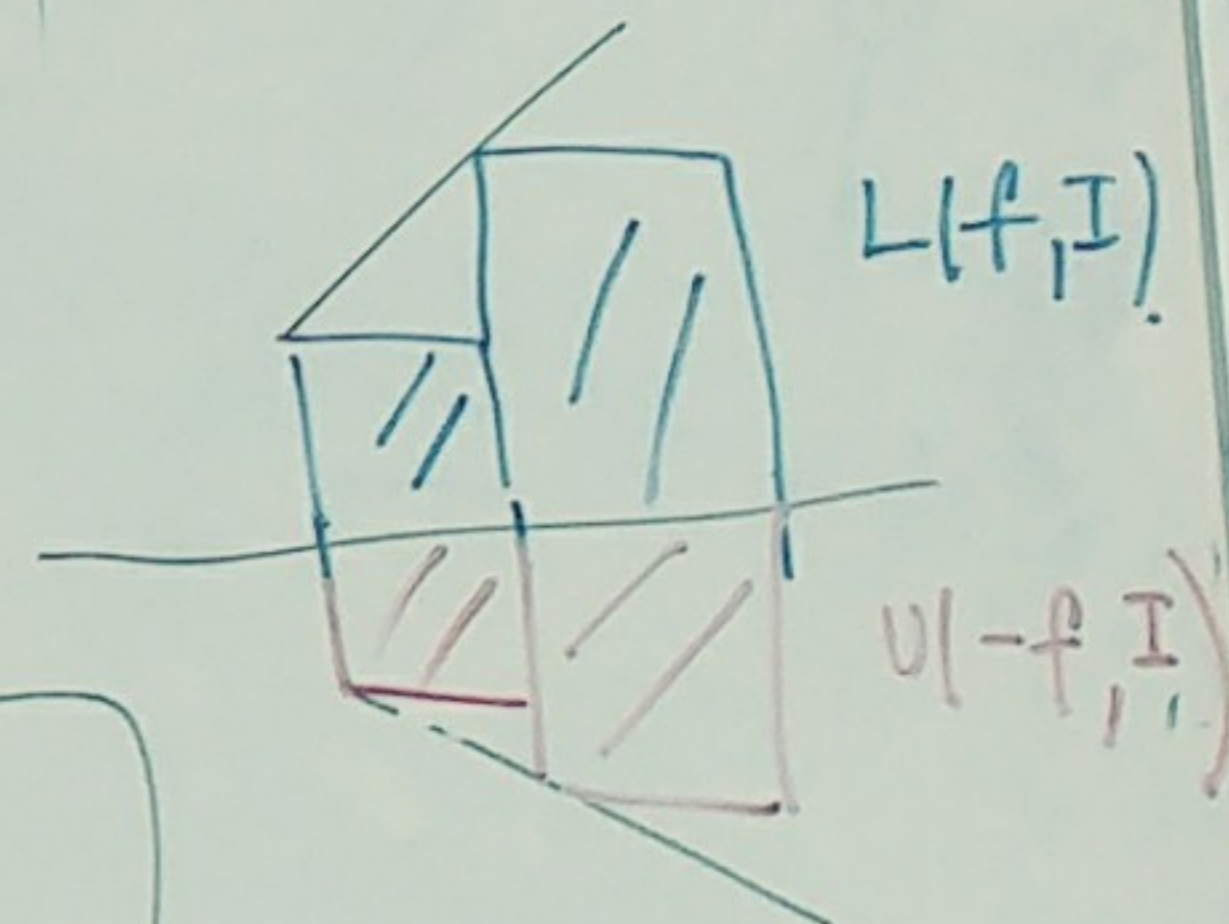
Wot

$$\begin{aligned} L(-f, J) &> L(-f, I) \\ \Rightarrow -U(f, J) &\geq -U(f, I) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$L(f, J) \geq L(f, I)$$

$$L(-f, I) = -U(f, I)$$

$$U(f, J) \leq U(f, I)$$



Analiz IV - Ders II

Ama Tabii ki

$$L(f, K) \leq U(f, K)$$

So, uç,

$$L(f, I) \leq U(f, J) \quad \square$$

$$U(f, J)$$

Alan

$$L(f, I)$$

Lemma 1.6

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ sınırlı}$$

I, J iki parçalanış...

0 zaman,

$$L(f, I) \leq U(f, J)$$

İspat

Her I, her J'den daha

ince bir parçalanış alalım.

Bunu K diyelim.

$$\text{Lemma 1.6} \Rightarrow L(f, I) \leq L(f, K)$$

$$U(f, J) \geq U(f, K)$$

Tanım 1.7

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ sınırlı}$$

Eğer

Sıfır

$$L(f, I) = \inf_{J: \text{parçalanış}} U(f, J)$$

I: Parçalanış

J: Parçalanış

ise

f

Riemann

İntegrelenebilir denir

ve

ortak

değer

$$\int_a^b f(x) dx$$

şeklinde yazılır

Ormk 1.8

$$f(x) = x \quad x \in [0, 1]$$

$$I_n = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1 \right\}$$

$$U(f, I_n) = \sum_{i=1}^n \left[\sup_{x \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right]} f(x) \right] \left[\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i$$

$$= \frac{n(n+1)}{2n^2}$$

$$= \frac{n+1}{2n}$$

$$L(f, I_n) = \sum_{i=1}^n \left[\inf_{x \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right]} f(x) \right] \left[\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} \right] \quad (6)$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \left[\sum_{i=1}^n (i-1) \right] \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n-1} i \right) \frac{1}{n^2} = \frac{n(n-1)}{2n^2}$$

$$= \frac{n-1}{2n}$$

$$\sup_n L(f, I_n) \leq \inf_n U(f, I_n)$$

$$\parallel$$

$$\sup_n \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2} \quad \inf_n \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \leq \sup L(f, J) \leq \inf U(f, J) \leq \frac{1}{2}$$

J : Parçalanış.

J : Parçalanış

Sonuç,

$$\sup L(f, J) = \inf U(f, J) = \frac{1}{2}$$

$f(x) = x$ | Integrellenebilir

$$\int_a^1 x dx = \frac{1}{2}$$

Lemma 1.9 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı.

⑦

f Integrellenebilir ancak ve ancak

her $\epsilon > 0$ için

$$U(f, I) - L(f, I) < \epsilon$$

sağlayan bir parçalanış var.

İspat

$$\alpha = \inf U(f, J)$$

J Parçalanış.

$\epsilon > 0$ olsun ve hipotez kullanılarak

$$U(f, I) - L(f, I) < \epsilon \quad \text{sağlayan}$$

I alalım.

$$L(f, I) > U(f, I) - \epsilon$$

$$\Rightarrow L(f, I) > \left[\inf_{J: \text{Parçalanış}} U(f, J) \right] - \varepsilon$$

$$= \alpha - \varepsilon$$

ε : Herhangi $\downarrow$ numara olabilir
pozitif

$$\Rightarrow \sup_{J: \text{parçalanış}} L(f, J) \geq \alpha = \inf_{J: \text{parçalanış}} U(f, J)$$

Ama, Lemma 1.3 $\Rightarrow \sup L(f, J) \leq \inf U(f, J)$

$$\text{Sonuç,} \quad \sup L(f, J) = \inf U(f, J) \quad \square$$

i.e. f İntegrelenebilir

örnek 1.10

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1] \text{ irrasyonel} \\ 1 & x \in [0, 1] \text{ rasyonel} \end{cases}$$

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

İddia f İntegrelenebilir değil.

İspat $I = \{a_0 = a < \dots < a_n = b\}$

bir parçalanış, olsun.

$$\left[\inf_{x \in [a_{i-1}, a_i]} f(x) \right] = 0$$

$$\left[\sup_{x \in [a_{i-1}, a_i]} f(x) \right] = 1$$

her açık
aralıkta
hem Rasyonel
hem Irrasyonel
Sayılar var.

(8)

$$\left[a + (i-1) \frac{b-a}{n}, a + i \frac{(b-a)}{n} \right]$$

$$\Rightarrow L(f, I) = \sum_{i=0}^n \left(\inf_{x \in [a_{i-1}, a_i]} f(x) \right) (a_i - a_{i-1})$$

Analiz IV - Deys II

9

Teorem 1.11 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli olsun.

0 $\neq$ amsan f Integrellenebilir.

İspat $[a, b]$ kompakt ve f sürekli

$\Rightarrow f$ düzgün sürekli.

$\forall \epsilon$ her $\epsilon > 0$ için.

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

sağlayan bir δ var.

$$\epsilon > 0 \text{ olsun ve } \epsilon_1 = \frac{\epsilon}{b-a} \text{ olsun.}$$

$$\Rightarrow \text{bu bir } \delta > 0 \text{ var ki } |x - y| < \delta \Rightarrow$$

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon_1$$

Integrellenemez.

$$\sup L(f, I) = 0$$

$$\inf U(f, I) = 1$$

$\neq$

Bu her parçalanış için geçerli

ve

$$= 0$$

$$U(f, I) = 1$$

byla bin $\delta > 0$ van k_i

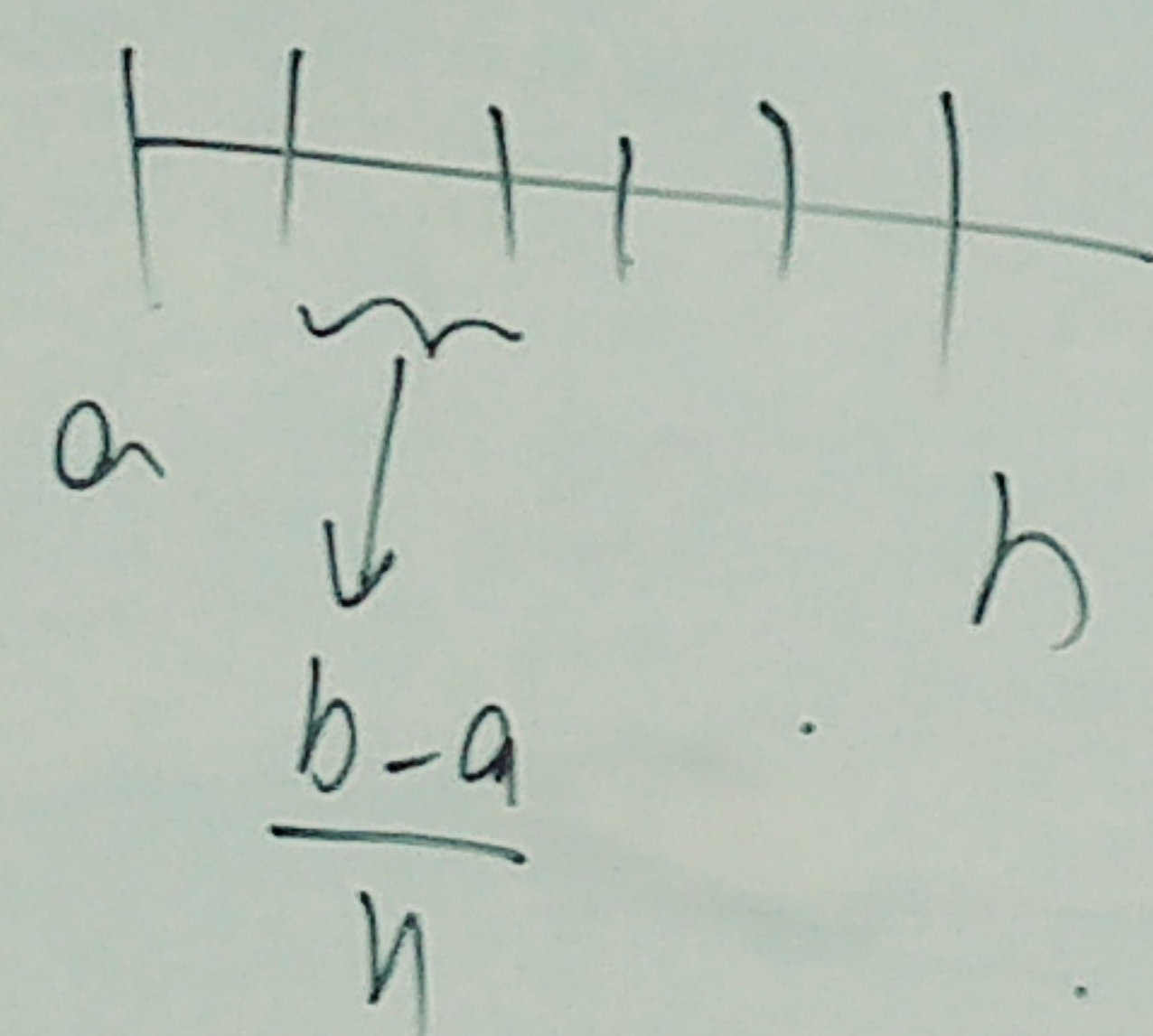
$$|x-y| < \delta \Rightarrow$$

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

byla bin na N seginiz

$$k_i \quad \frac{b-a}{n} < \delta$$

$$I = \left\{ a, a + \frac{b-a}{n}, \dots, a + \frac{(b-a) \cdot k}{n}, \dots, b \right\}$$



$$\boxed{\begin{aligned} & \sup_{x \in I} f(x) - \inf_{y \in I} f(y) \\ &= \sup_{x, y \in I} (f(x) - f(y)) \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow U(f, I) - L(f, I) = \sum_{j=1}^n \left(\sup_{x \in I_j} f(x) - \inf_{x \in I_j} f(x) \right) \cdot \frac{b-a}{n} \leq \epsilon$$

$$I_j = \left[a + (j-1) \frac{b-a}{n}, a + j \frac{b-a}{n} \right]$$

$$\leq \epsilon \cdot (b-a) \leq \epsilon$$

□

(10)

$$\sup_{x \in \left[a + (i-1) \frac{b-a}{n}, a + i \frac{b-a}{n} \right]} f(x) < \inf_{x \in I} f(x) + \epsilon$$