CENTRALISATEURS GÉNÉRIQUES

Bruno Poizat[1]

23 mars 2012

Summary. We comment an early and inspirating remark of an Omskian mathematician concerning the Cherlin-Zilber Conjecture. This paper assumes a familiarity with the model theoretic tools involved in the study of the groups of finite Morley rank.

C'est dans une chambre modeste, aux rideaux défraîchis et à la plomberie fatiguée, de l'Hotel Zolotaia Dolina à Akademgorodok, qu'un jour du mois d'octobre 1987 un jeune mathématicien prophétisa devant moi en ces termes : "If you believe in Cherlin's Conjecture, you must explain why, in a simple algebraic group, the centralizers of the generics points, which are certainly the maximal tori, are commutative and conjugate. Certainly !"

Ce mathématicien, aujourd'hui moins jeune, a entretemps exercé une influence considérable sur l'étude des groupes de rang de Morley fini, et ses idées ont certainement motivé l'étude des phénomènes génériques dans ces groupes qui a fait l'objet de nombreux travaux depuis une dizaine d'années (voir [Jaligot 2009] et les références qu'il cite).

Le présent article est un commentaire de son oracle, en son phrasé originel.

1. Centralisateurs et classes de conjugaison génériques

Quand il est question de rang de Morley, nous parlons ici de *dimension* pour un ensemble définissable, $RM(X) = dim(X)$, et de *rang* pour un type, $RM(tp(a/A)) = rg(a/A)$. La dimension d'un ensemble est insensible aux paramètres au-dessus desquels on la calcule, pourvu qu'ils permettent de définir l'ensemble en question ; ce n'est pas le cas du rang d'un élément, puisque $rg(a/A)$ est le minimum des dimensions des ensembles définissables avec paramètres dans A auxquels a appartient.

On se place systématiquement dans un contexte où le rang de Morley est fini, définissable et additif, et égal au rang U de Lascar, comme c'est le cas dans un groupe de rang de Morley fini, même quand on s'évade dans l'imaginaire (voir la préface de [Poizat 1987]).

L'additivité du rang de Morley se manifeste ainsi en termes de dimension : si f est une surjection définissable de X sur Y , dont chaque fibre est de dimension d , alors $dim(X) = dim(Y) + d$. Celle du rang de Lascar s'exprime au niveau des types : $rg(a\hat{}b) = rg(a) + rg(b/a)$. Les

[1] Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard, 43, boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne-cedex, France ; poizat@math.univ-lyon1.fr

spécialistes des groupes de rang de Morley fini préfèrent le plus souvent la première équation à la seconde.

On considère un groupe G de rang de Morley fini ; on considère également un point g de ce groupe, qui soit générique sur $\varnothing$, ou sur n'importe quel ensemble A de paramètres convenu d'avance ; autrement dit $rg(g) = dim(G)$. On note C la classe de conjugaison de g , et c le paramètre canonique d'icelle ; on note Z le centralisateur de g , et z le paramètre canonique d'icelui, et on note N le normalisateur de Z . Comme d'habitude, un paramètre canonique n'est déterminé qu'à interdéfinissabilité près.

Puisque Z et son centre sont chacun le centralisateur de l'autre, ils ont même paramètre canonique, et même normalisateur.

En faisant agir G sur lui-même par automorphismes intérieurs, on établit une bijection définissable, avec g comme paramètre, entre C et le quotient à droite de G par Z ; toute les classes de ce quotient ayant même dimension que Z , par additivité du rang de Morley la dimension du dit quotient, ainsi que celle de C , vaut $dim(G) - dim(Z)$. Autrement dit :

$$\mathbf{dim(G) = dim(Z) + dim(C)} \text{ .}$$

Pour calculer le rang de c , il nous faut un petit lemme utile par ailleurs.

Lemme 1. *Soient* X *un ensemble définissable (sur* $\varnothing$ *, ou sur* A *) de dimension* n *,* g *un point de* X *générique dans* X *(i.e.* $rg(g) = dim(X)$ *),* $E(x,y)$ *une relation d'équivalence définissable (idem) entre éléments de* X *,* m *la dimension de la classe* $E(x,g)$ *et* c *le paramètre canonique de cette classe. Alors* $rg(c) = n\text{-}m$ *,* $rg(g/c) = m$ *; autrement dit* g *est générique dans sa classe, et, si toutes les classes ont même dimension,* c *est générique dans le quotient* X/E .

Démonstration. $Y = \{ a \ / \ dim(E(x,a)) = m \}$ est une partie définissable générique de X , $dim(Y) = n$. Par additivité du rang, $dim(Y/E) = n\text{-}m$. Donc $rg(c) \leq n\text{-}m$; comme g satisfait $E(x,g)$, $rg(g/c) \leq m$. Enfin, c est algébrique, et même rationnel, sur g , si bien que $n = rg(g) = rg(g\wedge c) = rg(c) + rg(g/c) \leq n\text{-}m + m$; il n'est pas possible que $rg(c) < n\text{-}m$, ni que $rg(g/c) < m$. **Fin**

D'où :

$$\mathbf{rg(g/c) = dim(C)\text{ , } rg(c) = dim(G) - dim(C) = dim(Z)} \text{ .}$$

Nous obtenons également :

$$\mathbf{rg(g/z\wedge c) = dim(N) - dim(Z)} \text{ .}$$

Pour cela, nous appliquons le Lemme 1 au cas où $A = \{c\}$, où $X = C$, et où $E(x,y)$ est la relation "avoir même centralisateur", si bien que z devient le paramètre canonique de $E(x,g)$; et alors, comme C est en bijection avec le quotient à droite G/Z , et la classe de conjugaison de z en bijection avec le quotient à droite G/N , toutes les classes de E ont pour dimension $\dim(G/Z) - \dim(G/N) = \dim(G) - \dim(Z) - \dim(G) + \dim(N) = \dim(N) - \dim(Z)$.

On peut voir cette égalité d'une autre façon. Soit Γ l'intersection de C et du centre de Z ; comme le centralisateur d'un point de Γ a même rang de Morley et même degré de Morley que celui de g , tous les points de Γ ont Z pour centralisateur, et sont conjugués dans N , si bien que Γ est en bijection avec le quotient de N par Z , que $\dim(\Gamma) = \dim(N) - \dim(Z)$. On applique alors le lemme, puisque Γ est la classe de g modulo E (restreinte à C). On remarque que z^c s'identifie au paramètre canonique de Γ , et que $\dim(N) = \dim(Z) + \dim(\Gamma) \leq 2.\dim(Z)$.

Pour ce qui est du rang de z , on n'obtient qu'une inégalité, reposant sur les faits que z est algébrique sur g et que g est dans Z : rg(g) = rg(g^z) = rg(z) + rg(g/z) , si bien que :

rg(g/z) ≤ dim(Z) , rg(z) ≥ dim(C) .

Le but ultime de cet article, qui sera atteint dans la dernière section (à la suite de quelques digressions ayant leur intérêt propre), est de décrire les circonstances qui font que z et c sont indépendants, quand le groupe est connexe. Nous commençons par tirer une conséquence directe des inégalités ci-dessus :

Corollaire 2. *Si* z *et* c *sont indépendants, alors* rg(z) = dim(C) , rg(g/z) = dim(Z) *, et* g *est algébrique sur* z^c .

Démonstration. Si z et c sont indépendants, rg(G) = rg(g) ≥ rg(z^c) = rg(z) + rg(c) = rg(z) + dim(Z) ; il est donc impossible que rg(z) soit strictement supérieur à dim(C) , et par conséquent rg(z) = dim(C) , rg(g/z) = dim(Z) et rg(g) = rg(z^c) , rg(g/z^c) = 0 . **Fin**

2. Généricité du générique dans son propre centralisateur

Lorsque z et c sont indépendants, rg(g/z) = dim(Z) ; autrement dit g est un point générique de son propre centralisateur. Dans cette section, nous décrivons les conditions pour que cette dernière chose se produise, dans le cas d'un groupe connexe.

Théorème 3. *Dans un groupe connexe* G *de rang de Morley fini les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) Le point générique g *est générique dans son centralisateur* Z *.*

(ii) $rg(z) = dim(C)$.
(iii) Les points de Z *dont le centralisateur est* Z *forment une partie générique de* Z *.*
(iv) Le centre de Z *est d'indice fini dans ce dernier, et les points de* Z *dont le centralisateur a même dimension que celle de* Z *forment une partie générique de* Z *.*

Démonstration. Comme (i) signifie que $rg(g/z) = dim(Z)$, il équivaut à $rg(g) = rg(g\wedge z) = rg(g/z) + rg(z) = dim(Z) + rg(z)$, soit encore à (ii).

Il est clair que (i) implique (iii), et que (iii) implique (iv), puisque le centre de Z a alors même dimension que Z .

Supposons que (iv) soit vérifié ; $Z°$ est alors central dans Z , et il existe une classe de Z modulo $Z°$ dont le point générique a un centralisateur de même dimension que Z . Considérons g' dans cette cossette, tel que $rg(g'/g) = dim(Z)$, si bien que $rg(g\wedge g') = rg(g) + rg(g'/g) = dim(G) + dim(Z) = rg(g') + rg(g/g')$; comme g et g' commutent, $rg(g/g') \leq dim(Z)$, si bien que $rg(g') \geq dim(G)$, que g' est générique dans G , et de même type que g vu la connexité de G . Comme $Z°$ est la composante connexe du centralisateur Z' de g' , elle est centrale dans ce dernier, si bien que le centralisateur de g' est le centralisateur de la cossette $g'.Z°$; Z' est donc définissable sur le paramètre canonique de cette dernière ; par conséquent g' , qui est générique dans la cossette, est aussi générique dans son propre centralisateur ; il en est de même de g , qui a même type que g' . **Fin**

Si le groupe n'est pas connexe, on obtient un théorème analogue en supposant que la partie générique dont il est question en (iv) est incluse dans la cossette $g Z°$; en effet, comme g et g' sont alors génériques et congrus modulo $Z°$, ils ont même type.

Question 1. Dans un groupe de rang de Morley fini, pour que g soit générique dans Z , est-ce qu'il suffit que $Z°$ soit central dans Z ? Le corollaire suivant explique pourquoi je ne connais pas de contre-exemple.

Lemme 4. *Soient* G *un groupe algébrique, sur un corps algébriquement clos*[2]*,* g *un point générique de* G *, et* H *un sous-groupe définissable connexe de* G *; alors tout point générique de* $g.H$ *est générique dans* G .

Démonstration. Soit X une partie constructible, c'est-à-dire définissable, de G non générique, sur les paramètres de laquelle g soit générique ; sa clôture de Zariski F est de même dimension, et définissable sur les mêmes paramètres ; elle ne contient donc pas le point générique g . La

[2] Sauf mention du contraire, tous les groupes algébriques considérés ici sont définis sur un corps de base algébriquement clos, et munis de toute la structure qu'ils héritent de ce corps de base.

cossette $g.H$ est un fermé de Zariski irréductible qui n'est pas contenu dans F, et par conséquent $\dim(g.H \cap F) < \dim(H)$. **Fin**

Remarque 1. Le Lemme 1 affirme, en toute généralité, que g est générique dans $g.H$ quand g est générique sur le paramètre canonique de H, ce qui n'est pas supposé dans les hypothèses du Lemme 4. Je ne vois pas pourquoi ce Lemme 4 serait vrai dans un groupe de rang de Morley fini arbitraire : c'est l'objet de la question suivante.

Question 2. Nous dirons que l'ensemble définissable X est *génériquement inclus* dans l'ensemble définissable Y si $\dim(X \cap \neg Y) < \dim(X)$. Etant donnée une formule $\varphi(x,\underline{y})$, nous notons $Cl_\varphi(X)$ la réunion des cossettes modulo un sous-groupe de G qui sont définies par une formule de la forme $\varphi(x,\underline{a})$ et qui sont génériquement incluses dans X ; $Cl_\varphi(X)$ est une partie de G définissable avec les mêmes paramètres que ceux de X. Quand G est un groupe algébrique, elle est incluse dans la clôture de Zariski de X, et a donc même dimension que X. Qu'en est-il dans le cas général ? Est-il possible que $Cl_\varphi(X)$ soit générique sans que X le soit ?

Corollaire 5. *Dans un groupe algébrique* G*, sur un corps algébriquement clos, tout point générique* g *est générique dans le centre de son centralisateur* Z *; pour qu'il soit générique dans* Z*, il suffit que* $Z°$ *soit central dans* Z*.*

Démonstration. L'ensemble des points dont le centralisateur a même rang et même degré de Morley que Z est définissable (d'après [Hrushovski xxxx], le degré de Morley est définissable dans un corps algébriquement clos ; cela n'a rien de certain dans un groupe quelconque de rang de Morley fini). Par conséquent, d'après le Lemme 4, un point g' de $g.Z(Z)°$ qui est générique sur g est dans cet ensemble ; il a donc Z pour centralisateur, si bien que $rg(g/g') \leq \dim(Z(Z))$, $rg(g') \geq \dim(G)$, et en fait $rg(g') = \dim(G)$, $rg(g/g') = \dim(Z(Z))$. La conclusion suit de ce que Z et $Z(Z)$ ont même paramètre canonique. **Fin**

Nous concluons cette section par un résultat qui servira dans la démonstration du théorème final.

Théorème 6. *Considérons, dans un groupe* G *de rang de Morley fini, un point générique* g *de centralisateur* Z *; alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) g *est générique dans la cossette* $g.Z°$.
(ii) $Z°$ *est commutatif, et les points de* $g.Z°$ *dont le centralisateur a même dimension que celle de* Z *en forment une partie générique*.

Démonstration. Notons z' le paramètre canonique de la cossette $g.Z°$; comme $Z°$ est le groupe associé à cette cossette, il est définissable sur z', lequel est définissable sur g . Si h et h' sont deux éléments de $Z°$ génériques et indépendants au-dessus de g , $g.h$ et $g.h'$ sont génériques et indépendants dans $g.Z°$; si nous supposons que g est générique dans $g.Z°$, ils ont même type que g au dessus de z' , et par conséquent ils commutent ; il en est de même de h et de h' , si bien que $Z°$ est commutatif ; par ailleurs la deuxième condition de (ii) est évidente.

Supposons réciproquement que (ii) soit vérifié, et considérons g' dans $g.Z°$ générique sur g ; $rg(g\wedge g') = rg(g) + rg(g'/g) = \dim(G) + \dim(Z)$; $rg(g\wedge g') = rg(g') + rg(g/g')$ mais, puisque g et g' commutent, $rg(g/g') \leq \dim(Z)$, si bien que $rg(g/g') = \dim(Z)$ et $rg(g') = \dim(G)$. Par ailleurs, comme $g.Z° = g'.Z°$ est commutative, $Z°$ est la composante connexe du centralisateur de g' , si bien que z' est définissable sur g' , et que $rg(g/z') = \dim(Z)$. **Fin**

Nous observons, dans la deuxième partie de la démonstration du Théorème 6, que g est générique dans le centralisateur de g' , et que g' est générique dans le centralisateur de g . Et dans le cas d'un groupe algébrique, il suffit bien sûr que $Z°$ soit commutatif.

3. Quelques exemples

Exemple 1. Si G est commutatif, $rg(g) = rg(c) = \dim(G)$, $rg(z) = 0$.

Exemple 2. Dans un groupe connexe G nilpotent non abélien, il n'est pas possible que z et c soient indépendants, car g n'est pas algébrique sur $z\wedge c$; en effet, tout sous-groupe définissable propre de G est d'indice infini dans son normalisateur (voir [Poizat 1987], p. 27). C'est ainsi que, si G est connexe, 2-nilpotent et non abélien, deux éléments conjugués, étant congrus modulo le centre, ont même centralisateur : les centralisateurs sont normaux. Le centralisateur Z d'un point générique g est aussi celui de sa classe de conjugaison C , si bien que z est algébrique sur c , et dépendant de c car g n'est pas central.

Exemple 3. Par exemple, si G est le groupe des matrices unipotentes triangulaires d'ordre 3 à coefficients dans un corps algébriquement clos, g est de la forme $(1\ u\ w\ ;\ 0\ 1\ v\ ;\ 0\ 0\ 1)$, où u , v et w sont transcendants et algébriquement indépendants : $rg(g) = \dim(G) = 3$. La classe de conjugaison c est déterminée par le couple (u,v) , et le centralisateur z par le quotient u/v : $rg(c) = 2 = \dim(Z)$, $rg(z) = 1 = \dim(C)$; $rg(g/z\wedge c) = 1$.

Exemple 4. En caractéristique p le groupe des matrices de la forme $(1\ u\ v\ ;\ 0\ 1\ u^p\ ;\ 0\ 0\ 1)$ a des centralisateurs génériques non connexes ; cela est vrai plus généralement dans tout groupe nilpotent non-commutatif connexe de rang de Morley deux, et en particulier dans les groupes de

[Baudisch 1996]. Dans ces groupes de Baudisch, les centralisateurs des points génériques ne sont pas commutatifs.

Exemple 5. Si $G = Gln(K)$, où K est un corps algébriquement clos, $\dim(G) = rg(g) = n^2$; g est une matrice diagonalisable, dont les valeurs propres (distinctes) sont transcendantes et algébriquement indépendantes ; c est déterminé par l'ensemble de ces valeurs propres, et on peut assimiler son paramètre canonique aux n fonctions symétriques élémentaires de ces dernières, c'est-à-dire aux coefficients du polynôme caractéristique de g ; donc $rg(c) = n$. Le centralisateur de g est déterminé par ses espaces propres, qui forment un ensemble de n droites en position générique ; comme chaque droite est donnée par n coordonnées homogènes, leur ensemble, après élimination des imaginaires, est décrit par un $n(n-1)$-uple de coordonnées algébriquement indépendantes : $rg(z) = n(n-1)$. Comme le choix des droites propres est indépendant de celui des valeurs propres, z et c sont indépendants. Comme Z est formé des matrices inversibles qui se diagonalisent dans la même base que g, $\dim(Z) = n = rg(c)$, $\dim(C) = n^2 - n = rg(z)$. Comme une fois que ses droites propres et ses vecteurs propres ont été donnés, il n'y a plus que $n!$ choix pour déterminer g, ce dernier est bien algébrique sur z^c.

Exemple 6. Si $G = Tn(K)$, le groupe des matrices triangulaires inversibles d'ordre n, les points génériques sont diagonalisables ; leur classe de conjugaison est donnée par leur valeurs propres, qui apparaissent sur la diagonale : $rg(c) = n = \dim(Z)$, $rg(z) = \dim(C) = n(n-1)/2$; z et c sont indépendants.

Exemple 7. Si $G = TUn(K)$, le groupe des matrices triangulaires unipotentes d'ordre n, la classe de conjugaison d'un point générique est déterminée par les $n-1$ coefficients situés sur sa deuxième diagonale, $rg(c) = n-1 = \dim(Z)$; le centralisateur d'un point générique est commutatif : en effet, par le Théorème de Jordan, g est conjugué dans $Tn(K)$ à la matrice qui ne contient que des 1 sur sa deuxième diagonale, et des 0 ailleurs, dont le centralisateur se détermine facilement ; d'après le Corollaire 5, $rg(z) = \dim(C) = (n-1)(n-2)/2$.

Exemple 8. Nous allons chercher ici un groupe connexe dont le générique n'est pas générique dans son centralisateur ; pour des raisons qui se manifesteront dans les sections suivantes, nous le cherchons nilpotent, et sans torsion pour être débarassé des problèmes de connexité.

Lemme 7. *Un groupe de rang de Morley fini nilpotent sans torsion, dont le générique n'est pas générique dans son centralisateur, et de rang de Morley minimal pour cette propriété, est de classe de nilpotence deux.*

Démonstration. Soit G un tel groupe de classe de nilpotence minimale, dont le générique g n'est pas générique dans son centralisateur Z. Notons H le centralisateur de g modulo $Z(G)$; par minimalité de G, l'image γ de g dans $G/Z(G)$ est donc générique dans $H/Z(G)$, qui est en particulier abélien ; H est donc un groupe nilpotent de classe deux dont le générique g', se projetant sur γ, est congru à g modulo $Z(g)$, et a pour centralisateur Z.

On remarque que Z est inclus dans H. Au sens de G, g n'est pas générique dans Z ; d'après le Théorème 3 (iv), cela peut venir de ce que Z n'est pas commutatif, et dans ce cas g' n'est pas d'avantage générique dans Z au sens de H ; cela peut venir aussi de ce qu'un point générique h de Z commute avec des éléments hors de Z, ce qui ne se produit pas pour son image η dans $G/Z(G)$: autrement dit, le centralisateur de h est inclus dans H, et g' dans ce cas n'est pas non plus générique dans Z au sens de H. **Fin**

Nous cherchons donc un groupe G nilpotent de classe deux. Nous faisons alors appel à un vieux résultat de Zilber, exposé dans [BN 1994] p. 103 (voir aussi [AW 201?]), qui déclare qu'on peut définir dans G un corps algébriquement clos K de caractéristique nulle, si bien que dans un exemple basique de groupe nilpotent de classe deux $G/Z(G)$ est un K-espace vectoriel E de dimension finie, et l'application commutateur $[x,y]$ est une application K-bilinéaire alternée de $E\times E$ dans le sous-groupe F de $Z(G)$ engendré par les commutateurs, qui est lui aussi un K-espace vectoriel (la situation générale est plus compliquée, car on peut prendre par exemple un produit de groupes définis sur des corps différents). L'application $[x,y]$ se factorise par une application linéaire λ de la deuxième puissance extérieure $E\wedge E$ de E dans F, et on peut l'assimiler à l'application bilinéaire naturelle $\varphi(x,y)$ de $E\times E$ dans $E\wedge E / \mathrm{Ker}(\lambda)$.

La structure des commutateurs de G est donc déterminée par un sous-espace vectoriel $W = \mathrm{Ker}(\lambda)$ de $E\wedge E$: deux éléments de G commutent si leurs images x et y dans E ont leur produit extérieur $x\wedge y$ dans W. De plus, n'importe quel choix de W provient bien d'un groupe 2-nilpotent, qui est en fait un groupe algébrique affine sur K : ce groupe est défini sur l'ensemble $E\times F$ où $F = E\wedge E / W$, et sa loi est donnée par la formule $(x,u).(y,v) = (x + y , u + v + \varphi(x,y)/2)$, où φ est l'application bilinéaire canonique de $E\times E$ sur F.

Supposons que e_2 commute avec e_1 et e_3, qui eux-mêmes ne commutent pas : $e_1\wedge e_2 \in W$, $e_2\wedge e_3 \in W$, $e_1\wedge e_3 \notin W$; pour rendre la chose homogène, il faut ajouter un quatrième vecteur e_4 qui commute avec e_3 et pas avec e_2, mais que rien n'empêche de commuter avec e_1.

Nous faisons donc une première tentative en prenant E de dimension quatre, et W engendré par $e_1\wedge e_2$, $e_2\wedge e_3$, $e_3\wedge e_4$ et $e_1\wedge e_4$.

Nous rapportons le carré extérieur $E \wedge E$ à sa base formée des vecteurs $e_i \wedge e_j$, où $1 \leq i < j \leq 4$; le vecteur $a = a_1.e_1 + a_2.e_2 + a_3.e_3 + a_4.e_4$ commute avec le vecteur $x = x_1.e_1 + x_2.e_2 + x_3.e_3 + x_4.e_4$ si et seulement si les coordonnées du vecteur $a \wedge x$ sur $e_1 \wedge e_3$ et sur $e_2 \wedge e_4$ sont nulles, ce qui donne deux équations linéaires $a_1.x_3 - a_3.x_1 = 0$ et $a_2.x_4 - a_4.x_2 = 0$. Si a est générique, c'est-à-dire si ses quatre coordonnées sont transcendantes et algébriquement indépendantes, le centralisateur de a (dans E) est de dimension deux, et ses paramètres canoniques sont a_3/a_1 et a_4/a_2 ; a est donc générique dans son centralisateur et ça ne marche pas.

On fait donc une deuxième tentative en ajoutant à W le vecteur $e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4$; la commutation se traduit maintenant par l'égalité des coordonnées du vecteur $a \wedge x$ sur $e_1 \wedge e_3$ et sur $e_2 \wedge e_4$, ce qui donne une seule équation $a_1.x_3 - a_3.x_1 = a_2.x_4 - a_4.x_2$. Les centralisateurs des vecteurs non nuls sont donc tous de dimension trois, et si a est générique les paramètres canoniques de son centralisateur sont ses trois coordonnées homogènes a_2/a_1, a_3/a_1, a_4/a_1, sur lesquelles il est de rang un : il n'est donc pas générique dans son centralisateur. Et en effet, les deux vecteurs (a_4, a_3, a_2, a_1) et $(-a_2, -a_1, a_4, a_3)$ commutent avec a, mais ne commutent pas entre eux si $a_4^2 + a_2^2 \neq a_3^2 + a_1^2$, ce qui est bien le cas pour le générique.

Nous avons calculé les rangs dans $E = G/Z(G)$; comme $E \wedge E$ est de dimension six, et W est de dimension cinq, $Z(G)$ est de dimension un. Dans notre exemple minimal, $rg(g) = 5$, $\dim(Z) = 4$, $rg(g/z) = 2$, $rg(z) = 3 = \dim(C) + 2$, $rg(z/c) = 0$, $rg(g/z\hat{}c) = rg(g/c) = \dim(C) = 1$.

Notons pour finir que les groupes de Baudisch s'obtiennent en construisant, grâce à un amalgame de Hrushovski, une structure de rang un formée d'un espace vectoriel E sur le corps Z/pZ avec un sous-espace vectoriel W de son carré extérieur $E \wedge E$, la prédimension choisie pour un sous-espace U de dimension finie de E étant $\dim(U) - \dim(U \wedge U \cap W)$.

Exemple 9. Comment construire un exemple, si possible algébrique et connexe, où $Z°$ est commutatif sans être central dans Z ?

Exemple 10. Comment construire un exemple, si possible algébrique et connexe, où $Z°$ est d'indice fini dans N sans être central dans Z ?

4. Groupes minimaux des génériques

Dans cette section, nous présentons un autre candidat désireux de jouer le rôle des tores maximaux. Il est plus fragile que le centralisateur du générique, et nous n'avons pas pu l'exploiter pour montrer des résultats de nature algébrique ; mais il a la propriété remarquable, au vu de la Section 2, que le générique y est toujours générique.

Dans un groupe de rang de Morley fini, tout élément a est contenu dans un plus petit sous-groupe définissable A ; ce dernier est bien sûr abélien, étant contenu dans le centre du centralisateur de a ; il a même centralisateur que a . Il est définissable avec a comme paramètre, car s'il est défini par une formule $\varphi(x,\underline{b})$, c'est le plus petit sous-groupe contenant a qui soit défini par une formule du genre $\varphi(x,\underline{y})$.

Comme tout groupe abélien de rang de Morley fini, $A = B.D$, où B est définissable d'exposant borné et D définissable divisible ; comme A/D est cyclique, engendré par a modulo D , en fait D est la composante connexe $A°$ de A . Autrement dit, A est un groupe à torsion bornée (pour n fixé, l'équation $x^n = 1$ n'a qu'un nombre fini de solutions dans A) , $A°$ est divisible, et A est le produit direct de $A°$ par un groupe cyclique engendré par un élément α . Comme la torsion de A est bornée, α est algébrique sur a , ainsi que $\alpha^{-1}.a$, dont le groupe minimal est $A°$.

On peut remarquer que, dans un groupe de rang de Morley fini, tout point générique g n'a pour chaque n qu'un nombre fini de racines n° ; en effet, si $h^n = g$, $rg(h) = rg(h\wedge g) = rg(g) + rg(h/g)$, si bien que h est algébrique sur g . Si le groupe est connexe, on peut en dire un peu plus : le groupe minimal M de g est contenu dans celui de h ; comme h est aussi générique, ces deux groupes ont même rang et même degré de Morley, et sont donc égaux ; par conséquent les racines n° de G sont à chercher dans M , lequel est de torsion bornée ; dans ce cas, g a une racine n° si et seulement si n est premier à l'indice de $M°$ dans M .

Lemme 8. *Soit* A *un groupe de rang de Morley fini, qui soit le groupe minimal d'un de ses points* a *; alors, si* g *est un point de* $A°$ *générique sur* a *,* A *est aussi le groupe minimal de* $a.g$.

Démonstration. Si A est fini, c'est le groupe cyclique engendré par a , et le résultat est clair puisque $g = 1$. Supposons que nous ayons un contre-exemple ; $a = \alpha.b$, où b est dans $A°$, et α a pour ordre l'indice de $A°$ dans A ; $A°$ est le groupe minimal de b . Si g est un point de $A°$ générique sur a , $a.g$ appartient à un sous-groupe définissable propre M de $A°$, et $M \cap A°$ est un sous-groupe propre de $A°$ puisque A est engendré par $A°$ et a ; $(a.g)^n \in M \cap A°$. Mais, comme la torsion de A est bornée , $(a.g)^n$ algébrise $a.g$, et est un point générique de $A°$. Autrement dit, $A°$ est le groupe minimal de b , et son point générique appartient à un de ses sous-groupes définissables propres : nous avons un contre-exemple connexe.

Considérons donc un contre-exemple connexe A de rang minimum. Notons M le groupe minimal de son générique g , qui est un sous-groupe propre de A , de paramètre canonique m ; nous remarquons que M est connexe car, pour n assez grand, g^n , lui aussi générique, est dans $M°$.

Par minimalité, g est générique dans M ; en effet, sinon $rg(g/m) < dim(M)$, $rg(m) > dim(G) - dim(M)$, et, si h est générique dans M, $rg(h \wedge m) > dim(G)$, ce qui est impossible puisque M est le groupe minimal de h.

Soit B un sous-groupe définissable infini de A ; si A est le groupe minimal de a, A/B reste le groupe minimal de a modulo B. Par minimalité, il faut donc que le générique de A/B ne soit dans aucun sous-groupe définissable propre de A/B ; par conséquent, si g est générique sur les paramètres canoniques de B, $A = M.B$. En particulier, si g et g' sont génériques indépendants, $A = M.M'$.

Si M contenait de la torsion, il contiendrait une infinité d'éléments de torsion puisqu'il est divisible. Mais, comme la torsion de A est bornée, ses éléments de torsion sont algébriques sur vide, et ce sont toujours les mêmes qui appartiennent au groupe minimal du générique ; leur clôture définissable T est un groupe définissable sans paramètres, devant à la fois être inclus dans M et engendrer A modulo M, ce qui est impossible. Donc M, M' et $M \cap M'$ sont divisibles sans torsion, et il en est de même de A.

Considérons un sous-groupe infini définissable V de A de dimension minimale d. Si g est générique sur les paramètres de V, A est le produit direct de M et de V, si bien que V est définissablement isomorphe à A/M, que d est la codimension de M dans A. Si V et V' sont deux sous-groupes définissables de A de dimension d, en prenant g génériques sur leurs paramètres, nous voyons qu'ils sont définissablement isomorphes au quotient A/M.

Si B est un sous-groupe de A définissable infini, et g est générique sur ses paramètres, $B_1 = B \cap M$ est de codimension d dans B. S'il est infini, et si nous prenons g' générique sur les paramètres de B et de B_1, $B_2 = B \cap M'$ est de codimension d dans B, et $B_1 \cap B_2$ est de codimension d dans B_1, si bien que $B = B_1.B_2$. On en déduit, par induction sur sa dimension, que B est une somme de copies de V.

Considérons alors deux points g et g' génériques et indépendants, ainsi que leur différence $g'' = g^{-1}.g'$; g, g' et g'' sont deux-à-deux génériques et indépendants. Notons V et V' les images de M et de M' dans $A/M \cap M'$; le passage au quotient par M'' les rend toutes deux isomorphes à A/M''. Comme g et g' sont congrus modulo M'', on obtient ainsi un isomorphisme entre V et V' envoyant l'image h de g dans V sur l'image h' de g' dans V'. Remarquons que m et h sont définissables sur g, et que $rg(h/m) = d$ puisque h est générique dans $V = M/M \cap M'$. Comme g et g' sont indépendants, $rg(h \wedge h'/m \wedge m') = 2d$.

Autrement dit, si nous incorporons les paramètres de V et de V' au langage, nous avons h dans V, h' dans V', génériques et indépendants, et un isomorphisme définissable f de V dans V' tel que

$f(h) = h'$; $rg(f) \geq rg(f/h) \geq rg(f(h)/h) = d$. Soit a un point $\neq 1$ dans V ; comme V et V' sont des groupes minimaux (sans sous-groupes définissables propres), f est l'unique isomorphisme définissable entre V et V' qui envoie a sur $f(a)$, si bien que $rg(f/a) = rg(f(a)/a) \leq d$. Si donc nous prenons a et f indépendants, nous voyons qu'en fait $rg(f) = d$, et que $f(a)$ est générique sur a . Pour dire les choses autrement, si a et b sont deux éléments $\neq 1$ quelconque de V , et si c dans V' est générique sur a^b , il existe un homomorphisme définissable de V dans V' qui envoie a sur c , et un autre qui envoie b sur c ; par composition cela donne un automorphisme définissable de V qui envoie a sur b .

Décomposons alors notre groupe en somme de copies de V , $A = V_0 \times V_1 \times ... \times V_n$; considérons $a = (a_0, a_1, ... a_n)$ de coordonnées non toutes nulles, par exemple $a_0 \neq 0$; il existe un homomorphisme définissable f_1 de V_0 dans V_1 envoyant a_0 sur a_1 , ... un homomorphisme définissable f_n de V_0 dans V_n envoyant a_0 sur a_n ; a appartient à $\{(x,f_1(x), ... f_n(x)) / x \in V_0 \}$, si bien que tout élément de A appartient à une copie de V , ce qui est la contradiction de la **Fin.**

Remarque 2. Nous n'avons pas eu besoin d'aller jusqu'à définir une structure de K-espace vectoriel sur A , où K est un corps définissable de caractéristique nulle, coloré avec doigté (voir [BHPW 2009]) pour qu'il soit de dimension d ; c'est cependant facile de l'obtenir en procédant comme dans [Poizat 1987] p. 79. En fait, un groupe abélien sans torsion, de dimension minimale, dont le générique (et même tout élément !) est contenu dans un sous-groupe définissable propre est un K-espace vectoriel de dimension deux. C'est un fait intimement lié au résultat de Zil'ber, définissant un corps dans un groupe G nilpotent sans torsion, dont nous avons parlé ; en effet, dans le quotient de G par son dernier centre, tout élément appartient à l'image de son centralisateur modulo l'avant-dernier centre.

En Géométrie algébrique, les groupes sans torsion n'apparaissent qu'en caractéristique nulle. Ce sont des groupes linéaires unipotents, donc nilpotents, et s'ils sont commutatifs ce sont des "groupes vectoriels", espaces vectoriels (de dimension finie !) sur le corps de base. Dans le cadre général du rang de Morley fini, cette structure de corps K n'apparait que si on leur met suffisamment de sous-groupes définissables : dans le pur langage des groupes, ils ne sont rien que des groupes divisibles sans torsion.

Corollaire 9. *Dans un groupe de rang de Morley fini, chaque point générique est générique dans son groupe minimal.*

Démonstration. Soit M le groupe minimal du point générique g , dont le paramètre canonique est noté m . Comme $dim(G) = rg(g) = rg(g$^$m) =$

$rg(m) + rg(g/m)$, si $rg(g/m) < \dim(M)$, alors $rg(m) > \dim(G) - \dim(M)$. Soit h un point générique de M ; $\dim (h\hat{}m) > \dim(G)$, si bien que m n'est pas algébrique sur h , que M n'est pas le groupe minimal de h , ce qui contredit le Lemme 8. **Fin**

Autre mystère enveloppant la Conjecture de Cherlin-Zilber (surtout quand on pense qu'il pourrait y avoir des mauvais groupes d'exposant fini !) : dans un groupe algébrique simple, les tores maximaux sont aussi les groupes minimaux des points génériques. Ces groupes minimaux ont la faiblesse de dépendre a priori du langage, alors que les centralisateurs, eux, se définissent robustement dans le pur langage des groupes. Il est peut-être possible d'ajouter de la structure à un groupe algébrique simple de manière à rétrécir les groupes minimaux des génériques ; on ne peut le faire en caractéristique p , comme le montre le lemme suivant, modeste pièce à verser au dossier de la bonté des tores (voir [Cherlin 2008]) :

Lemme 10. *Si* K *est un corps de rang de Morley fini et de caractéristique* p *, le groupe multiplicatif* $K^{*n} = K^* \times ... \times K^*$ *est le groupe minimal de son générique.*

Démonstration. Soit g un point générique de K^{*n} et M son groupe minimal. Comme la structure formée de K et de $M°$ est préservée sous l'action du frobenius, son modèle premier, d'après [Wagner 2003], est porté par la clôture algébrique du corps premier. On en déduit que M est la clôture définissable de sa torsion, laquelle ne dépend pas de g ; M est donc le même pour tous les génériques, et ne peut qu'être égal à K^{*n} , dont chaque élément est le produit de deux génériques. **Fin**

5. Centralisateurs généreux

Le mot "générique" est apparu pour la première fois, dans le contexte des groupes stables, dans [Poizat 1983], suivant une suggestion de Gregory Cherlin qui l'avait proposé peu de temps auparavant comme équivalent français du plus lourd "type maximal dans l'ordre fondamental stratifié". Quant au terme "generous", c'est une création de l'anglophile [Jaligot 2006], dont sont extraites, sous forme paraphrasée, les lignes suivantes jusqu'au Corollaire 13 (la démonstration du Lemme 11 est celle de Cherlin).

Nous supposons que G agit sur A , dans un contexte d'univers rangé. Soit B une partie définissable de A , et soit N son normalisateur ; l'ensemble des conjugués de B s'identifie au quotient à droite G/N ; pour chaque entier r , on note B_r l'ensemble des x de B tels que les conjugués de B qui passent par x forment un ensemble de rang r .

Lemme 11. *Si* B_r *n'est pas vide,* $\dim(\cup_{g\in G} B_r^{\,g}) = \dim(G) - \dim(N) + \dim(B_r) - r$.

Démonstration. On considère l'ensemble C des couples (x,y) tels que x soit dans $\cup B_r^{\,g}$ et y soit un conjugué de B auquel x appartienne ; par additivité du rang, on obtient en projetant sur la première coordonnée, puis sur la deuxième $\dim(C) = \dim(\cup B_r^{\,g}) + r = \dim(G/N) + \dim(B_r)$. **Fin**

Définition 1. Une partie définissable du groupe G est dite *généreuse* si la réunion de ses conjuguées est générique.

Lemme 12. *Soient* G *un groupe de rang de Morley fini,* H *un sous-groupe définissable de* G *et* a *un élément du normalisateur de* $H°$ *; la cossette* aH *est généreuse si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) $H°$ *est d'indice fini dans le normalisateur* N *de* aH

(ii) les points de la cossette qui n'appartiennent qu'à un nombre fini de conjuguées de cette dernière en forment une partie générique.

Démonstration. Sous ces hypothèses, $H°$ est contenu dans N . Si cette cossette B est généreuse, l'un des B_r l'est aussi, et on a alors $\dim(G) = \dim(\cup B_r^{\,g}) = \dim(G) - \dim(N) + \dim(B_r) - r$; comme $\dim(N) \geq \dim(H°) = \dim(H) \geq \dim(B_r)$, il faut que $r = 0$ et que $\dim(N) = \dim(H) = \dim(B_0)$; la réciproque est claire. **Fin**

Corollaire 13. *Un sous-groupe définissable* H *de* G *est généreux si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) H *est d'indice fini dans son normalisateur*

(ii) les éléments de H *qui n'appartiennent qu'à un nombre fini de conjugués de* H *en forment une partie générique.*

Démonstration. H est inclus dans son normalisateur. **Fin**

Remarquons que, si H est généreux dans G , il y a un point générique de G qui est générique dans un conjugué de H .

On déduit des Lemmes 8 et 11 que, si A est le groupe minimal de a , de normalisateur N , $\dim(\cup_{g\in G} A^g) = \dim(G) - \dim(N) + \dim(A)$, puisque les éléments de A qui n'appartiennent à aucun autre conjugué de A en forment une partie générique. A est généreux si et seulement s'il est d'indice fini dans son normalisateur ; dans ce cas il est d'indice fini dans son centralisateur, qui est aussi celui de a .

Théorème 14. *Si* G *est de rang de Morley fini,* a *et* g *sont deux éléments de* G *,* g *étant générique sur* a *, alors* g *ne commute qu'avec un nombre fini de conjugués de* a .

Démonstration. C'est vrai si g ne commute avec aucun conjugué de a . Sinon, le centralisateur Z de a est généreux. Il est donc d'indice fini dans son normalisateur N , si bien qu'il n'y a qu'un nombre fini de conjugués de a qui soient centraux dans Z , c'est-à-dire qui ont même centralisateur que a . D'autre part Z_0 est généreux, tandis que son complémentaire dans Z ne l'est pas ; en conséquence, g appartient à un conjugué de Z_0 : il n'est contenu que dans un nombre fini Z_1 , ... Z_s de conjugués de Z , et ne commute qu'avec un nombre fini de conjugués de a , ceux qui centralisent l'un des Z_i . **Fin**

Question 3. Les groupes existentiellement clos satisfont une propriété qui est en forte opposition avec celle décrite dans le dernier théorème : si $a \neq 1$, tout élément b commute avec une infinité de conjugués de a . Pour le voir, il suffit de montrer que si $a \neq 1$ et b sont dans G , on peut trouver une extension de G contenant un nouveau conjugué de a qui commute avec b ; pour cela, on commence par ajouter a' , de même ordre que a , qui commute avec G , puis un élément c qui conjugue a et a' . On peut se demander si cette dernière propriété est compatible avec des conditions algébriques comme la condition de chaîne sur les centralisateurs, la linéarité, ou bien logiques, comme la stabilité, la superstabilité ou même la oméga-stabilité.

Définition 2. Dans un groupe connexe de rang de Morley fini, nous dirons que a est un *D-élément* si son centralisateur est généreux, c'est-à-dire si a commute avec un conjugué d'un point générique sur a .

Par définissabilité générique, les D-éléments forment une partie définissable de G .

Cette définition propose timidement une version abstraite de la notion d'élément semi-simple dans les groupes algébriques linéaires. Elle est correcte pour ce qui est des groupes algébriques linéaires connexes réductifs, si bien que, si la Conjecture de Cherlin-Zilber est vraie, elle doit fonctionner pour les groupes simples de rang de Morley fini. Par contre, elle échoue lamentablement pour les groupes connexes nilpotents, dont les seuls D-éléments sont les éléments centraux.

On remarque en passant que la notion de D-élément fait sens dans n'importe quel groupe G , indépendemment de toute notion modèle-théorique : il s'agit des points a pour lesquels le groupe G est réunion d'un nombre fini de translatés de la réunion des conjugués du centralisateur de a .

Cette définition est analogue à celle qui est proposée par [ABF 201?], à une différence importante près : ces auteurs, travaillant dans un contexte minimal, arrivent à en tirer quelque chose, tandis que le seul résultat général qui est montré ici à son propos a un petit air misérable :

Lemme 15. *Si* a *est un D-élément de* G *, groupe connexe de rang de Morley fini, et* g *est générique sur* a*, la composante connexe du centralisateur de* a *contient celle du centralisateur d'un conjugué de* g.

Démonstration. D'après le Théorème 14, le centralisateur Z de g contient un nombre fini de conjugués de a ; Z agit par conjugaison sur cet ensemble fini, qui est centralisé par sa composante connexe $Z°$; par conséquent un conjugué de $Z°$ commute avec a. **Fin**

Question 4. Une conséquence bien connue du Hauptidealsatz est que, dans un groupe algébrique connexe, les centralisateurs des points génériques sont de dimension minimale. Dans un groupe connexe de rang de Morley fini, le Lemme 15 montre que le centralisateur d'un D-élément est de dimension supérieure à celle du centralisateur d'un point générique ; mais peut-on dire quelque chose de plus ?

6. Groupes génériquement diagonalisables

Pour obtenir quelque chose d'une définition s'appuyant sur une propriété générique, il faut supposer (ou démontrer !) que les points génériques ont un comportement civilisé. Cela justifie la définition qui suit.

Définition 3. Nous dirons qu'un groupe connexe de rang de Morley fini est *génériquement diagonalisable* si ses génériques sont des D-éléments ; cela signifie que, si g et g' sont génériques et indépendants, chacun commute avec un conjugué de l'autre.

Remarquons bien que cette propriété s'exprime dans le pur langage des groupes : elle signifie qu'un nombre fini de translatés de l'ensemble des D-éléments recouvre le groupe !

Nous considérons donc maintenant un groupe connexe G génériquement diagonalisable. Nous reprenons les notations de la première section : g désigne un point générique de G, z et c désignent les paramètres canoniques respectifs de son centralisateur Z et de sa classe de conjugaison C. Nous notons z' le paramètre canonique de $g.Z°$.

Nous commençons par deux lemmes préparant le théorème final.

Lemme 16. *La cossette* $g.Z°$ *est généreuse, et* g *en est un point générique.*

Démonstration. Soit h générique sur g ; Z contient un nombre fini h_1, ... h_s de conjugués de h, qui sont centralisés par $Z°$ (voir le Théorème 14 et le Lemme 15). Comme h et g ont même type, la dimension du centralisateur d'un h_i est la même que celle de Z, si bien que $Z°$ est la composante connexe du centralisateur de chacun des h_i.

Comme Z est généreux, il en est de même d'une de ses classes modulo $Z°$, qui est donc de la forme $h_i.Z°$ puisqu'elle doit contenir un conjugué de h ; par conséquent la classe de h modulo la composante connexe de son centralisateur est généreuse, et il en est de même de $g.Z°$ puisque g a même type que h.

Notons H le centralisateur de $Z°$; comme il contient les h_i, il est généreux, et d'indice fini dans son normalisateur ; comme $Z°$ normalise H, il est inclus dans $H°$; autrement dit, $Z°$ est commutatif.

Enfin, si les points de $g.Z°$ dont le centralisateur a pour dimension $\dim(Z)$ formaient un ensemble de trop petite dimension, cette cossette ne pourrait être généreuse ; la conclusion suit du Théorème 6. **Fin**

Lemme 17. *La cossette $g.Z°$ ne contient qu'un nombre fini de conjugués de g.*

Démonstration. Soit g^a un conjugué de g contenu dans $g.Z°$; comme cette dernière est commutative, g^a commute avec $Z°$, qui est la composante connexe de son centralisateur ; autrement dit, a normalise $Z°$, ainsi que la cossette $g.Z°$. Comme cette cossette est généreuse, son normalisateur (qui est le centralisateur de g modulo $Z°$) a même dimension que $Z°$. Ce dernier est donc d'indice fini dans le normalisateur de $g.Z°$, et il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour $a.Z°$. **Fin**

Théorème 18, et final. *Pour un groupe G connexe de rang de Morley fini les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G est génériquement diagonalisable, c'est-à-dire que les centralisateurs de ses points génériques sont généreux.

(ii) Un point générique g de G est générique dans son centralisateur Z, lequel ne contient qu'un nombre fini de conjugués de g.

(iii) Si g est un point générique de G, z et c sont indépendants.

(iv) Les centralisateurs des points génériques de G sont conjugués.

(v) Les centres des centralisateurs des points génériques de G sont conjugués.

(vi) G a un sous-groupe abélien définissable généreux.

(vii) G a une partie commutative (non nécessairement définissable) généreuse.

(viii) Il existe une cossette commutative, modulo un sous-groupe définissable connexe, qui est généreuse dans G.

Le point (vii) n'a été mis là que pour avoir une caractérisation indépendante de la Théorie des Modèles : la générosité d'une partie non-définissable A de G signifie que ce dernier est réunion d'un nombre fini de translatées de la réunion des conjuguées de A (comme il s'agit d'une partie normale de G, on peut considérer au choix des translations à gauche, à droite, ou bilatères). Le point (viii) a été ajouté par le rapporteur anonyme de cet article ; il a aussi remarqué que ce théorème, si on en supprime le point (iii), peut se démontrer sans faire intervenir des paramètres canoniques, en utilisant le Lemme 12.

Démonstration. Montrons que (i) implique (ii). Comme $g.Z°$ est une cossette de Z modulo sa composante connexe, son paramètre canonique z' est algébrique sur z. Par ailleurs, Z est contenu dans le centralisateur de g modulo $Z°$, qui est le normalisateur de $g.Z°$; comme la cossette est généreuse, $Z°$ est d'indice fini dans ce dernier (Lemme 12), si bien que z est lui aussi algébrique sur z'. Comme z et z' sont co-algébriques, ils sont équivalents dans les calculs de rang : d'après le Lemme 16 $rg(g/z') = dim(Z)$, et en conséquence $rg(g/z) = dim(Z)$; g est générique dans Z, lequel est central par fini.

Comme $Z°$ est central dans Z, si g^a est un conjugué de g contenu dans ce dernier, $Z°$ est la composante connexe de son centralisateur ; par conséquent, a normalise $Z°$. Comme il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour la cossette $g^a.Z°$, d'après le Lemme 17 il n'y a qu'un nombre fini de conjugués de g dans Z.

Montrons maintenant que (ii) implique (iii). En effet, d'une part g est algébrique sur z^c, d'autre part $rg(g/z) = dim(Z)$, et donc $rg(z) = dim(C)$; comme $rg(z\text{^}c) = rg(g) = dim(G) = dim(C) + dim(Z) = rg(z) + rg(c)$, il faut que z et c soient indépendants.

Montrons ensuite que (iii) implique (iv). Si z et c sont indépendants, le paramètre canonique ζ de la classe de conjugaison de Z, étant à la fois algébrique sur z et algébrique sur c, doit être algébrique sur $\varnothing$ (ou sur l'ensemble de paramètres convenu d'avance !) : il n'y a donc qu'un nombre fini de classes de conjugaison pour les centralisateurs des points génériques de G, et en fait qu'une seule à cause de sa connexité.

Il est évident que (iv) et (v) sont équivalents, puisque Z et son centre sont chacun le centralisateur de l'autre ; de plus (v) implique que le centre de Z est généreux, soit encore (vi), lequel implique clairement (i).

Enfin (vii) est équivalent à (vi), puisque tout ensemble commutatif est inclus dans le centre de son centralisateur, lequel est définissable ; il en est de même de (viii), puisque si un sous-groupe définissable est généreux, une de ses cossettes modulo sa composante connexe doit être également généreuse. **Fin**

Corollaire 19. *La diagonisabilité générique se transmet aux quotients par un sous-groupe normal définissable, et aux sous-groupes connexes définissables qui contiennent une partie commutative généreuse.*

Démonstration. Soit G (connexe et) génériquement diagonalisable, et soit G_1 un sous-groupe définissable normal de G ; si A est une partie commutative généreuse de G , l'image de A dans G/G_1 est une partie généreuse de ce dernier. Par ailleurs, si H est un sous-groupe connexe qui contient A , l'intersection H_1 de H et du centre du centralisateur de A est généreuse dans G ; d'après le Corollaire 13, ce groupe est aussi généreux dans H : en effet, dans H_1 on peut définir la généricité grâce au rang de Morley calculé au sens de G , ou bien grâce aux translations. **Fin**

Il faut noter que le groupe abélien généreux dont il est question dans le Théorème 18 ne peut être connexe que si le générique est dans la composante connexe de son centralisateur : ce théorème n'élimine pas les groupes infinis connexes ayant un point de centralisateur fini, dont l'existence éventuelle contredirait la Conjecture de Cherlin-Zilber. Il ne semble pas avoir de lien direct avec les tentatives récentes d'établir l'existence de sous-groupes nilpotents *connexes* généreux dans tout groupe de rang de Morley fini (voir à ce propos l'introduction de [Jaligot 2009]).

Conclusion

L'étude des groupes de rang de Morley fini oscille entre la Théorie des Groupes et la Théorie des Modèles, et cet article penche plutôt vers le second pôle. En effet, il manipule des points génériques, ce qui oblige pour les trouver à remplacer éventuellement les groupes considérés par des extensions élémentaires, manipulation en principe inutile d'après la préface de [Poizat 1987] (et en effet on peut remplacer la considération des types génériques par celle de vastes ensembles définissables). Par ailleurs il fait un usage intensif des paramètres canoniques (par exemple en s'appuyant sur la co-algébraïcité de z et de z' dans la démonstration du Théorème 18), qui devraient pouvoir être éliminés des démonstrations des énoncés qui ne les mentionnent pas. Enfin, certains de ses résultats ne sont que des curiosités modèle-théoriques, sans vraie traduction algébrique.

La modestie des résultats obtenus, ainsi que le nombre des questions posées, s'expliquent peut-être par le côté fantasque de la Conjecture de Cherlin-Zilber. En effet, dans les groupes algébriques (infinis !) simples, les centralisateurs des points génériques, qui sont aussi leurs groupes minimaux, sont connexes et généreux, mais ont aussi d'autres propriétés étonnantes et bien connues qui n'ont pas été envisagées ici : ce sont des groupes commutatifs divisibles, des bons tores qui contiennent des éléments d'ordre p pour chaque nombre premier p , sauf éventuellement un seul (la caractéristique de leur corps de base). Ils ne sont pas autonormalisants, et le groupe N/Z , c'est-à-dire le groupe de Weyl, est un groupe de Coxeter, qui est un outil essentiel pour leur classification. On voit mal comment nos simples calculs de dimension ou de rang pourraient faire apparaître de la torsion dans Z , ou des involutions dans N/Z !

Signalons aussi, pour conclure, qu'il y a une raison très brutale expliquant pourquoi les centralisateurs génériques des groupes algébriques simples sont conjugués : ces groupes n'ont qu'un nombre fini de classes de conjugaison pour les centralisateurs de leurs éléments.[3] Comment va-t'on intégrer une chose pareille au contexte des groupes simples de rang de Morley fini ?

Références

[ABF 201?] Tuna ALTINEL, Jeffrey BURDGES et Olivier FRECON, A Jordan decomposition for groups of finite Morley rank, *à paraître*

[AW 201?] Tuna ALTINEL et John S. WILSON, On the linearity of torsion-free nilpotent groups of finite Morley rank, *à paraître*

[Baudisch 1996] Andreas BAUDISCH, A new uncountably categorical group, *Transactions of the American Mathematical Society,* 48, 3889-3940

[BHPW 2009] Andreas BAUDISCH, Martin HILS, Amador PIZARRO et Frank WAGNER, Die böse Farbe, *Journal de l'Institut Mathématique de Jussieu,* 3, 415–443

[BN 1994] Aleksandr Vasilievich BOROVIK et Ali Azizoğlu NESIN, *Groups of finite Morley Rank,* Clarendon Press, Oxford

[Cherlin 2008] Gregory CHERLIN, Genericity, generosity, and tori, *Journal de l'Institut Mathématique de Jussieu,* 4, 705–722

[Hrushovski 1992] Ehud HRUSHOVSKI, Strongly minimal expansions of algebraically closed fields, *Israel Journal of Mathematics,* 79, 129-151

[Jaligot 2006] Eric JALIGOT, Generix never gives up, *The Journal of Symbolic Logic*, 71, 599-610

[Jaligot 2009] Eric JALIGOT, Cosets, genericity, and the Weyl Group, *Journal of Algebra,* 322, 1060-1061

[Poizat 1983] Bruno POIZAT, Groupes stables, avec types génériques réguliers, *The Journal of Symbolic Logic,* 48, 339-355

[Poizat 1987] Bruno POIZAT, *Groupes Stables*, Nur al-Mantiq wal Ma'rifah, Villeurbanne

[Wagner 2003] Frank O. WAGNER, Bad fields in positive characteristic, *Bulletin of the London Mathematical Society,* 35, 499-502

[3] Je ne peux malheureusement justifier cette affirmation qu'en me référant à une conversation avec le savant dont il est question au début de cet article.