Teori zincirleri

David Pierce

Diyarbakır, Eylül, 2013
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi
http://mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/

[Slaytlar ve notlar, 20 dakika konuşma için.]

Konum, modeller kuramıdır.

Benim için modeller kuramı, teorilerin modelleri olarak yapıların araştırılmasıdır.

Teori *zincirleri* hakkında konuşacağım.

Yarım yüzyıl önce, bazı modeller kuramcıları, *yapı* zincirlerini araştırıyorlardı.

Örneğin bir gruplar zincirine bakalım.

Eğer

$$(G_1, *_1) \subseteq (G_2, *_2) \subseteq (G_3, *_3) \subseteq \cdots \tag{1}$$

zincirinde her $(G_k, *_k)$ yapısı bir grup ise, o zaman

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k, *_k) \tag{2}$$

bileşimi de bir gruptur, dolayısıyla, sadece $*$ işaretini kullanarak, grup aksiyomları $\forall\exists$ biçiminde yazılabilir (Chang 1959; Łoś–Suszko 1957). Aslında

$$\left.\begin{aligned} \forall x\ \forall y\ \forall z\ x * (y * z) = (x * y) * z, \\ \forall x\ \forall y\ \exists z\ (z * x = y), \\ \forall x\ \forall y\ \exists z\ (x * z = y) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

biçiminde yazılabilir.

Bir grubun 3 tane özelliği var:

i) birleşmeli çarpma vardır,
ii) birim elemanı vardır,
iii) her elemanın tersi vardır.

Bu özellikler, sadece çarpma işareti ile yazılabilir. Son iki özellik,

$$\exists x\ \forall y\ \forall z\ \exists w\ (x * y = y \land w * z = x)$$

cümlesi ile yazılabilir. Bu cümle, $\exists\forall\exists$ (“tikel-tümel-tikel”) biçimindedir.

Ama her gruplar zincirinin bileşimi hâlâ bir gruptur, dolayısıyla, Chang–Łoś–Suszko Teoremine göre, sadece bir çarpma işareti kullanarak, grup aksiyomları $\forall\exists$ (“tümel-tikel”) biçiminde yazılabilir.

Aslında bu aksiyomlar, perdedeki (3) numaralı satırdaki gibi olabilir.

Şimdi $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$, bir K cismi üzerinde cebirsel olarak bağımsız olsun, her n için

$$K_n = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \qquad V_n = K_n + K_n\alpha_{n+1} \tag{4}$$

olsun. Her (V_n, K_n) ikilisi, alışılmış işaretlerle bir vektör uzayı olarak düşünülsün. O zaman

$$(V_1, K_1) \subseteq (V_2, K_2) \subseteq (V_3, K_3) \subseteq \cdots, \tag{5}$$
$$\dim(V_n, K_n) = 2, \tag{6}$$
$$\dim\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(V_n, K_n)\right) = 1. \tag{7}$$

Sonuç olarak 2-boyutlu vektör uzayları teorisinin $\forall\exists$ biçimindeki aksiyomları yoktur.

Şimdi vektör uzaylarına bakalım.

Perdede görüldüğü gibi bir iki-boyutlu vektör uzayları zincirinin bileşimi, bir-boyutlu bir vektör uzayı olabilir.

Sonuç olarak iki boyutlu vektör uzaylarının aksiyomları, tümel-tikel biçiminde yazılamaz.

Burada alışılmış işareteri kullanıyoruz:

- $\boldsymbol{+}$, $\boldsymbol{-}$, $\mathbf{0}$ işaretleri, vektörler için,
- $+$, $-$, $\cdot$, 0, 1 işaretleri, cisim için,
- $*$, vektörler üzerinde cismin etkisi için.

Paralellik işareti eklenirse, iki boyutlu vektör uzaylarının aksiyomları, tümel-tikel biçiminde yazılabilir. Örneğin aksiyomların biri,

$$\forall\vec{x}\ \exists\vec{y}\ \neg(\vec{x} \parallel \vec{y})$$

olabilir. Paralellik, iki konumlu doğrusal bağımlılıktır.

Her k için $\boxed{B_k,}$ k-konumlu doğrusal bağımlılık işareti olsun.

Her n için B_2, …, B_n işaretleri ve alışılmış işaretlerle $\boxed{\mathrm{VU}_n,}$ vektör uzayları teorisi olsun. Öyleyse

$$\mathrm{VU}_1 \subseteq \mathrm{VU}_2 \subseteq \mathrm{VU}_3 \subseteq \mathrm{VU}_4 \subseteq \cdots \tag{8}$$

$\boxed{\mathrm{VU}_n{}^*,}$ VU_n teorisinin cebirsel kapalı cisim üzerindeki n-boyutlu modelleri teorisi olsun. O zaman VU_n ile $\mathrm{VU}_n{}^*$ teorilerinin $\forall\exists$ aksiyomları vardır.

Lemma (P. 2009)**.** $[L:K] \geqslant n+1$ ise

$$(K^{n+1}, K, B_n) \rightarrowtail (L^n, L, B_n). \tag{9}$$

Teorem (P. 2009)**.** $\mathrm{VU}_n{}^*$ teorisi, VU_n teorisinin **model arkadaşıdır** (*model companion*), yani VU_n teorisinin varlıksal kapalı modelleri, $\mathrm{VU}_n{}^*$ teorisinin modelleridir. Bu teorinin tamamlanışları, sayılabilir istikrarlıdır (ω-*stable*).

Perdedeki gibi

- B_k, k-konumlu doğrusal bağımlılık işareti olsun ve
- VU_n, vektör uzayları teorisi olsun, ama bu teori, $k \leqslant n$ koşulunu sağlayan B_k işaretlerini kullansın.

Öyleyse perdedeki (8) numaralı satırdaki teoriler zincirini elde ederiz.

VU_n teorisinin her modeli, cismi cebirsel kapalı olan bir modeline gömülebilir. O zaman, perdedeki lemmaya göre, VU_n teorisinin her modeli, n *boyutlu,* cismi cebirsel kapalı olan bir modeline gömülebilir. Öyle modellerin teorisi, $\mathrm{VU}_n{}^*$ ile gösterilsin.

Bu teorinin bir modeli üzerinde, niceleyicisiz bir formülün daha büyük bir modelde çözümü varsa, formülün zaten ilk modelde çözümü vardır. Yani $\mathrm{VU}_n{}^*$ teorisinin modelleri, VU_n teorisinin *varlıksal kapalı modelleridir.*

Sonuç olarak $\mathrm{VU}_n{}^*$ teorisine, VU_n teorisinin *model arkadaşı* denir.

İstikrarlılık hakkında belki sonra konuşacağım.

Bir T teorisinin model arkadaşı varsa, T^* ile gösterilsin.

Teorem (Medvedev 2011). $T_1 \subseteq T_2 \subseteq T_3 \subseteq \cdots$ olsun.

1. Her T_n teorisinin model arkadaşı varsa, ve
$$T_1{}^* \subseteq T_2{}^* \subseteq T_3{}^* \subseteq \cdots \tag{10}$$
ise, o zaman
$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n\right)^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n{}^*. \tag{11}$$
2. Her T_n tam ve istikrarlı ise bileşimleri de tam ve istikrarlıdır.

Örnek (Kasal–P. 2013). $\mathrm{VU}_1 \subseteq \mathrm{VU}_2 \subseteq \mathrm{VU}_3 \subseteq \cdots$, ve bileşimlerinin model arkadaşı vardır, ama
$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{VU}_n\right)^* \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{VU}_n{}^*. \tag{12}$$

Bir T teorisinin model arkadaşı olmayabilir, ama varsa, tek bir model arkadaşı vardır. O halde bu model arkadaşı T^* ile gösterilsin.

Şimdi Alice Medvedev'in teoremindeki gibi T_n teorileri, bir zincir oluştursun. Her T_n teorisinin $T_n{}^*$ model arkadaşı varsa, *ve* bu model arkadaşları, (10) numaralı satırdaki gibi bir zinciri oluşturursa, o zaman T_n teorileri zincirinin bileşiminin model arkadaşı vardır, ve bu model arkadaşı, (11) numaralı satırdaki gibi, $T_n{}^*$ teorilerinin bileşimidir.

Burada (10) satırdaki koşul önemlidir. Bu koşul sağlanmazsa (yani $T_n{}^*$ teorisi, $T_{n+1}{}^*$ teorisi tarafından içerilmezse), bazen T_n teorilerinin bileşiminin model arkadaşı vardır, bazen yoktur.

Örneğin her T_n teorisi, VU_n teorisi ise, bileşimlerinin model arkadaşı vardır, ama $\mathrm{VU}_n{}^*$ teorilerinin bileşimi değildir: olamaz, çünkü bu bileşim, tutarsızdır.

TC^m, m tane değişmeli türetmesi (*derivation*) olan cisimler teorisi olsun. Cisimlerin karakteristiği p ise, teori TC_p^m olsun.

Teorem (P. 2007)**.** Her TC^m teorisinin TKC^m model arkadaşı vardır. Özel olarak her TC_0^m teorisinin TKC_0^m model arkadaşı vardır, ve bu teori tam ve sayılabilir istikrarlıdır.

Teorem (Kasal–P. 2013)**.**

1. $\mathrm{TKC}_0^m \subseteq \mathrm{TKC}_0^{m+1}$, dolayısıyla
$$\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathrm{TC}_0^m\right)^* = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathrm{TKC}_0^m, \tag{13}$$
ve bu teori tam ve istikrarlıdır. Sayılabilir istikrarlı değildir, hatta çok istikrarlı bile değildir.
2. $p > 0$ ve asal ise $\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathrm{TC}_p^m$ bileşiminin model arkadaşı yoktur.

Son olarak *türevlemeli cisimlere* bakalım. Burada *türevleme,* türev alma işlemidir, ama tamamen cebirsel bir işlemdir.

Her m için TC^m, m tane değişmeli türevlemesi olan cisimler teorisi olsun. Perdedeki 1. teoreme göre bu teorinin model arkadaşı vardır. Bu model arkadaşı, TKC^m ile gösterilir; modellerine *Türevlemeli olarak Kapalı Cisimler* denebilir.

TC_p^m teorilerinin bileşiminin model arkadaşı yoktur. Problem, pozitif karakteristiktedir.

Karakteristik sıfır ise, TKC_0^m teorisi, TKC_0^{m+1} teorisi tarafından içerilir, dolayısıyla, Medvedev'in Teoremine göre, TC_0^m teorilerinin bileşiminin model arkadaşı vardır.

Perdede istikrarlılık kavramını gördünüz. Bu kavram tanımlamayacağım. Ama sabit bir karakteristikte cebirsel kapalı cisimlerin teorisi tam ve *sayılabilir* istikrarlıdır, çünkü sayılabilir bir cisim üzerinde sadece sayılabilir sonsuzlukta varyeteler tanımlanabilir. TKC_0^m teorileri tam ve sayılabilir istikrarlıdır, dolayısıyla bileşimleri istikrarlıdır; ama sayılabilir istikrarlı değildir.