Teori zincirleri

David Pierce

Diyarbakır, Eylül, 2013

Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi
http://mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/

Eğer

$$(G_1, *_1) \subseteq (G_2, *_2) \subseteq (G_3, *_3) \subseteq \cdots \tag{1}$$

zincirinde her $(G_k, *_k)$ yapısı bir grup ise, o zaman

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k, *_k) \tag{2}$$

bileşimi de bir gruptur, dolayısıyla, sadece $*$ işaretini kullanarak, grup aksiyomları $\forall\exists$ biçiminde yazılabilir (Chang 1959; Łoś–Suszko 1957). Aslında

$$\left.\begin{array}{c} \forall x\,\forall y\,\forall z\; x * (y * z) = (x * y) * z, \\ \forall x\,\forall y\,\exists z\; (z * x = y), \\ \forall x\,\forall y\,\exists z\; (x * z = y) \end{array}\right\} \tag{3}$$

biçiminde yazılabilir.

Şimdi $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$, bir K cismi üzerinde cebirsel olarak bağımsız olsun, her n için

$$K_n = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \qquad V_n = K_n + K_n\alpha_{n+1} \tag{4}$$

olsun. Her (V_n, K_n) ikilisi, alışılmış işaretlerle bir vektör uzayı olarak düşünülsün. O zaman

$$(V_1, K_1) \subseteq (V_2, K_2) \subseteq (V_3, K_3) \subseteq \cdots, \tag{5}$$

$$\dim(V_n, K_n) = 2, \tag{6}$$

$$\dim\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(V_n, K_n)\right) = 1. \tag{7}$$

Sonuç olarak 2-boyutlu vektör uzayları teorisinin $\forall\exists$ biçimindeki aksiyomları yoktur.

Her k için $\boxed{B_k,}$ k-konumlu doğrusal bağımlılık işareti olsun.

Her n için $B_2, \ldots, B_n$ işaretleri ve alışılmış işaretlerle $\boxed{\mathrm{VU}_n,}$ vektör uzayları teorisi olsun. Öyleyse

$$\mathrm{VU}_1 \subseteq \mathrm{VU}_2 \subseteq \mathrm{VU}_3 \subseteq \mathrm{VU}_4 \subseteq \cdots \tag{8}$$

$\boxed{{\mathrm{VU}_n}^*,}$ VU_n teorisinin cebirsel kapalı cisim üzerindeki n-boyutlu modelleri teorisi olsun. O zaman VU_n ile ${\mathrm{VU}_n}^*$ teorilerinin $\forall\exists$ aksiyomları vardır.

Lemma (P. 2009)**.** $[L : K] \geqslant n + 1$ ise

$$(K^{n+1}, K, B_n) \rightarrowtail (L^n, L, B_n). \tag{9}$$

Teorem (P. 2009)**.** ${\mathrm{VU}_n}^*$ teorisi, VU_n teorisinin **model arkadaşıdır** (*model companion*), yani VU_n teorisinin varlıksal kapalı modelleri, ${\mathrm{VU}_n}^*$ teorisinin modelleridir. Bu teorinin tamamlanışları, sayılabilir istikrarlıdır ($\boldsymbol{\omega}$-*stable*).

Bir T teorisinin model arkadaşı varsa, T^* ile gösterilsin.

Teorem (Medvedev 2011)**.** $T_1 \subseteq T_2 \subseteq T_3 \subseteq \cdots$ olsun.

1. Her T_n teorisinin model arkadaşı varsa, ve

$$T_1{}^* \subseteq T_2{}^* \subseteq T_3{}^* \subseteq \cdots \tag{10}$$

   ise, o zaman

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n\right)^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n{}^*. \tag{11}$$

2. Her T_n tam ve istikrarlı ise bileşimleri de tam ve istikrarlıdır.

Örnek (Kasal–P. 2013)**.** $\mathrm{VU}_1 \subseteq \mathrm{VU}_2 \subseteq \mathrm{VU}_3 \subseteq \cdots$, ve bileşimlerinin model arkadaşı vardır, ama

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{VU}_n\right)^* \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{VU}_n{}^*. \tag{12}$$

TC^m, m tane değişmeli türetmesi (*derivation*) olan cisimler teorisi olsun. Cisimlerin karakteristiği p ise, teori TC_p^m olsun.

Teorem (P. 2007)**.** Her TC^m teorisinin TKC^m model arkadaşı vardır. Özel olarak her TC_0^m teorisinin TKC_0^m model arkadaşı vardır, ve bu teori tam ve sayılabilir istikrarlıdır.

Teorem (Kasal–P. 2013)**.**

1. $\mathrm{TKC}_0^m \subseteq \mathrm{TKC}_0^{m+1}$, dolayısıyla

$$\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathrm{TC}_0^m\right)^* = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathrm{TKC}_0^m, \tag{13}$$

   ve bu teori tam ve istikrarlıdır. Sayılabilir istikrarlı değildir, hatta çok istikrarlı bile değildir.
2. $p > 0$ ve asal ise $\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathrm{TC}_p^m$ bileşiminin model arkadaşı yoktur.