Modeller Kuramı (MAT 414) Final Sınavı *Çözümleri*

David Pierce

27 Mayıs 2015

Problem 1. $\{<\}$ imzasında $T_<$, doğrusal sıralamalar teorisi olsun, ve T, aksiyomları $T_<$ teorisinin aksiyomları ile

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ \bigl(x < y \land (z \leqslant x \lor y \leqslant z)\bigr),$$
$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ \bigl(y < x \land (z \leqslant y \lor x \leqslant z)\bigr)$$

olan teori olsun.

(a) T teorisinin bir modelini verin.

(b) $\{<\}$ imzasında, T teorisine göre niceleyicisiz formüle denk *olmayan* bir $\varphi(x, y)$ formülünü verin.

Çözüm. (a) $(\mathbb{Z}, <)$.

(b) $\exists z\ (x < z \land z < y)$.

Problem 2. Bir $\mathscr{I}$ imsazında $\mathfrak{A}$ ve $\mathfrak{B}$, yapı olsun, ve $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ (yani $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$'nin altyapısı) olsun.

(a) Tanıma göre, ne zaman $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ (yani $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$'nin temel altyapısı)?

(b) $\mathfrak{C}$ de, imzası $\mathscr{I}$ olan bir yapı olsun. Eğer $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{C}$ ve $\mathfrak{B} \preccurlyeq \mathfrak{C}$ ise

$$\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$$

gösterin.

(c) $X \subseteq B$ olsun. ω'nın her n elemanı için, imzası $\mathscr{I}$ olan her $\varphi(x_0, \dots, x_{n-1}, y)$ formülü için, X^n kuvvetinin her $\vec{a}$ elemanı için

$$\mathfrak{B} \models \exists y\ \varphi(\vec{a}, y)$$

durumunda

$$b_{\varphi(\vec{a},y)} \in B, \qquad\qquad \mathfrak{B} \models \varphi(\vec{a}, b_{\varphi(\vec{a},y)})$$

olsun. Bu şekilde bir $\big(\varphi(\vec{x}, y), \vec{a}\big) \mapsto b_{\varphi(\vec{a},y)}$ göndermesi tanımlanmıştır. Bu göndermenin değer kümesi Y olsun. $X \subseteq Y$ gösterin.

Çözüm. (a) ω'nın her n elemanı için, imzası $\mathscr{I}$ olan her $\varphi(x_0, \dots, x_{n-1})$ formülü için, A^n kuvvetinin her $\vec{a}$ elemanı için

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\vec{a}) \iff \mathfrak{B} \models \varphi(\vec{a}).$$

(b) Bir n için $\varphi(\vec{x})$, imzası $\mathscr{I}$ olan n-konumlu formül olsun ve $\vec{a} \in A^n$ olsun. O zaman varsayımdan

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\vec{a}) \iff \mathfrak{C} \models \varphi(\vec{a}).$$

Ayrıca $\vec{a} \in B^n$ olduğundan $\mathfrak{B} \models \varphi(\vec{a}) \iff \mathfrak{C} \models \varphi(\vec{a})$. Bu durumda

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\vec{a}) \iff \mathfrak{B} \models \varphi(\vec{a}).$$

(c) $a \in X$ ise a, $b_{a=y}$ olur.

Problem 3. Bir $\mathscr{I}$ imzasında T, niceleyicilerin giderilmesine imkân veren bir teori olsun. Eğer $\mathfrak{A} \models T$, $\mathfrak{B} \models T$, ve $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ ise

$$\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$$

gösterin.

Çözüm. $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ olduğundan her n için imzası $\mathscr{I}$ olan her niceleyicisiz n-konumlu $\varphi(\vec{x})$ formülü için, A^n kuvvetinin her $\vec{a}$ elemanı için

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\vec{a}) \iff \mathfrak{B} \models \varphi(\vec{a}).$$

T, niceleyicilerin giderilmesine imkân verdiğinden imzası $\mathscr{I}$ olan her $\psi(\vec{x})$ formülü için bir $\varphi(\vec{x})$ niceleyicisiz formülü için

$$T \vdash \forall \vec{x}\ (\psi(\vec{x}) \leftrightarrow \varphi(\vec{x})),$$

ve bu durumda, $\mathfrak{A} \models T$ ve $\mathfrak{B} \models T$ olduğundan

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models \psi(\vec{a}) &\iff \mathfrak{A} \models \varphi(\vec{a}) \\ &\iff \mathfrak{B} \models \varphi(\vec{a}) \\ &\iff \mathfrak{B} \models \psi(\vec{a}). \end{aligned}$$

Problem 4. Bu problemde

$$\exists x_0 \ \ldots\ \exists x_{n-1} \bigwedge_{i<j<n} x_i \neq x_j$$

cümleleri yararlı olabilir. Her n doğal sayısı için cümlenin kısaltması olarak σ_n kullanılabilir.

(a) Her modeli sonsuz olan bir teori var mıdır?

(b) Her modeli sonlu olan bir teori var mıdır?

(c) Her modeli sonlu olan ama istediğimiz kadar büyük olabilen bir teori var mıdır?

Çözüm. (a) Evet, aksiyomları σ_n olan teoridir.

(b) Evet, aksiyomu $\neg\sigma_2$ olan teoridir.

(c) Hayır, çünkü T bu şekildeyse $T \cup \{\sigma_n : n \in \mathbb{N}\}$ küemesinin her sonlu altkümesinin modeli vardır, dolayısıyla Tıkızlık Teoremine göre kümenin tümünün modeli vardır.