Doğrusal Cebir

Lineer Cebire Giriş dersi özeti

David Pierce

13 Ocak 2020

Matematik Bölümü, MSGSÜ
dpierce@msgsu.edu.tr
mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/
polytropy.com

MAT 114 dersinin resmi içeriği,

> Matrisler, satır işlemleri, satır-denklik. Homojen ve homojen olmayan lineer denklem sistemleri. Vektör uzayları, alt uzaylar, toplam ve direkt toplam. Lineer bağımlılık, baz [taban], boyut kavramları. Verilen lineer bağımsız kümeyi bir baza tamamlama, bölüm uzayları, baz değiştirme, geçiş matrisleri. Lineer dönüşümler, lineer dönüşümlerin matris gösterimleri.

İçindekiler

1 Somut

1.1 Doğrusal denklem sistemleri

Doğrusal (veya lineer) cebirde temel etkinliğimiz,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

biçimli doğrusal denklem sistemlerini çözmektir. Örnek 2'ye bakın. Genel örnek (1)'de a_{ij} katsayıları bir *cisimden* geliyor. Cisimlerin genel tanımı sayfa 37'dedır; şimdilik aşağıdaki örnekleri bilmek yeter.

Örnek 1. Oluşturur

- gerçel sayılar, $\mathbb{R}$ cismini;
- kesirli sayılar, $\mathbb{Q}$ cismini;
- karmaşık sayılar, $\mathbb{C}$ cismini;
- asal bir p modülüne göre tamsayılar, $\mathbb{Z}_p$ (veya $\mathbb{F}_p$) cismini.

Her cismin 0 olmayan x elemanının $1/x$ (veya x^{-1}) tersi vardır. $\mathbb{Z}_p$ cisminde $p = 0$, dolayısıyla $1/p$ tanımlanmaz.

Katsayıları bir F cisminden gelen doğrusal bir sistem, F **üzerindedir.** F'nin elemanlarına **skalerler** denir. Bu notlarda başka bir şey söylenmezse, F'nin $\mathbb{R}$ olduğu varsayılabilir.

Sistem (1)'in çözümlerinin her biri, bir

$$(x_1, \dots, x_n) \qquad \text{veya} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

n**-bileşenlisidir.** Bunun daha genel bir adı, **vektördür.** Bileşenleri bir F cisminden gelen n-bileşlenliler,

$$F^n$$

kümesini oluşturur. Bu kümenin elemanları, aşağıdaki kurallar (2)'ye göre toplanabilir ve skalerlerle çarpılabilir:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}, \qquad t \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \cdot x_1 \\ \vdots \\ t \cdot x_n \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Örnek 2.

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 \qquad - 5x_4 \qquad = \ \ 3 \\ \qquad\qquad x_3 + 4x_4 \qquad = -1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_5 = \ \ 2 \end{cases}$$

sisteminin çözümü,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 6x_2 + 5x_4 \\ x_2 \\ -1 \qquad - 4x_4 \\ x_4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sistem (1)'e karşılık gelen

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{3}$$

homojen sistemi vardır.

Örnek 3. Örnek 2'de verilmiş sistemin karşılık gelen homojen sistemi

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x_1 + 6x_2 & - 5x_4 & & = 0 \\ & x_3 + 4x_4 & & = 0 \\ & & x_5 & = 0 \end{array}\right.$$

olur, ve bu sistemin çözümü

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sistem (1)'de, çözümlerini değiştirmeden

i) bir denklemin bir katı başka bir denkleme eklenebilir;
ii) iki denklemin yerleri değiştirilebilir;
iii) bir denklem, *sıfır olmayan* bir skalerle çarpılabilir.

Bu işlemlerle herhangi doğrusal sistem çözülebilir.

Örnek 4. Tablo 1'deki sistemlerin çözüm kümeleri, birbiriyle aynıdır. Oradaki son sistemin çözümünu Örnek 2'de bulduk. Hesaplamarımızda $2 \neq 0$ varsaydık. Eğer skaler olarak $2 = 0$ ise (örneğin verilen sistem $\mathbb{Z}_2$ üzerinde ise), o zaman sistem (5),

$$\left\{\begin{array}{llll} x_1 & x_3 + x_4 & x_5 & = 0 \\ & x_3 & + x_5 & = 1 \end{array}\right.$$

olur, ve bundan

$$\left\{\begin{array}{llll} x_1 & + x_4 & & = 1 \\ & x_3 & + x_5 & = 1 \end{array}\right.$$

Tablo 1: Denk sistemler

$$\left\{\begin{array}{rrrrrcr} & & -2x_3 & -\ 8x_4 & & = & 2 \\ -x_1 & -\ 6x_2 & & +\ 5x_4 & +2x_5 & = & 1 \\ -2x_1 & -12x_2 & & +10x_4 & +2x_5 & = & -2 \\ x_1 & +\ 6x_2 & +\ x_3 & -\ x_4 & -\ x_5 & = & 0 \end{array}\right\} \tag{4}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrrcr} x_1 & +\ 6x_2 & +\ x_3 & -\ x_4 & -\ x_5 & = & 0 \\ -x_1 & -\ 6x_2 & & +\ 5x_4 & +2x_5 & = & 1 \\ -2x_1 & -12x_2 & & +10x_4 & +2x_5 & = & -2 \\ & & -2x_3 & -\ 8x_4 & & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} x_1+6x_2+ & x_3 & -\ x_4 & -x_5 & = & 0 \\ & x_3 & +4x_4 & +x_5 & = & 1 \\ & 2x_3 & +8x_4 & & = & -2 \\ & -2x_3 & -8x_4 & & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x_1+6x_2+x_3- & x_4 & -\ x_5 & = & 0 \\ x_3+ & 4x_4 & +\ x_5 & = & 1 \\ & & -2x_5 & = & -4 \\ & & 2x_5 & = & 4 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x_1+6x_2+x_3- & x_4 & -\ x_5 & = & 0 \\ x_3+ & 4x_4 & +\ x_5 & = & 1 \\ & & -2x_5 & = & -4 \end{array}\right\} \tag{5}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x_1+6x_2+x_3- & x_4 & -x_5 & = & 0 \\ x_3+ & 4x_4 & +x_5 & = & 1 \\ & & x_5 & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x_1+6x_2+x_3- & x_4 & & = & 2 \\ x_3+ & 4x_4 & & = & -1 \\ & & x_5 & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x_1+6x_2 & -\ 5x_4 & & = & 3 \\ x_3 & +\ 4x_4 & & = & -1 \\ & & x_5 & = & 2 \end{array}\right.$$

sistemini elde ederiz, ve bunun çözümü

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Lineer bir sistem çözmek için, sistemin değişkenlerini her adımda yazmak zorunda değiliz. Sistem (1)'in **genişletilmiş katsayılar matrisi,**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \quad \text{veya} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

olur. Bir sistemin genişletilmiş katsayılar matrisinde, sistemin çözümlerini değiştirmeden, aşağıdaki **elemanter satır işlemlerini** kullanılabilir:

i) bir satırın bir katı başka bir satıra eklenebilir;
ii) iki satırın yerleri değiştirilebilir;
iii) bir satır, *sıfır olmayan* bir skalerle çarpılabilir.

Bir matrisin

i) i'ninci satırının t katının j'ninci satıra eklenmesi

$$tR_i + R_j,$$

ii) i'ninci ve j'ninci satırlarının yerlerinin değiştirilmesi

$$R_i \leftrightarrow R_j,$$

iii) i'ninci satırının t ile çarpılması

$$tR_i$$

Tablo 2: Matrisin indirgemesi

$$
\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -8 & 0 & 2 \\ -1 & -6 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ -2 & -12 & 0 & 10 & 2 & -2 \\ 1 & 6 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_4}
\begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -6 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ -2 & -12 & 0 & 10 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -8 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[2R_1+R_3]{R_1+R_2}
\begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -8 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[2R_2+R_4]{-2R_2+R_3}
\begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3+R_4}
\begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}R_3}
\begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3+R_1]{-R_3+R_2}
\begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R_2+R_1}
\begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6}
$$

ile gösterilebilir. (Satırın İngilizcesi *Row*'dur.)

Örnek 5. Örnek 4'te kullandığımız işlemler Tablo 2'de gibi gösterilebilir.

Sistem (1)'in genişletilmiş katsayılar matrisi

$$\left[\,A \mid \boldsymbol{b}\,\right]$$

biçiminde yazılabilir. Burada

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \tag{7}$$

ve A, sistemin **katsayılar matrisidir.** El yazısıyla $\boldsymbol{b}$, $\vec{b}$ olarak yazılabilir. A matrisi $m \times n$**'liktir** ve

$$[a_{ij}]_{1 \leqslant j \leqslant n}^{1 \leqslant i \leqslant m} \qquad \text{veya kısaca} \qquad [a_{ij}]_j^i$$

olarak yazılabilir; burada a_{ij}, A'nın (i, j) **girdisidir.** Bir i için, eğer $\{j \colon a_{ij} \neq 0\}$ kümesi boş değilse, bunun en küçük elemanı j_i olsun; diğer durumda j_i tanımlanmaz. O zaman A matrisinin (i, j_i) girdisi, A'nın i'ninci satırının **baş elemanıdır.** Eğer bir ℓ için

$$j_1 < \cdots < j_\ell,$$

ama ℓ'nin m'den kesin küçük olduğu durumda $j_{\ell+1}, \ldots, j_m$ tanımlanmazsa, o zaman A, **basamaklı** bir matristir. Eğer üstelik

$$\left.\begin{array}{rr} k \neq i \text{ durumlarında} & 0 \\ k = i \text{ durumunda} & 1 \end{array}\right\} = a_{kj_i}$$

ise, o zaman A, **satırca indirgenmiş basamaklı** bir matristir.

Örnek 6. Örnek 4'te matris (6) ve sonraları basamaklıdır, ama önceleri basamaklı değildir. Sadece son matris satırca indirgenmiş basamaklıdır.

Herhangi doğrusal bir sistem çözmek için:

1. Genişletilmiş katsayılar matrisini yazın.
2. Elemanter satır işlemleri ile, soldan sağa çalışarak, matrisi basamaklı bir matrise indirgeyin.
3. a) Bu matrisin bir satırının baş elemanı, matrisin son sütunda ise, sistemin çözümü yoktur.
   b) Aksi durumda, elemanter satır işlemlerle, sağdan sola çalışarak, matrisi satırca indirgenmiş basamaklı bir matrise indirgeyin. Sistemin çözümü, Örnek 2'deki gibi elde edilebilir.

Burada

- adım 2, **Gauss yok etme** yöntemidir;
- adım 3, **Gauss–Jordan indirgeme** yöntemidir.

Alıştırma 1. Basamaklı bir matris yazın. Bu matristen, bazı elemanter satır işlemlerle, başka bir matris elde edin. Genişletilmiş katsayılar matrisi bu matris olan doğrusal denklem sistemini yazın. Nasıl elde ettiğinizi unutarak sistemi çözün veya arkadaşlarına çözdürün. Aynı yöntemle hocanız sizin için problemler elde edebilir.

Tekrar A ve $\boldsymbol{b}$, eşitlikler (7) ile tanımlanmış matrisleri olsun, ve A'nın j'ninci sütunu $\boldsymbol{a}_j$ olsun. O zaman

$$A = \left[\ \boldsymbol{a}_1 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \boldsymbol{a}_n\ \right], \tag{8}$$

ve sistem (1)

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}$$

biçiminde yazılabilir. Bu denklemin sol üyesi bir **matris çarpımıdır:** eğer

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}$$

ise, o zaman tanıma göre

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = A\boldsymbol{x}. \tag{9}$$

Bu durumda sistem (1) ve karşılık gelen homojen sistem (3), sırasıyla

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \qquad\qquad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

biçiminde yazılabilir.

Elemanter satır işlemleri, terslenebilir. Eğer bir matristen, elemanter satır işlemleriyle başka bir matris elde edilirse, bu iki matris, birbirine **satırca denktir.** Satır denkliği, bir denklik bağıntısıdır. Eğer $\left[\begin{array}{c|c} A & \boldsymbol{b} \end{array}\right]$ ve $\left[\begin{array}{c|c} C & \boldsymbol{d} \end{array}\right]$ birbiriyle satırca denk ise, o zaman $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ve $C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ sistemlerinin çözümleri aynıdır.

Basamaklı biçime indirgendikten sonra, eğer A'nın j'ninci sütununda bir satırın baş elemanı *cıkmazsa,* o zaman x_j, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ homojen sisteminin **bağımsız bir değişkenidir.**

Örnek 7. İndirgenmiş sistem (5)'e bakarak çözümleri aynı olan sistem (4)'e karşılık gelen

$$\left\{\begin{array}{rrrrrl} & & -2x_3 & -\ 8x_4 & & = 0 \\ -x_1 & -\ 6x_2 & & +\ 5x_4 & +\ 2x_5 & = 0 \\ -2x_1 & -\ 12x_2 & & +\ 10x_4 & +\ 2x_5 & = 0 \\ x_1 & +\ 6x_2 & +\ x_3 & -\ x_4 & -\ x_5 & = 0 \end{array}\right. \tag{10}$$

homojen sisteminin bağımsız değişkenlerinin x_2 ve x_4 olduğunu anlayabiliriz. Örnek 3'teki gibi sistem (10)'un

$$(6, 1, 0, 0, 0), \qquad\qquad (5, 0, -4, 1, 0)$$

çözümleri vardır, ve bunlar

$$(*, 1, *, 0, *), \qquad\qquad (*, 0, *, 1, *)$$

biçimindedir.

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ homojen sisteminin bağımsız değişkenleri, sırasıyla x_{i_1}, …, $x_{i_{n-\ell}}$ olsun. Her i için, $1 \leqslant i \leqslant n - \ell$ ise, homojen sistemin,

$$\left.\begin{array}{ll} j \neq i \text{ durumunda} & 0 \\ j = i \text{ durumunda} & 1 \end{array}\right\} = c_{i_j i}$$

koşulunu sağlayan bir $(c_{1i}, \dots, c_{ni})$ veya $\boldsymbol{c}_i$ çözümü vardır. O halde $\boldsymbol{c}_1$, …, $\boldsymbol{c}_{n-\ell}$, homojen sistemin **temel çözümleridir.** Sistem (10)'un temel çözümleri, Örnek 7'de veriliyor.

Matris çarpması

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) &= A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y}, \\ A(t\boldsymbol{x}) &= t(A\boldsymbol{x}) \end{aligned} \tag{11}$$

kurallarını sağlar. Ayrıca $A\boldsymbol{d} = \boldsymbol{b}$ ise, o zaman

$$A(\boldsymbol{d} + \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \iff A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$$

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ homojen sisteminin temel çözümleri tekrar $\boldsymbol{c}_1$, …, $\boldsymbol{c}_{n-\ell}$ ise, o zaman homojen sistemin her çözümü, bazı t_i skalerleri için

$$t_1\boldsymbol{c}_1 + \dots + t_{n-\ell}\boldsymbol{c}_{n-\ell}$$

biçiminde yazılabilir. Bu vektör, $\boldsymbol{c}_i$ vektörlerinin **doğrusal bir bileşimidir,** ve $\boldsymbol{c}_i$ vektörlerinin doğrusal bileşimlerinden her biri, homojen sistemin bir çözümüdür: bunu Örnek 3'te gördük. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ sisteminin çözümleri, bazı t_i skalerleri için

$$\boldsymbol{d} + t_1\boldsymbol{c}_1 + \cdots + t_{n-\ell}\boldsymbol{c}_{n-\ell}$$

biçiminde yazılabilen vektörleridir: bunu Örnek 2'de gördük.

Bazı A ve $\boldsymbol{b}$ için $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ sistemi çözülemeyebilir, ama $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ homojen sisteminin her zaman **aşikâr** $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ çözümü vardır. Eğer $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ sisteminin çözümü varsa, o zaman bu sistemin çözüm kümesi ve karşılık gelen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ homojen sisteminin çözüm kümesi, aynı sayıdadır.

Örnek 8. $\mathbb{Z}_3$ cismi $\{-1, 0, 1\}$ olarak düşünülebilir. Bu cisim üzerinde

$$\left\{\begin{array}{rl} -x + y + z &= -1 \\ x + y &= 0 \end{array}\right. \tag{12}$$

sisteminin genişletilmiş katsayılar matrisi

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olur, ve bundan

$$\xrightarrow{R_1+R_2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2+R_1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-R_2]{-R_1}$$

elemanter satır işlemleriyle

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

satırca indirgenmiş basamaklı matrisini elde ederiz, dolayısıyla sistem (12)'nin çözümleri,

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

biçimli vektörlerdir, ve karşılık gelen

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & & & = & 0 \end{array}\right. \tag{13}$$

homojen sisteminin çözümleri

$$z\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$$

biçimli vektörlerdir. Bulduğumuz çözümleri kontrol etmek için, iki hesaplama yeter:

- $(-1, 1, 0)$ vektörü, sistem (12)'nin bir çözümüdür;
- $(-1, 1, 1)$ vektörü, homojen sistem (13)'ün bir çözümüdür.

Şimdi $z \in \{-1, 0, 1\}$ olduğundan sistem (12)'nin çözümleri

$$\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

olur, ve karşılık gelen homojen sistem (13)'ün çözümleri

$$\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Bir bilgisayar, yaptığımız hesaplamaları yapabilir, ama bilgisayar, hesaplamalarının doğru olup olmadığını bilmiyor. Adına rağmen bir bilgisayar bilgili değildir. Bilgisayar hiç bir şey bilmiyor. Biz, örnekteki gibi kontrol ederek hesaplamalarımızın doğru olduğunu bilebiliriz. Hesaplamaların anlamını biliriz. Bir matematik dersinin amacı, bilgisayar olmanız değil, bilen bir insan olmanızdır.

Alıştırma 2. $\mathbb{Z}_3$ üzerinde her

$$\begin{cases} -x + y + z = a \\ \ \ x + y \qquad = b \end{cases}$$

sistemi çözülebilir mi?

Sonsuz bir cisim üzerinde doğrusal bir sistemin çözüm sayısı ya sıfır, ya da bir, ya da sonsuzdur.

Alıştırma 3. $\mathbb{R}$ üzerinde bir

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -2x + ay + 2z = b \\ y + (a-1)z = 0 \end{cases}$$

sistemi verilirse, a'nın ve b'nin hangi değerleri için sisteminin

(a) tek bir çözümü vardır?

(b) birden fazla çözümü vardır?

(c) hiç çözümü yoktur?

Çözüm. Sistemin genişletilmiş katsayılar matrisini indirgiyoruz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & a & 2 & b \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{2R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & a+4 & 0 & b+2 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & a+4 & 0 & b+2 \end{bmatrix}.$$

Sonuç olarak

- $a = -4$ ve $b \neq -2$ ise çözüm yoktur.
- $a = -4$ ve $b = -2$ ise birden fazla çözüm vardır.

- $a \neq -4$ ise indirgemeyi devam ettirebiliriz:

$$\xrightarrow{-(a+4)R_2+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & -(a-1)(a+4) & b+2 \end{bmatrix}$$

dolayısıyla
  - $*$ $a = 1$ ve $b \neq -2$ ise çözüm yoktur.
  - $*$ $a = 1$ ve $b = -2$ ise birden fazla çözüm vardır.
  - $*$ $a \neq 1$ ise tek bir çözüm vardır.

Kısaca
(a) $a \notin \{-4, 1\}$ ise tek bir çözümü vardır;
(b) $a \in \{-4, 1\}$ ve $b = -2$ ise birden fazla çözümü vardır;
(c) $a \in \{-4, 1\}$ ve $b \neq -2$ ise hiç çözümü yoktur.

1.2 Matrisler

Sayfa 9'da dediğimiz gibi m-satırli, n-sütunlu bir matris, $m \times n$*'liktir.* Her F cismi için

$$F^{m \times n},$$

F üzerinde $m \times n$'lik matrisler kümesi olsun. Özel bir durumda, sayfa 4'te verdiğimiz tanıma göre

$$F^{m \times 1} = F^m.$$

Böylece m-bileşenlerlileri, **sütun matrisi** olarak düşünüyoruz. Şimdi $A \in F^{m \times n}$ ve $B \in F^{n \times r}$ olsun. O zaman bazı $\boldsymbol{b}_k$ sütun matrisleri için

$$B = \left[\ \boldsymbol{b}_1 \ \middle|\ \cdots \ \middle|\ \boldsymbol{b}_r\ \right] \tag{14}$$

olur, ve bu durumda tanım (9)'u kullanarak

$$AB = \left[\ A\boldsymbol{b}_1 \ \middle|\ \cdots \ \middle|\ A\boldsymbol{b}_r\ \right] \tag{15}$$

tanımlarız. Bu şekilde

$$(X, Y) \mapsto XY : F^{m\times n} \times F^{n\times r} \to F^{m\times r}.$$

Teorem 1. *Eğer*

$$A = [a_{ij}]_{1\leqslant j\leqslant n}^{1\leqslant i\leqslant m}, \qquad B = [b_{jk}]_{1\leqslant k\leqslant r}^{1\leqslant j\leqslant n}$$

ise, o zaman

$$AB = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right]_{1\leqslant k\leqslant r}^{1\leqslant i\leqslant m}.$$

Kanıt. Tanımlar (8), (9), (14), ve (15)'ten

$$A\boldsymbol{b}_k = \sum_{j=1}^{n} b_{jk}\boldsymbol{a}_j,$$

$$AB = \left[\ \sum_{j=1}^{n} b_{j1}\boldsymbol{a}_j \ \middle|\ \cdots \ \middle|\ \sum_{j=1}^{n} b_{jr}\boldsymbol{a}_j\ \right],$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{jk}\boldsymbol{a}_j = \sum_{j=1}^{n} \begin{bmatrix} a_{1j}b_{jk} \\ \vdots \\ a_{mj}b_{jk} \end{bmatrix}$$

ve buradan istediğimiz sonuç çıkar. □

Teorem 2. *Matrisler çarpması birleşmelidir: A, $m\times n$'lik; B, $n\times r$'lik; ve C, $r\times s$'lik ise*

$$A(BC) = (AB)C.$$

Kanıt. Tanımlardan

$$(AB)C = \left[\ (AB)\boldsymbol{c}_1 \ \middle|\ \cdots \ \middle|\ (AB)\boldsymbol{c}_s\ \right],$$

ve (11)'den

$$\begin{aligned}(AB)\boldsymbol{c}_\ell = \left[\begin{array}{c|c|c} A\boldsymbol{b}_1 & \cdots & A\boldsymbol{b}_r \end{array}\right]\boldsymbol{c}_\ell &= c_{1\ell}(A\boldsymbol{b}_1) + \cdots + c_{r\ell}(A\boldsymbol{b}_r)\\ &= A(c_{1\ell}\boldsymbol{b}_1) + \cdots + A(c_{r\ell}\boldsymbol{b}_r)\\ &= A(c_{1\ell}\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_{r\ell}\boldsymbol{b}_r) = A(B\boldsymbol{c}_\ell),\end{aligned}$$

dolayısyla

$$\begin{aligned}(AB)C &= \left[\begin{array}{c|c|c} A(B\boldsymbol{c}_1) & \cdots & A(B\boldsymbol{c}_s) \end{array}\right]\\ &= A\left[\begin{array}{c|c|c} B\boldsymbol{c}_1 & \cdots & B\boldsymbol{c}_s \end{array}\right] = A(BC).\end{aligned}$$ □

Eğer $A = [a_{ij}]^{1\leqslant i\leqslant m}_{1\leqslant j\leqslant n}$ ise, o zaman tanıma göre

$$A^{\mathrm{t}} = [a_{ij}]^{1\leqslant j\leqslant n}_{1\leqslant i\leqslant m}.$$

Bu $n \times m$'lik matris, A'nın **devriği** veya **tranzpozesidir.** Kısaca

$$\left([a_{ij}]^i_j\right)^{\mathrm{t}} = [a_{ij}]^j_i.$$

O zaman

$$(A^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} = A.$$

Özel bir durumda

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}^{\mathrm{t}} = \begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{bmatrix},$$

yani bir sütun matrisinin transpozesi, bir **satır matrisidir.** Daha genelde

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_r \end{array}\right]^{\mathrm{t}} = \left[\begin{array}{c} {\boldsymbol{b}_1}^{\mathrm{t}} \\ \hline \vdots \\ \hline {\boldsymbol{b}_r}^{\mathrm{t}} \end{array}\right].$$

Teorem 3. *A'nın sütunları ve B'nin satırları aynı sayıda ise*

$$(AB)^{\mathrm{t}} = B^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}.$$

Kanıt. Teorem 1'den

$$\begin{aligned}
\left([a_{ij}]^i_j [b_{jk}]^j_k\right)^{\mathrm{t}} &= \left(\left[\sum_j a_{ij}b_{jk}\right]^i_k\right)^{\mathrm{t}} \\
&= \left[\sum_j a_{ij}b_{jk}\right]^k_i \\
&= \left[\sum_j b_{jk}a_{ij}\right]^k_i = [b_{jk}]^k_j [a_{ij}]^j_i.
\end{aligned}$$ □

Sonuç olarak tanım (15)'ten $C = A^{\mathrm{t}}$ ise

$$\begin{bmatrix} {\boldsymbol{b}_1}^{\mathrm{t}} \\ \hline \vdots \\ \hline {\boldsymbol{b}_r}^{\mathrm{t}} \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} {\boldsymbol{b}_1}^{\mathrm{t}}C \\ \hline \vdots \\ \hline {\boldsymbol{b}_r}^{\mathrm{t}}C \end{bmatrix}.$$

Şimdi her k için $k \times k$'lik olan

$$I_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olsun. Eğer k sayısı anlaşılabilirse I_k matrisi I olarak yazılabilir. I matrislerine **birim matrisi** denir çünkü her $m \times n$'lik A matrisi için

$$I_m A = A, \qquad A I_n = A.$$

Teorem 4. *Eğer Φ, elemanter bir satır işlemi ise*

$$\Phi(A) = \Phi(I)A.$$

Teoremdeki $\Phi(I)$ matrisi, **elemanter bir matristir.** Teorem için, genel bir kanıt yazılabilir, ama kanıtın fikri, sonraki örnekten anlaşılabilir.

Örnek 9.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ ta+c & tb+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} ta & tb \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Örnek 10. Örnek 6'ya bakın. Eğer

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -8 & 0 & 2 \\ -1 & -6 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ -2 & -12 & 0 & 10 & 2 & -2 \\ 1 & 6 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ise, o zaman

$$E_7E_6E_5E_4E_3E_2E_1A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Teorem 5. *$\left[\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right]$ ve $\left[\begin{array}{c|c} C & P \end{array}\right]$ satırca denk ise, o zaman*

$$PA = C.$$

Kanıt. Varsayıma göre bazı E_i elemanter matrisleri için

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c|c} C & P \end{array}\right] &= E_\ell \cdots E_1 \left[\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} E_\ell \cdots E_1 A & E_\ell \cdots E_1 I_n \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} E_\ell \cdots E_1 A & E_\ell \cdots E_1 \end{array}\right], \end{aligned}$$

dolayısıyla

$$P = E_\ell \cdots E_1, \qquad C = E_\ell \cdots E_1 A = PA. \qquad \square$$

Örnek 11. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ ve $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ ise

$$\left[\begin{array}{c|c|c} A & \boldsymbol{b} & I \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[2R_1+R_3]{-4R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -13 & 11 & -26 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -8 & 14 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{13}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -11/13 & 2 & 4/13 & -1/13 & 0 \\ 0 & 7 & -8 & 14 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-7R_2+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -11/13 & 2 & 4/13 & -1/13 & 0 \\ 0 & 0 & -27/13 & 0 & -2/13 & 7/13 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{13}{27}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -11/13 & 2 & 4/13 & -1/13 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2/27 & -7/27 & -13/27 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[3R_3+R_1]{\frac{11}{13}R_3+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 6 & 33/27 & -21/27 & -39/27 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 10/27 & -8/27 & -11/27 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2/27 & -7/27 & -13/27 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-3R_2+R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3/27 & 3/27 & -6/27 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 10/27 & -8/27 & -11/27 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2/27 & -7/27 & -13/27 \end{bmatrix}$$

dolayısıyla $\boldsymbol{d} = (0, 2, 0)$ olmak üzere

$$\frac{1}{27}\begin{bmatrix} 3 & 3 & -6 \\ 10 & -8 & -11 \\ 2 & -7 & -13 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{c|c} A & \boldsymbol{b} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_3 & \boldsymbol{d} \end{array}\right].$$

Kontrol ederiz:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & -6 \\ 10 & -8 & -11 \\ 2 & -7 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 6 \\ 4 & -1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3+12+12 & 9-3-6 & -9-3+12 & 18-6-12 \\ 10-32+22 & 30+8-11 & -30+8+22 & 60+16-22 \\ 2-28+26 & 6+7-13 & -6+7+26 & 12+14-26 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 27 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 & 54 \\ 0 & 0 & 27 & 0 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

1.3 Kare matrisler

Matris çarpmasının özel bir durumunda

$$(X, Y) \mapsto XY \colon F^{n\times n} \times F^{n\times n} \to F^{n\times n}.$$

Teorem 2'ye göre bu işlem birleşmelidir.

Örnek 12. Matrisler çarpması değişmeli değildir:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Eğer

$$AB = I_n, \qquad BA = I_n$$

ise, o zaman A ve B'den her biri, diğerinin **tersidir,** ve

$$B = A^{-1}, \qquad A = B^{-1}$$

yazılır.

Örnek 13. Eğer $ad \neq bc$ ise, o zaman

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Örnek 14. $I_n = {I_n}^{-1}$. Ayrıca her elemanter matrisin tersi vardır. Eğer A ve B'nin tersleri varsa, o zaman

$$B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}.$$

Eğer E_i matrisleri elemanter ise, o zaman

$${E_1}^{-1} \cdots {E_\ell}^{-1} = (E_\ell \cdots E_1)^{-1}.$$

Ama $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin tersi yoktur.

Bir

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{bmatrix}$$

matrisi, bir **köşegen matrisidir,** ve

$$\text{köş}(d_1, \dots, d_n)$$

olarak yazılabilir. O halde

$$I_n = \text{köş}(1, \dots, 1).$$

Ayrıca

$$\text{köş}(a_1, \dots, a_n) \cdot \text{köş}(b_1, \dots, b_n) = \text{köş}(a_1 b_1, \dots, a_n b_n).$$

Bundan dolayı $\text{köş}(d_1, \dots, d_n)$ matrisinin tersi var olması için gerek ve yeter bir koşul,

$$d_1 \cdots d_n \neq 0$$

olur. Bu durumda

$$\text{köş}(d_1, \dots, d_n)^{-1} = \text{köş}({d_1}^{-1}, \dots, {d_n}^{-1}).$$

Teorem 6. *$F^{n\times n}$ kümesinde $AB = I_n$ ise, o zaman*

$$BA = I_n. \tag{17}$$

Kanıt. $AB = I_n$ olsun. Terslenebilir bir P matrisi için PA, satırca indirgenmiş basamaklı bir C matrisidir. O zaman

$$\begin{aligned} CB &= (PA)B = P(AB) = PI_n = P, \\ C(BP^{-1}) &= (CB)P^{-1} = PP^{-1} = I_n. \end{aligned}$$

Bundan dolayı C'nin her satırının baş elemanı vardır. Aslında $C = I_n$ olmalı, dolayısıyla $B = P$, ve (17) çıkar. □

Örnek 15. Örnek 11'deki hesaplamalara göre

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} 3 & 3 & -6 \\ 10 & -8 & -11 \\ 2 & -7 & -13 \end{bmatrix}.$$

Örnek 16. İki-elemanlı $\mathbb{Z}_2$ cismi üzerinde,

$$\begin{bmatrix} 1&0&1&0&1&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&1&0&0 \\ 1&1&0&1&0&0&1&0 \\ 1&1&1&1&0&0&0&1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2+R_4]{R_2+R_3} \begin{bmatrix} 1&0&1&0&1&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&1&0&0 \\ 1&0&0&1&0&1&1&0 \\ 1&0&1&1&0&1&0&1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1+R_4} \begin{bmatrix} 1&0&1&0&1&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&1&0&0 \\ 1&0&0&1&0&1&1&0 \\ 0&0&0&1&1&1&0&1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4+R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1&0&1&0&1&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&1&0&0 \\ 1&0&0&0&1&0&1&1 \\ 0&0&0&1&1&1&0&1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3+R_1} \begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&0&1&1 \\ 0&1&0&0&0&1&0&0 \\ 1&0&0&0&1&0&1&1 \\ 0&0&0&1&1&1&0&1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dolayısıyla

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kontrol edelim:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Alıştırma 4. Bazı elemanter satır işlemleriyle, birim matrisinden terslenebilir bir matris elde edin. Bu matrisin tersini bulun, ve sonuçunuzu kontrol edin.

Teorem 7. *Bir A kare matrisi için aşağıdaki koşullar birbirine denktir.*

1. *A, bazı elemanter matrislerin çarpımıdır.*
2. *A'nın tersi vardır.*
3. *$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ sisteminin aşikâr olmayan çözümü yoktur.*
4. *A, satırı sıfır olan bir matrise satırca denk değildir.*

Kanıt. (1) ⇒ (2). Bunu Örnek 14'te gördük.

(2) ⇒ (3). A'nın tersi varsa

$$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \implies A^{-1}A\boldsymbol{x} = A^{-1}\mathbf{0}$$

$$\implies \boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

(3) ⇒ (4). Eğer A, satırı sıfır olan bir matrise satırca denk ise, o zaman $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ sisteminin serbest değişkeni vardır, dolayısıyla sistemin aşikâr olmayan çözümü vardır.

(4) ⇒ (1). Teorem 4'e göre bazı elemanter matrislerin P çarpımı için PA, satırca indirgenmiş basamaklı bir matristir. Bu matrisin sıfır olan satırı yoksa, o zaman $PA = I$, dolayısıyla $A = P^{-1}$. □

1.4 Determinantlar

Teorem 7'ye bir koşul ekleyeceğiz. Sayfa 33'te, her A kare matrisi için,

$$\det A \neq 0 \iff A\text{'nın tersi vardır} \tag{18}$$

kuralını sağlayan $\det A$ skalerini tanımlayacağız. Bu $\det A$ skaleri, A'nın *belirleyicisi* veya **determinantıdır.** Böylece her F cismi için, her n sayma sayısı için,

$$X \mapsto \det X \colon F^{n \times n} \to F.$$

İki-elemanlı $\mathbb{Z}_2$ cismi üzerinde

$$\left.\begin{array}{ll} A\text{'nın tersi varsa} & 1 \\ A\text{'nın tersi yoksa} & 0 \end{array}\right\} = \det A.$$

Bu durumda

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B. \tag{19}$$

Herhangi cisim üzerinde, determinantın vereceğimiz tanımı, bu kuralı sağlayacak.

Teorem 8. *Eğer*

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc \tag{20}$$

tanımlanırsa, o zaman 2×2*'lik matrisler için kurallar* (18) *ve* (19) *sağlanır.*

Kanıt. Örnek 13'te gördüğümüz gibi $ad - bc \neq 0$ ise $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ matrisinin tersi vardır. Şimdi $ad - bc = 0$ olsun.

- Eğer $ad = 0$ ise, o zaman $bc = 0$, ve bu durumda $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ matrisinin bir satırı veya bir sütunu sıfırdır, dolayısıyla

  $$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases} \tag{21}$$

  sisteminin aşikâr olmayan çözümü vardır.
- Eğer $ad \neq 0$ ise

  $$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{c}{a}R_1 + R_2} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  dolayısıyla tekrar sistem (21)'in aşikâr olmayan çözümü vardır.

Son olarak tanım (20)'ye göre

$$\begin{aligned} \det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) &= \det \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix} \\ &= aedh + bgcf - afdg - bhce \\ &= (ad - bc)(eh - fg) \\ &= \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Eğer kurallar (18) ve (19) doğru olacaksa

$$\det I = 1. \tag{22}$$

Şimdilik bazı i ve j için

$$\Phi_t = tR_i + R_j, \qquad \Psi = R_i \leftrightarrow R_j, \qquad \Theta_t = tR_i$$

ise, o zaman

$$\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}, \qquad \Psi \circ \Psi = \Phi_0, \qquad \Theta_t \circ \Theta_s = \Theta_{ts}.$$

Eğer

$$\det(\Phi_t(I)) = 1, \quad \det(\Psi(I)) = -1, \quad \det(\Theta_t(I)) = t \tag{23}$$

tanımlanırsa, o zaman bazı durumlarda (19) sağlanır. Her E_i elemanter olmak üzere eğer

$$\det(E_r \cdots E_1) = \det E_r \cdots \det E_1 \tag{24}$$

tanımlanabilirse, o zaman Teorem 7 sayesinde, terslenebilir matrisler için (19) sağlanır.

Örnek 17. Örnek 11'deki hesaplamara göre

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = 1 \cdot (-13) \cdot 1 \cdot \left(-\frac{27}{13}\right) \cdot 1 \cdot 1 = 27.$$

Determinantlar için hâlâ kesin bir tanımımız yoktur, çünkü aynı matris, birden fazla şekilde elemanter matrislerin çarpımı olarak yazılabilir.

Örnek 18.

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{2R_1+R_2}\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{2}R_2}\begin{bmatrix}1&0\\1&1/2\end{bmatrix}\xrightarrow{-R_2+R_1}\begin{bmatrix}0&-1/2\\1&1/2\end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_1+R_2}\begin{bmatrix}0&-1/2\\1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{-2R_1}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},$$

dolayısıyla

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}.$$

Bu eşitlik, istediğimiz eşitlikler (22), (23), ve (24) ile çelişmez çünkü

$$1=-1\cdot(-2)\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1.$$

İstediğimiz kurallara göre

$$\det\text{köş}(d_1,\dots,d_n)=d_1\cdots d_n.$$

Ayrıca

$$\det\begin{bmatrix}d_1&*&\cdots&*\\0&d_2&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&*\\0&\cdots&0&d_n\end{bmatrix}$$
$$=d_1d_2\cdots d_n=\det\begin{bmatrix}d_1&0&\cdots&0\\ *&d_2&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\ *&\cdots&*&d_n\end{bmatrix}.$$

Buradaki matrisler, **üçgen matrisidir.**

Teorem 9. *Eğer*

$$\det\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix} = abc,$$
$$\det\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix} = -abc,$$

ve

$$\begin{aligned} \det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix} \\ = \det\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ d & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & f \\ g & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ + \det\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f \\ 0 & h & 0 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 0 & b & 0 \\ d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{25}$$

tanımlanırsa, o zaman 3×3'lik matrisler için kurallar (18) *ve* (19) *sağlanır.*

Kanıt. 3×3'lik matrisler için, verilen tanım ile eşitlikler (23) doğrudur. Örneğin

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1,$$
$$\det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -1,$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} = t.$$

Benzer şekilde E elemanter bir matris olmak üzere

$$\det(EA) = \det E \cdot \det A.$$

Sonuç olarak, Teorem 7'ye göre

- A ve B'nin tersleri varsa, kural (19) doğrudur;
- A ve B satırca denk ise

$$\det A = 0 \iff \det B = 0.$$

Ayrıca A'nın tersi yoksa A, satırı sıfır olan bir matrise satırca denktir; ve bu matrisin determinantı 0 olur, dolayısıyla $\det A = 0$. Böylece kural (18) doğrudur, ve kural (19) her durumuda doğrudur. □

Bir kümeden aynı kümeye giden birebir ve örten bir fonksiyon, kümenin permütasyonu veya **simetrisidir.** $\{1, \ldots, n\}$ kümesinin simetrileri

$$\mathrm{Sim}(n)$$

kümesini oluştursun. Eğer $\sigma \in \mathrm{Sim}(n)$ ise

$$\text{işa}(\sigma) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

olsun: bu sayı ya 1 ya da -1 olur, ve σ'nın **işaretidir.** (İsaretin Latincesi *signum,* İngilizcesi *sign* olur.) Aşağıda vereceğimiz iki tanım için

$$A = [a_{ij}]_{1 \leqslant j \leqslant n}^{1 \leqslant i \leqslant n} \tag{26}$$

olsun.

1. Resmi bir tanım olarak

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sim}(n)} \text{işa}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j} \tag{27}$$

olsun. O zaman (20) ve (25), bu tanımın iki durumudur.

2. Şapkalı girdilerin silindiği

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \widehat{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \widehat{a_{i1}} & \cdots & \widehat{a_{ij}} & \cdots & \widehat{a_{in}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \widehat{a_{nj}} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = M_{ij} \tag{28}$$

olmak üzere

$$\operatorname{Ek} A = \left[(-1)^{i+j} \det M_{ij}\right]_{1 \leqslant i \leqslant n}^{1 \leqslant j \leqslant n}$$

olsun: bu matris, A'nın **ekmatrisidir.** $\operatorname{Ek} A$ matrisinin (i, j) girdisi, $(-1)^{i+j} \det M_{ji}$ olur.

Örnek 19. $\operatorname{Ek} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$

Teorem 10. *Tanım* (27) *ile tüm matrisler için kurallar* (18) *ve* (19) *sağlanır.*

Kanıt. Teorem 9'un kanıtını izleyin. □

Teorem 11. *Tanımlar* (26) *ve* (28)*'i kullanarak*

1. $1 \leqslant k \leqslant n$ *ise*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det M_{kj},$$

2. $1 \leqslant \ell \leqslant n$ *ise*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+\ell} a_{i\ell} \det M_{i\ell}. \tag{29}$$

Sonuç olarak

$$A \operatorname{Ek} A = \operatorname{Ek} A \cdot A = \text{köş}(\det A, \dots, \det A) = \det A \cdot I_n,$$

dolayısıyla $\det A \neq 0$ *ise*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{Ek} A. \tag{30}$$

Kanıt. Örneğin

$$\det[\cdots] = |\cdots|$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Örnek 20. Örnek 11 ve 17'ye göre

$$\operatorname{Ek} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -6 \\ 10 & -8 & -11 \\ 2 & -7 & -13 \end{bmatrix}.$$

Ayrıca, direkt hesaplama ile

$$\operatorname{Ek}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -6 \\ 10 & -8 & -11 \\ 2 & -7 & -13 \end{bmatrix}.$$

Zaten yaptığımız kontrol (16)'ya göre

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = 27,$$

dolayısıyla

$$A^{-1} = \frac{1}{27}\operatorname{Ek} A = \begin{bmatrix} 3/27 & 3/27 & -6/27 \\ 10/27 & -8/27 & -11/27 \\ 2/27 & -7/27 & -13/27 \end{bmatrix}.$$

Teorem 12. $\det(A^{\mathrm{t}}) = \det A$.

Teorem 13. *$A \in F^{n\times k}$, $B \in F^{n\times(n-k-1)}$ olsun.*

$$F(\boldsymbol{x}) = \det\left[\ A \mid \boldsymbol{x} \mid B\ \right]$$

olmak üzere

$$F(t\boldsymbol{x}) = t \cdot F(\boldsymbol{x}),$$
$$F(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = F(\boldsymbol{x}) + F(\boldsymbol{y}).$$

Teoremde F **doğrusaldır,** ve sonuç olarak

$$(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n) \mapsto \det \left[\ \boldsymbol{x}_1 \ \middle| \ \cdots \ \middle| \ \boldsymbol{x}_n \ \right]$$

göndermesi n-**doğrusaldır.** Sonraki teoreme göre aynı gönderme **almaşıktır.**

Teorem 14. $\det \left[\ \cdots \ \middle| \ \boldsymbol{x} \ \middle| \ \cdots \ \middle| \ \boldsymbol{x} \ \middle| \ \cdots \ \right] = 0.$

Teorem 15 (Cramer Kuralı)**.** *Eğer*

$$A = \left[\ \boldsymbol{a}_1 \ \middle| \ \cdots \ \middle| \ \boldsymbol{a}_n \ \right]$$

ve terslenebilir ise, o zaman $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *sisteminin tek çözümünde her* j *için*

$$x_j = \frac{1}{\det A} \det \left[\ \boldsymbol{a}_1 \ \middle| \ \cdots \ \middle| \ \boldsymbol{a}_{j-1} \ \middle| \ \boldsymbol{b} \ \middle| \ \boldsymbol{a}_{j+1} \ \middle| \ \cdots \ \middle| \ \boldsymbol{a}_n \ \right].$$

Kanıt. A'nın tersi var olduğundan

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}.$$

Ayrıca sonuç (30)'e göre $A^{-1}\boldsymbol{b}$ vektörünün j'ninci bileşeni,

$$\frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} (-1)^{1+j} M_{1j} & \cdots & (-1)^{n+j} M_{nj} \end{bmatrix} \boldsymbol{b}$$

olur. Bir de sonuç (29)'a göre

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} (-1)^{1+j} M_{1j} & \cdots & (-1)^{n+j} M_{nj} \end{bmatrix} \boldsymbol{b} &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} b_i M_{ij} \\ &= \det \left[\ \boldsymbol{a}_1 \ \middle| \ \cdots \ \middle| \ \boldsymbol{a}_{j-1} \ \middle| \ \boldsymbol{b} \ \middle| \ \boldsymbol{a}_{j+1} \ \middle| \ \cdots \ \middle| \ \boldsymbol{a}_n \ \right]. \quad \square \end{aligned}$$

2 Soyut

2.1 Vektör Uzayları

Tanım 1. Aşağıda, bir **cismin** aksiyomları soldadır; bu cisim üzerinde bir **vektör uzayının** aksiyomları, sağdadır:

$$\begin{aligned}
x+(y+z) &= (x+y)+z, & \boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) &= (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w},\\
x+0 &= x, & \boldsymbol{x}+\mathbf{0} &= \boldsymbol{x},\\
x+(-x) &= 0, & \boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x}) &= \mathbf{0},\\
x+y &= y+x, & \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v}+\boldsymbol{u},\\
x\cdot(y+z) &= x\cdot y+x\cdot z, & x\cdot(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) &= x\cdot\boldsymbol{u}+x\cdot\boldsymbol{v},\\
(x+y)\cdot z &= x\cdot z+y\cdot z, & (x+y)\cdot\boldsymbol{u} &= x\cdot\boldsymbol{u}+y\cdot\boldsymbol{u},\\
(x\cdot y)\cdot z &= x\cdot(y\cdot z), & (x\cdot y)\cdot\boldsymbol{u} &= x\cdot(y\cdot\boldsymbol{u}),\\
1\cdot x &= x, & 1\cdot\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{u}.\\
x\cdot y &= y\cdot x,\\
\exists y\ (x\cdot y &= 1 \lor x=0),
\end{aligned}$$

Sayfa 3'teki Örnek 1'e bakın.

Örnek 21. F'nin bir cisim olduğu F^n ve $F^{m\times n}$ kümeleri, vektör uzayıdır. (Sayfa 4 ve 16'ya bakın.)

Örnek 22. Toplama $(u,v)\mapsto u\cdot v$ ve çarpma $(x,u)\mapsto u^x$ olmak üzere $(0,\infty)$ aralığı, $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{Q}$ üzerinde bir vektör uzayıdır.

Örnek 23. Bir A kümesinden $\mathbb{R}$'ye giden fonksiyonlar $\mathbb{R}$ üzerinde

$$\mathscr{F}(A, \mathbb{R})$$

vektör uzayını oluşturur.

Örnek 24. Her F cismi için katsayıları F'den gelen, değişkeni X olan polinomlar F üzerinde

$$F[X]$$

vektör uzayını oluşturur.

Teorem 16. *Her vektör uzayında*

$$x \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}, \qquad 0 \cdot \boldsymbol{u} = \mathbf{0}, \qquad -1 \cdot \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}.$$

2.2 Uzayların Altuzayları

Tanım 2. Bir vektör uzayının bir altkümesi boş değilse ve toplamaya ve çarpmaya göre kapalı ise altküme, vektör uzayın bir **altuzayıdır.**

Örnek 25. Her vektör uzayının, tek elemanı $\mathbf{0}$ olan aşikâr altuzayıdır.

Örnek 26. Eğer X, özdeşlik fonksiyonu olarak anlaşılırsa, o zaman $\mathbb{R}[X]$, $\mathscr{F}[\mathbb{R}, \mathbb{R}]$ uzayının bir altuzayı olur.

Örnek 27. Her n doğal sayısı için

$$\{f \in \mathbb{R}[X] \colon \operatorname{der}(f) \leqslant n\}$$

kümesi $\mathbb{R}[X]$ uzayının bir altuzayıdır.

Teorem 17. *$A \in F^{m\times n}$ ise*

$$\{\boldsymbol{u} \in F^n \colon A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}\}$$

çözüm kümesi, F^n'nin bir altuzayıdır.

Örnek 28. $\mathbb{R}^2$ uzayının

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geqslant 0 \ \ \& \ \ y \geqslant 0\},$$
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon xy \geqslant 0\}$$

altkümeleri, $\mathbb{R}^2$ uzayının altuzayı değildir.

Örnek 29. $\mathbb{Q}$ üzerinde Örnek 22'de tanımlanmış $(0,\infty)$ uzayının

$$\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^{1/n} \colon \{x,y,n\} \subseteq \mathbb{N}\right\}$$

altuzayı vardır.

Tanım 3. F bir cisim ve U, F üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer B, U'nun bir $\{\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_n\}$ altkümesi ise, o zaman F^n'nin her $(a_1,\dots,a_n)$ elemanı için

$$a_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 + \cdots + a_n \cdot \boldsymbol{b}_n$$

toplamı, B'nin bir **lineer bileşimidir.** (Eğer $n = 0$ ise verilen lineer bileşim, $\boldsymbol{0}$ olur.) B'nin bütün lineer bileşimleri, B'nin **(lineer) gergisini** oluşturur. Bu gergi

$$\text{ya} \qquad \langle \boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_n\rangle \qquad \text{ya da} \qquad \langle B\rangle$$

olarak yazılabilir. Elemanları vektör olan bir küme, gergisini **üretir** ve gergisinin **üreteç kümesidir.**

Teorem 18. *Bir vektör uzayının her altkümesinin gergisi, verilen uzayın altuzayıdır.*

Tanım 4. Bir F cismi üzerinde A, $m \times n$'lik bir matris olsun. A'nın

1) **satır uzayı,** A'nın satırlarının gergisidir;

2) **sütun uzayı,** A'nın sütunlarının gergisidir;

3) **sıfır uzayı,** $\{\boldsymbol{u} \in F^n \colon A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}\}$ uzayıdır.

Bu uzaylar sırasıyla

$$\mathrm{sat}(A), \qquad \mathrm{süt}(A), \qquad \mathrm{sıf}(A)$$

olarak yazılsın. Burada $\mathrm{sat}(A)$ ve $\mathrm{sıf}(A)$, F^n uzayının altuzayıdır; ve $\mathrm{süt}(A)$, F^m uzayının altuzayıdır.

2.3 Tabanlar

Tanım 5. U bir vektör uzayı ve B, U'nun bir $\{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n\}$ altkümesi olsun. Eğer

$$x_1\boldsymbol{b}_1 + \dots + x_n\boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{0}$$

denkleminin sadece aşikâr çözümü varsa, o zaman B **lineer bağımsızdır.** Eğer B lineer bağımsız ve U'yu üretirse, o zaman B, U'nun bir **tabanıdır.**

Teorem 19. *Eşitlik* (8)*'deki gibi* $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \Big| & \cdots & \Big| & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$ *olsun ve* B*,* A*'ya satırca denk olan, basamaklı bir* $[b_{i\,j}]^i_j$ *matrisi olsun. Eğer bir* ℓ *için ve*

$$k_1 < \dots < k_\ell$$

koşulunu sağlayan bazı k_i *için* B*'nin satırlarının baş elemanları* $b_{i\,k_i}$ *girdileri ise, o zaman*

1) $\mathrm{sat}(A)$ *için* B*'nin ilk* ℓ*-tane satırı,*

2) $\mathrm{süt}(A)$ *için* $\boldsymbol{a}_{k_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{k_\ell}$*,*

3) $\mathrm{sıf}(A)$ *için* $B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ *denkleminin temel çözümleri,*

bir taban oluşturur.

Sonuç. *A, F üzerinde $m \times n$'lik* $\left[\ \boldsymbol{a}_1 \ \middle|\ \cdots \ \middle|\ \boldsymbol{a}_n\ \right]$ *matrisi olsun.*

1. $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ *kümesinin*
   - *lineer bağımsız olan*
   - *gergisi aynı olan*

   bir altkümesi elde etmek için, $\mathrm{süt}(A)$ *uzayının bir tabanı alınabilir.*
2. *Eğer* $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ *kümesi zaten lineer bağımsız ise, o zaman*

$$\left[\ A \ \middle|\ I\ \right]$$

   matrisinin sütun uzayının teoremdeki gibi elde edilen tabanı,
   - $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ *kümesini kapsar ve*
   - F^m *uzayının bir tabanıdır.*

Sonuç. *F^m uzayının bir altuzayının her tabanı, aynı sayıda elemana sahiptir.*

Tanım 6. F^m uzayının bir U altuzayının bir tabanının sayısı, U'nun **boyutudur,** ve bu boyut,

$$\mathrm{boy}(U)$$

olarak yazılabilir.

Sonuç. *Herhangi A matrisi için*

$$\operatorname{boy}\bigl(\operatorname{sat}(A)\bigr) = \operatorname{boy}\bigl(\operatorname{süt}(A)\bigr).$$

Eğer A'nın n tane sütunu varsa

$$\operatorname{boy}\bigl((\operatorname{sat}(A)\bigr) + \operatorname{boy}\bigl(\operatorname{sıf}(A)\bigr) = n.$$

2.4 Lineer Dönüşümler

Tanım 7. Bir U vektör uzayından bir V vektör uzayına giden,

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) &= L(\boldsymbol{u}_1) + L(\boldsymbol{u}_2), \\ L(t \cdot \boldsymbol{u}) &= t \cdot L(\boldsymbol{u}) \end{aligned}$$

kurallarını sağlayan bir L göndermesine **lineer dönüşüm** denir. Bu durumda

1) L'nin **çekirdeği,** U'nun

$$\{\boldsymbol{u} \in U \colon L(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}\}$$

altkümesidir,

2) L'nin **imgesi,** V'nin

$$\{L(\boldsymbol{u}) \colon \boldsymbol{u} \in U\}$$

altkümesidir.

Bu kümeler sırasıyla

$$\operatorname{çek}(L), \qquad\qquad L[U]$$

olarak yazılabilir. Eğer L birebir ve $L[U] = V$ ise, o zaman L bir **izomorfizimdir.**

Örnek 30. $A \in F^{m\times n}$ ise F^n uzayından F^m uzayına giden $\boldsymbol{u} \mapsto A\boldsymbol{u}$ fonksiyonu, lineer dönüşümdür.

Teorem 20. *$L\colon U \to V$ ve lineer ise*

1. *çek(L), U'nun bir altuzayıdır,*
2. *$L[U]$, V'nun bir altuzayıdır.*

Teorem 21. *Bir F cismi üzerinde $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$, bir U uzayının altkümesi olsun. O zaman*

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 \cdot \boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n \cdot \boldsymbol{a}_n,$$

F^n uzayından U'ya giden lineer bir dönüşümdür. Eğer $\boldsymbol{a}_i$ vektörleri lineer bağımsız ise, o zaman verilen dönüşüm bir izomorf izimdir.

Sonuç. *Bir vektör uzayının sonlu bir tabanı varsa, o zaman uzayın her tabanı aynı sayıda elemana sahiptir.*

Tanım 8. Teoremde $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$, U'nun bir B tabanı ise

$$[x_1 \cdot \boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n \cdot \boldsymbol{a}_n]_B = (x_1, \dots, x_n)$$

olsun. Bu vektör, $x_1 \cdot \boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n \cdot \boldsymbol{a}_n$ vektörünün B'ye göre **koordinat vektörüdür.**

Teorem 22. *B, bir U uzayının bir tabanı; C, bir V uzayının bir tabanı; $L\colon U \to V$ ve lineer; olsun. O zaman bir A matrisi için U'nun her $\boldsymbol{u}$ elemanı için*

$$[L(\boldsymbol{u})]_C = A[\boldsymbol{u}]_B.$$

Aslında $B = \{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n\}$ ise

$$A = \left[\ [L(\boldsymbol{b}_1)]_C \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, [L(\boldsymbol{b}_n)]_C\ \right].$$

Tanım 9. Teoremde eğer $U = V$ ve L, özdeşlik fonksiyonu ise A, B'den C'ye **geçiş matrisidir.**

Tanım 10. $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in F^n$ ise

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{v} = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$$

olsun.

Teorem 23. *$\boldsymbol{a} \in F^n$ ise $\boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u}$, F^n uzayından F'ye giden lineer bir dönüşümdür. Ayrıca*

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}.$$

$A \in F^{m \times n}$, $\boldsymbol{u} \in$ sıf(A), ve $\boldsymbol{v} \in$ sat(A) ise

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0.$$

Teorem 24. *$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$; B, sıf(A) uzayının bir tabanı; ve C, sat(A) uzayının bir tabanı ise, o zaman $B \cup C$ birleşimi, $\mathbb{R}^n$ uzayının bir tabanıdır.*

Kanıt. $B = \{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_k\}$, $C = \{\boldsymbol{c}_1, \dots, \boldsymbol{c}_\ell\}$ olsun. O zaman $k + \ell = n$, dolayısıyla $\{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_k, \boldsymbol{c}_1, \dots, \boldsymbol{c}_\ell\}$ kümesinin lineer bağımsız olduğunu kanıtlamak yeter. Bazı x_i ve y_j için

$$x_1\boldsymbol{b}_1 + \dots + x_k\boldsymbol{b}_k + y_1\boldsymbol{c}_1 + \dots +_\ell \boldsymbol{c}_\ell = \boldsymbol{0}$$

olsun. O zaman

$$x_1\boldsymbol{b}_1 + \dots + x_k\boldsymbol{b}_k = -y_1\boldsymbol{c}_1 - \dots -_\ell \boldsymbol{c}_\ell.$$

Özel olarak $\boldsymbol{d} = x_1\boldsymbol{b}_1 + \dots + x_k\boldsymbol{b}_k$ ise

$$\boldsymbol{d} \in \text{sıf}(A) \cap \text{sat}(A).$$

Bu durumda $\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{d} = 0$, yani

$$d_1{}^2 + \cdots + d_n{}^2 = 0.$$

Her d_i gerçel sayı olduğundan $d_i = 0$, dolayısıyla $\boldsymbol{d} = \mathbf{0}$. B lineer bağımsız olduğundan $x_i = 0$; aynı şekilde $y_j = 0$. $\square$

Örnek 31. $\mathbb{R}$ üzerinde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ ise $\text{sıf}(A) = \langle(-1,1)\rangle$ ve $\text{sat}(A) = \langle(1,1)\rangle$, ve $\{(-1,1),(1,1)\}$ lineer bağımsızdır çünkü

$$\det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Örnek 32. $\mathbb{Z}_2$ üzerinde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ ise $\text{sıf}(A) = \text{sat}(A)$.

Örnek 33. $\mathbb{C}$ üzerinde $A = \begin{bmatrix} \mathrm{i} & 1 \end{bmatrix}$ ise $\text{sıf}(A) = \text{sat}(A)$.

2.5 Toplamlar

U, V, ve W, F cismi üzerinde vektör uzayı olsun.

Tanım 11. Eğer V ve W, U'nun altuzayı ise, onların **toplamı,**

$$\{\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \colon \boldsymbol{v} \in V \ \ \& \ \ \boldsymbol{w} \in W\}$$

kümesidir. Bu küme,

$$V + W$$

olarak yazılır.

Örnek 34. F^4 uzayında

$$\begin{aligned} V &= \langle(1,1,1,0),(1,-1,1,0)\rangle, \\ W &= \langle(1,0,1,1),(1,0,1,-1)\rangle \end{aligned}$$

ise

$$V + W = \langle (1,1,1,0), (1,-1,1,0), (1,0,1,1), (1,0,1,-1) \rangle.$$

Bu uzay,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisinin sütun uzayıdır. Ayrıca

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-R_1+R_3]{-R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan

(a) F'de $2 \neq 0$ ise $\{(1,1,1,0), (1,-1,1,0), (1,0,1,1)\}$,

(b) F'de $2 = 0$ ise $\{(1,1,1,0), (1,0,1,1)\}$,

$V + W$'nin bir tabanıdır.

Teorem 25. *Eğer $V \subseteq U$ ve $W \subseteq U$ ise, o zaman $V + W$ kümesi,*

1) U'nun bir altuzayıdır,

2) U'nun V'yi ve W'yi kapsayan en küçük altuzayıdır.

Kanıt. 1. Kanıtlanacak üç koşul vardır.

(a) $V+W$ boş değildir, çünkü

$$\mathbf{0} \in V \cap W, \qquad \mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$$

olduğundan $\mathbf{0} \in V+W$.

(b) $\boldsymbol{u}_1 \in V+W$ ve $\boldsymbol{u}_2 \in V+W$ ise V'nin bazı $\boldsymbol{v}_i$ elemanları ve W'nin bazı $\boldsymbol{w}_i$ elemanları için

$$\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{w}_i,$$

dolayısıyla (vektörler toplaması birleşmeli ve değişmeli olduğundan)

$$\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2 = (\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{w}_1)+(\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{w}_2) = (\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)+(\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2).$$

U ve V'nin her biri toplama altında kapalı olduğundan

$$\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2 \in V, \qquad \boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2 \in W,$$

dolayısıyla $\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2 \in V+W$.

(c) Benzer şekilde $\boldsymbol{u} \in V+W$ ve $t \in F$ ise V'nin bir $\boldsymbol{v}$ elemanı ve W'nin bir $\boldsymbol{w}$ elemanı için

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w},$$

dolayısıyla (skalerle çarpma dağılmalı olduğundan)

$$t\boldsymbol{u} = t(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = t\boldsymbol{v}+t\boldsymbol{w}.$$

U ve V'nin her biri çarpma altında kapalı olduğundan

$$t\boldsymbol{v} \in V, \qquad t\boldsymbol{w} \in W,$$

dolayısıyla $t\boldsymbol{u} \in V+W$.

2. U', U'nun V'yi ve W'yi kapsayan bir altuzayı olsun. Eğer $\boldsymbol{u} \in V + W$ ise, o zaman V'nin bir $\boldsymbol{v}$ elemanı ve W'nin bir $\boldsymbol{w}$ elemanı için

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}, \qquad \boldsymbol{v} \in U', \qquad \boldsymbol{w} \in U', \qquad \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in U',$$

dolayısıyla $\boldsymbol{u} \in U'$. □

Sonuç. *$C \subseteq U$ ve $D \subseteq U$ ise*

$$\langle C \rangle + \langle D \rangle = \langle C \cup D \rangle.$$

Kanıt. Alıştırma. □

Teorem 26. *$V \times W$ kartezyan çarpımı,*

$$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}_1) + (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_2) = (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2),$$
$$t(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (t\boldsymbol{v}, t\boldsymbol{w})$$

kurallarıyla vektör uzayı oluyor.

Kanıt. Alıştırma. □

Tanım 12. Vektör uzayı olarak anlaşılınca $V \times W$ çarpımı

$$V \oplus W$$

olarak yazılır ve ona V ve W'nin **direkt toplamı** denir.

Örnek 35. $F^2 = F \oplus F$.

Örnek 36. $F^{k+m} = F^k \oplus F^m$.

Örnek 37. $F^n = \underbrace{F \oplus \cdots \oplus F}_{n}$.

Örnek 38. $\mathbb{Z}$ cisim değildir, çünkü çarpmaya göre sadece 1 ve -1'in tersleri vardır; ama $\underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{n}$ toplamları oluşturulabilir.

Teorem 27. *Eğer $V \subseteq U$ ve $W \subseteq U$ ise, o zaman $V \times W$'den $V + W$'ye giden*

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \mapsto \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$$

göndermesi, $V + W$'yi örten bir h lineer dönüşümüdür, ve bu dönüşüm için aşağıdaki koşullar birbirine denktir:

1. *h birebirdir.*

2. *$h(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \mathbf{0}$ denkleminin sadece aşikâr $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ çözümü vardır.*

3. *Eğer B, V'nin bir tabanı ve C, W'nin bir tabanı ise, o zaman $B \cup C$, $V + W$'nin bir tabanıdır.*

4. *Eğer $B \subseteq V$, $C \subseteq W$, ve her biri lineer bağımsız ise, o zaman $B \cup C$ de lineer bağımsızdır.*

Kanıt. Alıştırma. □

Tanım 13. Teoremde h birebir ise $V + W$ toplamı, V ve W'nin **iç direkt toplamıdır** ve $V \oplus W$ olarak yazılabilir.

Örnek 39. Örnek 34'te

$$V + W = V \oplus \langle (1, 0, 1, 1) \rangle;$$

F'de $2 = 0$ ise $V + W = V \oplus W$.

2.6 Bölümler

Tanım 14. $n \in \mathbb{N}$ ve $a \in \mathbb{Z}$ ise

$$n\mathbb{Z} = \{nx \colon x \in \mathbb{Z}\}, \qquad a + n\mathbb{Z} = \{a + x \colon x \in n\mathbb{Z}\},$$

ve

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{x + n\mathbb{Z} \colon x \in \mathbb{Z}\}$$

olsun. Ayrıca

$$[a] = a + n\mathbb{Z}$$

olsun.

Teorem 28. *$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ kümesinde toplama ve çarpma*

$$[x] + [y] = [x + y], \qquad [x] \cdot [y] = [xy]$$

ile tanımlanabilir.

Kanıt. Tanımdan

$$[a] = [b] \iff a - b \in n\mathbb{Z}.$$

Şimdi

$$[a_1] = [a_2], \qquad [b_1] = [b_2]$$

olsun. O zaman

$$a_1 - a_2 \in n\mathbb{Z}, \qquad b_1 - b_2 \in n\mathbb{Z}.$$

Sonuç olarak

$$(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) \in n\mathbb{Z},$$
$$(a_1 + b_1) - (a_2 + b_2) \in n\mathbb{Z},$$

$$[a_1 + b_1] = [a_2 + b_2],$$

ve ayrıca

$$\begin{aligned}(a_1 - a_2) \cdot b_1 + a_2 \cdot (b_1 - b_2) &\in n\mathbb{Z},\\ a_1 b_1 - a_2 b_2 &\in n\mathbb{Z},\\ [a_1 b_1] &= [a_2 b_2].\end{aligned}$$ □

Tanım 15. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$'de

$$[x]^1 = [x], \qquad [x]^{k+1} = [x]^k \cdot [x]$$

olsun. Öyleyse

$$([x], y) \mapsto [x]^y \colon (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Teorem 29. *$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$'de her k sayma sayısı için*

$$[x]^k = [x^k].$$

Kanıt. Tümevarım:

1. $[x]^1 = [x] = [x^1]$.
2. Eğer $[x]^j = [x^j]$ ise, o zaman

$$[x]^{j+1} = [x]^j \cdot [x] = [x^j] \cdot [x] = [x^j \cdot x] = [x^{j+1}].$$ □

Örnek 40. $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$'de

$$[1] = [4], \qquad [2^1] \neq [2^4].$$

Böylece

$$[x]^{[y]} = [x^y]$$

kuralı ile $([x], [y]) \mapsto [x]^{[y]}$ işlemi **iyitanımlı** değildir: böyle bir işlem yoktur.

Tekrar U, V, ve W, F cismi üzerinde vektör uzayı olsun.

Tanım 16. Eğer $V \subseteq U$ ve $\boldsymbol{a} \in U$ ise

$$\begin{gathered}\boldsymbol{a} + V = \{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v} \colon v \in V\},\\ U/V = \{\boldsymbol{u} + V : \boldsymbol{u} \in U\}\end{gathered}$$

olsun.

Teorem 30. *$V \subseteq U$ ise*

$$\begin{gathered}(\boldsymbol{u}_1 + V) + (\boldsymbol{u}_2 + V) = (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) + V,\\ t(\boldsymbol{u}_1 + V) = t\boldsymbol{u}_1 + V\end{gathered}$$

kurallarıyla U/V bölümü, iyitanımlı bir vektör uzayıdır.

Kanıt. Alıştırma. □

Örnek 41. Örnek 34'te

$$(V + W)/V \cong \langle (1, 0, 1, 1)\rangle;$$

F'de $2 = 0$ ise $(V + W)/V \cong W$.

Örnek 42. Eğer

$$U = \langle (1, 1, 1, 0), (1, -1, 1, 0), (1, 0, 1, 1), (1, 0, 1, -1)\rangle$$

ise

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-R_1+R_3]{-R_1+R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan
$$F^4/U \cong \langle (1,0,0,0) \rangle.$$

Teorem 31. *Eğer $B \cap C = \varnothing$ ve $B \cup C$ lineer bağımsız ise*

$$\langle B \cup C \rangle / \langle B \rangle \cong \langle C \rangle.$$

Kanıt. $B = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_\ell\}$ ve $C = \{\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_m\}$ olsun. O zaman $\langle B \cup C \rangle$ gergisinin her $\boldsymbol{a}$ elemanı, tek bir şekilde, $u_i \in F$ ve $v_j \in F$ olmak üzere bir

$$u_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + u_\ell \boldsymbol{b}_\ell + v_1\boldsymbol{c}_1 + \cdots + v_m\boldsymbol{c}_m$$

lineer bileşimi olarak yazılabilir. Bu durumda

$$h(\boldsymbol{a}) = v_1\boldsymbol{c}_1 + \cdots + v_m\boldsymbol{c}_m$$

eşitliği ile $\langle B \cup C \rangle$ gergisinden $\langle C \rangle$ gergisine giden bir h lineer dönüşümü tanımlanabilir. Şimdi

$$\boldsymbol{a}' = u_1'\boldsymbol{b}_1 + \cdots + u_\ell'\boldsymbol{b}_\ell + v_1'\boldsymbol{c}_1 + \cdots + v_m'\boldsymbol{c}_m$$

olsun. Eğer
$$\boldsymbol{a}' + \langle B \rangle = \boldsymbol{a} + \langle B \rangle \tag{31}$$

ise, o zaman $\boldsymbol{a}' - \boldsymbol{a} \in \langle B \rangle$. Bundan dolayı

$$\begin{aligned}(u_1' - u_1)\boldsymbol{b}_1 + \cdots + (u_\ell' - u_\ell)\boldsymbol{b}_\ell \\ + (v_1' - v_1)\boldsymbol{c}_1 + \cdots + (v_m' - v_m)\boldsymbol{c}_m \in \langle B \rangle.\end{aligned}$$

Bu durumda $B \cup C$ lineer bağımsız olduğundan

$$v_1' - v_1 = \ldots = v_m' - v_m = 0,$$

dolayısıyla $v_1' = v_1, \ldots, v_m' = v_m$, ve sonuç olarak

$$h(\boldsymbol{a}') = h(\boldsymbol{a}). \tag{32}$$

Bu şekilde $\langle B \cup C \rangle / \langle B \rangle$ bölümünden $\langle C \rangle$ gergisine giden

$$\tilde{h}(\boldsymbol{u} + \langle B \rangle) = h(\boldsymbol{u})$$

eşitliği ile iyitanımlanmış lineer dönüşümü vardır. Benzer şekilde eşitlik (32) doğru ise eşitlik (31) de doğrudur, dolayısıyla $\tilde{h}$, birebirdir. Son olarak $\tilde{h}$ dönüşümünün $\langle C \rangle$ gergisini örten olduğu apaçıktır. $\square$