Sayılar Kuramı (MAT 316)

İkinci sınav

David Pierce

25 Mayıs 2024

Matematik Böl., MSGSÜ

Sınıfta ön sıra 1 ve sol sütun 1 olsun. Oturduğunuz yer için $(\text{sıra}, \text{sütun}) = (k, \ell)$ ise

$$1 \leqslant M \leqslant 4 \ \ \& \ \ M \equiv 2 \cdot (k-1) + \ell \pmod 4$$

olacak şekilde, okuyacağım her kağıdın üstüne adınızı, soyadınızı, ve M'nin değerini yazın. Ayrıca problemlerde

$$\begin{aligned} M = 1 &\implies (f, a, b, n) = (\varphi, 1565, 365, 2), \\ M = 2 &\implies (f, a, b, n) = (\mu, 1485, 473, 5), \\ M = 3 &\implies (f, a, b, n) = (\sigma, 1395, 544, 10), \\ M = 4 &\implies (f, a, b, n) = (\mathrm{id}, 1245, 697, 25) \end{aligned}$$

olsun.

Problem II'de tablonun j numaralı sütununda ve $i \cdot 10$ numaralı satırında olan girdisi, 101 modülüsüne göre 2^{10i+j} kuvveti ile kalandaştır.

Yazınızı okuyup anlayabilmem gerekiyor. Hesaplarınızı kontrol edin, ama tablonun doğru olduğunu varsayılabilirsiniz; onun değerlerini kontrol etmeye gerek yoktur. Sınavdan sonra bu kağıdı alabilirsiniz.

Problem I. $g(p) = \big(1 * (f \cdot \mu)\big)(p)$ olsun.

1. $*$ işlemini ve μ fonksiyonunu kullanmadan $g(p)$ değerini ifade edin.
2. Aşağıdaki kuralı kanıtlayın:

$$\big(1 * (f \cdot \mu)\big)(p^{s+1}) = g(p)$$

3. Yukarıdaki kuralı varsayarak aşağıdaki kuralı kanıtlayın:

$$\big(1 * (f \cdot \mu)\big)(n) = \prod_{p \mid n} g(p)$$

4. Aşağıdaki kuralı sağlayan h fonksiyonunu bulun:

$$h * (f \cdot \mu) = \varepsilon.$$

Problem II.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	8	16	32	64	27	54	7
10	14	28	56	11	22	44	88	75	49	98
20	95	89	77	53	5	10	20	40	80	59
30	17	34	68	35	70	39	78	55	9	18
40	36	72	43	86	71	41	82	63	25	50
50	100	99	97	93	85	69	37	74	47	94
60	87	73	45	90	79	57	13	26	52	3
70	6	12	24	48	96	91	81	61	21	42
80	84	67	33	66	31	62	23	46	92	83
90	65	29	58	15	30	60	19	38	76	51

1. $x^a \equiv b \pmod{101}$ kalandaşlığının tüm çözümlerini bulun.
2. $c^x \equiv 100 \pmod{101}$ kalandaşlığının, modülüs olarak 100'e göre tam n-tane çözümü olan bir c değerini bulun.

Problem I çözümleri

1. Genel olarak

$$g(p) = (f \cdot \mu)(1) + (f \cdot \mu)(p) = f(1) - f(p) = 1 - f(p).$$

Verilen durumlarda

f	$f(p)$	$g(p)$
φ	$p-1$	$2-p$
μ	-1	2
σ	$p+1$	$-p$
id	p	$1-p$

2. $s \in \omega$ olmak üzere $\mu(p^{s+2}) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}\big(1 * (f \cdot \mu)\big)(p^{s+1}) \\ &= (f \cdot \mu)(1) + (f \cdot \mu)(p) + (f \cdot \mu)(p^2) + \cdots + (f \cdot \mu)(p^{s+1}) \\ &= (f \cdot \mu)(1) + (f \cdot \mu)(p) \\ &= g(p).\end{aligned}$$

3. $n = 1$ veya $n = p^{s+1}$ ise eşitlik doğrudur. Ayrıca her taraf, çarpımsal bir fonksiyonun n'deki değeridir. Sonuç olarak bu değerler her zaman eşittir.
4. $0 = h(p^{s+1}) - h(p^s) \cdot f(p)$, dolayısıyla tümevarım ile $h(p^s) = f(p)^s$. Ayrıca h çarpımsaldır, ve sonuç olarak

$$n = \prod_{p|n} p^{n(p)} \implies h(n) = \prod_{p|n} \big(f(p)\big)^{n(p)}.$$

Eğer $f = \mu$ ise, o zaman

$$n = \prod_{p|n} p^{n(p)} \implies h(n) = 2^{\sum_{p|n} n(p)}.$$

Problem II çözümleri

$M = 1$:

1. $x \equiv 2^y \pmod{101}$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} x^{1565} \equiv 365 &\iff x^{65} \equiv 62 \pmod{101} \\ &\iff 2^{65y} \equiv 2^{85} \pmod{101} \\ &\iff 65y \equiv 85 \pmod{100} \\ &\iff 13y \equiv 17 \pmod{20} \\ &\iff y \equiv -3 \cdot 17 \equiv (-3)^2 \equiv 9 \pmod{20} \\ &\iff y \equiv 9, 29, 49, 69, 89 \pmod{100} \\ &\iff x \equiv 7, 59, 50, 3, 83 \pmod{101}. \end{aligned}$$

2. $c \equiv 2^k \pmod{101}$ olsun. O zaman

$$c^x \equiv 100 \iff 2^{kx} \equiv 2^{50} \pmod{101} \iff kx \equiv 50 \pmod{100}.$$

O zaman ebob$(k, 100) = 2$ isteriz. Örneğin $c = 2^2 = 4$ olabilir. Bu durumda kalandaşlığının çözümleri 25 ve 75.

$M = 2$:

1. $x \equiv 2^y \pmod{101}$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} x^{1485} \equiv 473 &\iff x^{85} \equiv 69 \pmod{101} \\ &\iff 2^{85y} \equiv 2^{55} \pmod{101} \\ &\iff 85y \equiv 55 \pmod{100} \\ &\iff 17y \equiv 11 \pmod{20} \\ &\iff y \equiv -7 \cdot 11 \equiv 3 \pmod{20} \\ &\iff y \equiv 3, 23, 43, 63, 83 \pmod{100} \\ &\iff x \equiv 8, 53, 86, 90, 66 \pmod{101}. \end{aligned}$$

2. $c \equiv 2^k \pmod{101}$ olsun. O zaman

$$c^x \equiv 100 \iff 2^{kx} \equiv 2^{50} \pmod{101} \iff kx \equiv 50 \pmod{100}.$$

O zaman ebob$(k, 100) = 5$ isteriz. Örneğin $c = 2^5 = 32$ olabilir. Bu durumda kalandaşlığının çözümleri 10, 30, 50, 70, ve 90.

$M = 3$:

1. $x \equiv 2^y \pmod{101}$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} x^{1395} \equiv 544 &\iff x^{95} \equiv 39 \pmod{101} \\ &\iff 2^{95y} \equiv 2^{35} \pmod{101} \\ &\iff 95y \equiv 35 \pmod{100} \\ &\iff 19y \equiv 7 \pmod{20} \\ &\iff y \equiv 13 \pmod{20} \\ &\iff y \equiv 13, 33, 53, 73, 93 \pmod{100} \\ &\iff x \equiv 11, 35, 93, 48, 15 \pmod{101}. \end{aligned}$$

2. $c \equiv 2^k \pmod{101}$ olsun. O zaman

$$c^x \equiv 100 \iff 2^{kx} \equiv 2^{50} \pmod{101} \iff kx \equiv 50 \pmod{100}.$$

O zaman $\mathrm{ebob}(k, 100) = 10$ isteriz. Örneğin $c = 2^{10} \equiv 14$ olabilir. Bu durumda kalandaşlığının çözümleri $5, 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85$, ve 95.

$M = 4$:

1. $x \equiv 2^y \pmod{101}$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} x^{1245} \equiv 697 \pmod{101} &\iff x^{45} \equiv 91 \pmod{101} \\ &\iff 2^{45y} \equiv 2^{75} \pmod{101} \\ &\iff 45y \equiv 75 \pmod{100} \\ &\iff 9y \equiv 15 \pmod{20} \\ &\iff y \equiv 9 \cdot 15 \equiv 15 \pmod{20} \\ &\iff y \equiv 15, 35, 55, 75, 95 \pmod{100} \\ &\iff x \equiv 44, 39, 69, 91, 60 \pmod{101}. \end{aligned}$$

2. $c \equiv 2^k \pmod{101}$ olsun. O zaman

$$c^x \equiv 100 \iff 2^{kx} \equiv 2^{50} \pmod{101} \iff kx \equiv 50 \pmod{100}.$$

O zaman $\mathrm{ebob}(k, 100) = 25$ isteriz. Örneğin $c = 2^{25} \equiv 10$ olabilir. Bu durumda kalandaşlığının çözümleri $2, 6, 10, \ldots, 94, 98$.