$k=0$

$k=0$

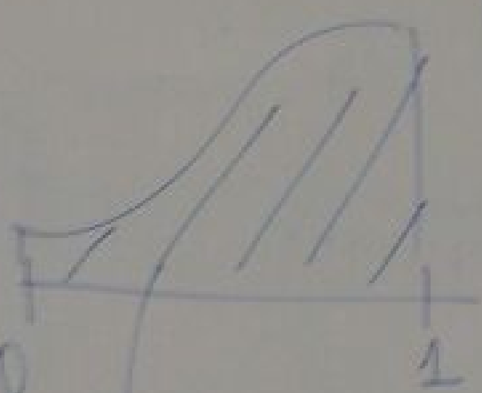
$$= \Big[P[\tau>0]-P[\tau>1]\Big]1 + \Big[P[\tau>1]-P[\tau>2]\Big]2 + \Big[P[\tau>2]-P[\tau>3]\Big]3$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P[\tau>k]$$

Motivasyon (1) $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$1-1$ fonksiyon, $f \geq 0$

$y = f(x)$



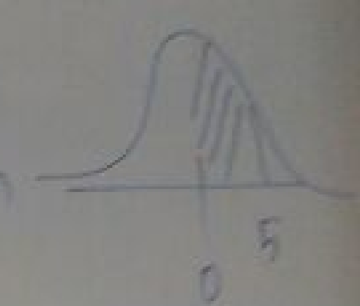
$G(f) := \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq f(x)\}$

$|G(f)|$ Graf altındaki alan nedir?

Daha genel olarak

$A \subset \mathbb{R}^2$

$|A|$ hesaplamak için



Integrasyon kullanılır

$x_n \in [0,1]$ Sonra oyun bitecek

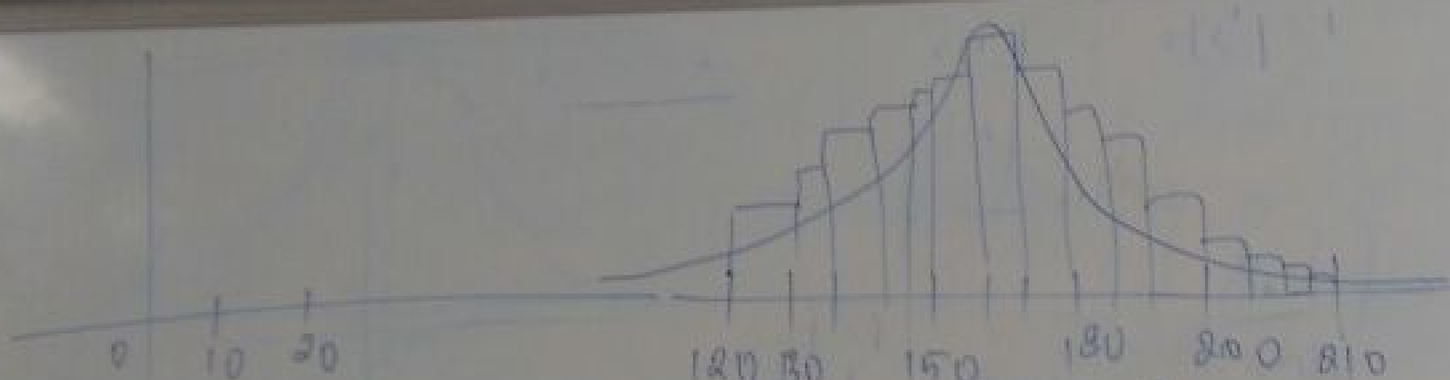
$\longrightarrow P[x_1+x_2>1] = \frac{1}{2}$

$P[x_1+x_2+x_3<1]$

2

100,000

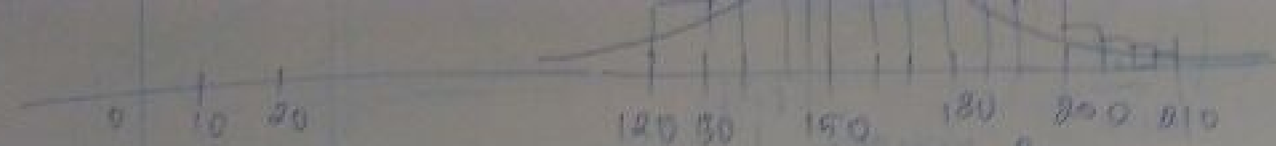
2



$f(x) = \dfrac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$

$P[\text{uzunluk} \subset [a,b]]$

$\approx \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2}\,dx$



$$f(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

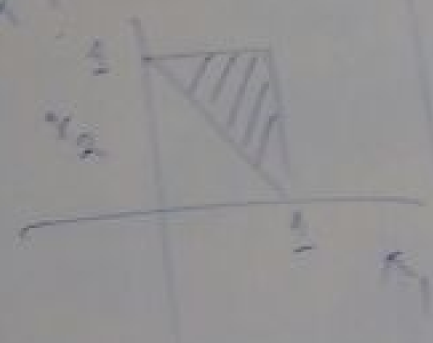
$$P\left[\text{Uzunluk} \subset [a,b]\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2}\, dx$$

(3) $x_1 \in [0,1]$ ... $x_n \in [0,1]$

Eğer $x_1 + \dots + x_n > 1$, duralım.

Soru: Ortalama kaç numaralar sonra oyun bitecek?

$\longrightarrow P[x_1 + x_2 > 1] = \frac{1}{2}$



$P[x_1 + x_2 + x_3 < 1]$

Bakatır' ın Konjektür

$E[\tau] = \pi$

$\mathbb{P}[\tau > k] = \mathbb{P}[x_1 + \cdots + x_k < 1]$

τ Durma Zamanı

(Stopping Time)

$$E[\tau] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[\tau = k]\, k \qquad \sum_{k=?}^{\infty} \Big[\mathbb{P}[\tau > k-1] - \mathbb{P}[\tau > k]\Big] k$$

$$= \Big[\mathbb{P}[\tau > 0] - \mathbb{P}[\tau > 1]\Big] 1 + \Big[\mathbb{P}[\tau > 1] - \mathbb{P}[\tau > 2]\Big] 2 + \Big[\mathbb{P}[\tau > 2] - \mathbb{P}[\tau > 3]\Big] 3$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[\tau > k]$$

vasyon ① $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

1-1 fonksiyon, $f \geq 0$

$y = f(x)$

Daha genel olarak

$A \subset \mathbb{R}^2$

$|A|$ hesaplamak için

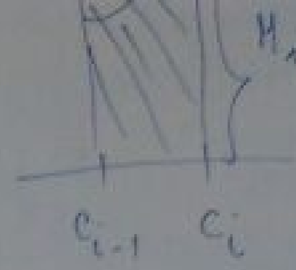
bir parçalanış denir.

$\subset \mathbb{R}$

$f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sınırlı

$P: [a,b]$'nin parçalanış

Kaplamak $U(f,P) := \sum_{i=1} \cdot (c_i - c_{i-1})$, $M_i := \sup_{x \in [c_{i-1}, c_i]} f(x)$



5

$P[t > 1] = P[x_1 \leq 1] = 1$

$P[t > 2] = P[x_1 + x_2 \leq 1] = \frac{1}{2}$

$P[t > 3] = P[x_1 + x_2 + x_3 \leq 1] = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$

$P[t > 4] = P[x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 1] = \frac{1}{4!}$

$P[t > k] = \frac{1}{k!}$

$A = \left\{ (x, y, z) \;\middle|\; \begin{array}{l} 0 \leq x, y, z \leq 1 \\ x + y + z \leq 1 \end{array} \right\}$

Prizma

Yükseklik : 1

Alt Bölgedeki alan : $\frac{1}{2}$

$|A| = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 1 \right)$

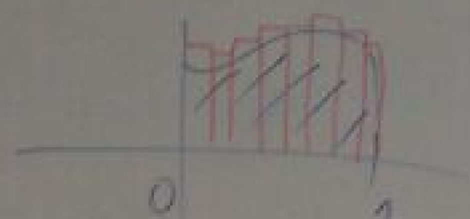
Not $A \subset \mathbb{R}^n$ Bir Prizma olsun

$\sim \exists\, B \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $v \in \mathbb{R}^n$

$A = \text{Hull}(B, v) := \left\{ tb + (1-t)v : \begin{array}{l} b \in B \\ t \in [0,1] \end{array} \right\}$

Not $|A| = \frac{1}{n} \cdot |B| \cdot v_n$ $\longrightarrow$ v'nin Yüksekliği nasıl hesaplanır ?

Archimedes



6

$$\mathbb{E}[\tau] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[\tau > k] = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

$: e \approx 2.71828$ (Bahadır'ın e-π Kuralı)

Soru τ_{100} : $\sum_{1}^{k} x_k \geq 100$ yapan ilk k.

$\mathbb{E}[\tau_{100}]$?

$\boxed{\text{MARTINGALE}}$

yapan ilk k

$E[Y_{100}]$?

MARTINGALE

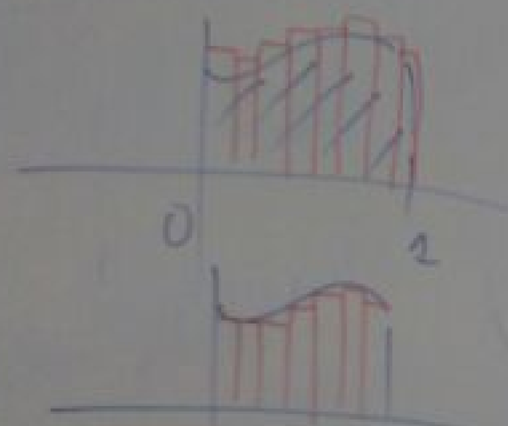
Konu 1 — 1 Boyutlu Integraller.

(7)

$f \geq 0 \quad f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

f'nin grafik altındaki hacim nasıl hesaplanır?

Archimedes



Temel fikir

Dik dörtgenler'le kaplamak.

VEYA Dik dörtgenler'le doldurmak

Lemma 1.3 P, Q $[a,b]$'nin iki parçalanışlar olsun ve $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ sınırlı olsun.

O zaman $U(f,P) \geq L(f,Q)$

Tanım 1.4 $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ sınırlı

Eğer $\inf\limits_{P:\text{ Parçalanış}} U(f,P) = \sup\limits_{P:\text{ Parçalanış}} L(f,P)$ ise

f Integrallenebilir denir ve ortak değer $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ yazılır.

Tanım 1.1 $[a,b]\subset \mathbb{R}$

$P: \; a = c_0 \leq c_1 \leq \cdots \leq c_n = b$

$P = \{c_0, \ldots, c_n\}$ $[a,b]$'nin bir parçalanış denir.

Tanım 1.2 $[a,b]\subset \mathbb{R}$

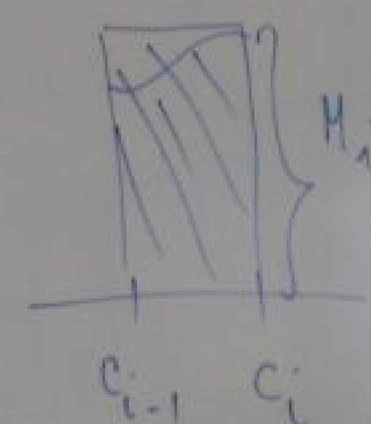
$f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ sınırlı

$P: [a,b]$'nin bir parçalanış

Kaplamak $U(f,P) := \sum\limits_{i=1}^{n} M_i(c_i - c_{i-1})$, $M_i := \sup\limits_{x\in[c_{i-1},c_i]} f(x)$

Doldurmak $L(f,P) := \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(c_i - c_{i-1})$

$m_i := \inf\limits_{x\in[c_{i-1},c_i]} f(x)$



$[a,b] \subset \mathbb{R}$

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ Sınırlı

c_{i-1} c_i

$P : [a,b]$'nin bir parçalanış

Kaplamak $U(f,P) := \sum_{i=1}^{n} M_i (c_i - c_{i-1})$, $M_i := \sup_{x \in [c_{i-1}, c_i]} f(x)$

$$U(f,P) = \sum_{i=0}^{n} \left[\sup_{x \in [c_{i-1}, c_i]} f(x) \right] (c_i - c_{i-1})$$

Üst Riemann Toplamı

$$L(f,P) = \sum_{i=0}^{n} \left[\inf_{x \in [c_{i-1}, c_i]} f(x) \right] (c_i - c_{i-1})$$

Alt Riemann Toplamı

Lemma 1.3 P, Q $[a,b]$'nin iki parçalanışlar olsun ve $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ Sınırlı olsun

O zaman $U(f,P) \geq L(f,Q)$

Tanım 1.4 $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sınırlı

Eğer $\inf\limits_{P:\text{ Parçalanış}} U(f,P) = \sup\limits_{P:\text{ Parçalanış}} L(f,P)$ ise

f Integrellenebilir denir ve ortak değer $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ yazılır.