Ordinal Analiz

Aksiyomatik Kümeler Kuramı Dersi

David Pierce

7 Kasım 2019 taslağı

Matematik Bölümü
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi
İstanbul
dpierce@msgsu.edu.tr
mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/

İçindekiler

Şekil Listesi

1. Kümeler kuramı olarak matematik

Matematiği yaparak zaten kümelerin ne olduğunu biliyoruz. Örneğin

- gerçel sayılar bir $\mathbb{R}$,
- kesirli sayılar bir $\mathbb{Q}$,
- tamsayılar bir $\mathbb{Z}$,
- sayma sayılar bir $\mathbb{N}$

kümesini oluşturur.

Şimdi $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden bir f göndermesi verilsin. Örneğin

$$f(x) = \sin x + x^2 - 2$$

olsun. O zaman f'nin kendisi,

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \colon y = \sin x + x^2 - 2\}$$

kümesidir. Burada tanıma göre

$$\begin{gathered} (a, b) = \big\{\{a\}, \{a, b\}\big\}, \\ A \times B = \{(x, y) \colon x \in A \ \ \& \ \ y \in B\}. \end{gathered}$$

Teorem 1. *Tüm a, b, c, ve d için*

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \ \ \& \ \ b = d.$$

Kanıt. (⇒). $(a,b)=(c,d)$ olsun. O zaman

$$\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}.$$

O halde

$$\{a\}\in\{\{c\},\{c,d\}\},$$

İki durum vardır.

1. $\{a\}=\{c\}$ ise $a=c$.

2. $\{a\}=\{c,d\}$ ise $c\in\{a\}$, dolayısıyla tekrar $a=c$.

Şimdi

$$\{a,b\}=\{c,d\}$$

olmalıdır, dolayısıyla $a=c$ olduğundan $b=d$.

(⇐). Açıktır. □

Her A kümesinin altkümeleri, A'nın

$$\mathscr{P}(A)$$

kuvvet kümesini oluşturur. Örneğin

$$\{a\}\subseteq\{a,b\}, \qquad \{a,b\}\subseteq\{a,b\}$$

olduğundan

$$\{a\}\in\mathscr{P}(\{a,b\}), \qquad \{a,b\}\in\mathscr{P}(\{a,b\}),$$

dolayısıyla

$$\{\{a\},\{a,b\}\}\subseteq\mathscr{P}(\{a,b\}),$$

yani

$$(a,b)\in\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{a,b\})).$$

Teorem 2. *A ve B küme ise*

$$A \times B \subseteq \mathscr{P}(\mathscr{P}(A \cup B)).$$

Alıştırma I. Teoremi kanıtlayın.

Şimdi $\mathbb{R}$'den $\mathscr{P}(\mathbb{R})$'ye giden,

$$g(a) = \{x \in \mathbb{Q} \colon x < a\} \tag{1.1}$$

tanımını sağlayan bir g göndermesi vardır. $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$'de *yoğun* olduğundan g birebirdir. Ayrıca her $g(a)$ kümesi, $\mathbb{R}$'nin

$$\varnothing \subset A \subset \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

$$b \in A \ \& \ c < b \implies c \in A \tag{1.3}$$

koşullarını sağlayan bir A altkümesidir.

Tam tersine A, elemanları gerçel sayı olan, verilen (1.2) ve (1.3) koşullarını sağlayan bir küme olsun. O zaman

- (1.2) sayesinde $\mathbb{R} \smallsetminus A$ farkının bir c elemanı vardır, ve
- (1.3) koşulunun

  $$c \in \mathbb{R} \smallsetminus A \ \& \ b \in A \implies b < c$$

  karşıt tersine göre c A'nın bir üstsınırıdır.

O zaman

- A boş olmadıgından,
- $\mathbb{R}$ doğrusal sıralanmış bir küme olarak *tam* olduğundan

A'nın en küçük üstsınırı vardır. Şimdi ayrıca

$$\sup A \notin A \tag{1.4}$$

olsun. O zaman

$$g(\sup A) = A.$$

Genel bir teorem vardır.

Teorem 3. *$(A,<)$, uçsuz yoğun doğrusal sıralanmış bir küme olsun, ve A'nın*

$$X \neq \varnothing, \qquad X \neq A,$$
$$\forall x\,\forall y\,(y \in X \wedge x < y \Rightarrow x \in X),$$
$$\forall x\,\exists y\,(x \in X \Rightarrow x < y \wedge y \in X)$$

cümlelerini sağlayan X altkümeleri A^* kümesini oluştursun. O zaman

(a) *$(A^*, \subset)$ yapısı da uçsuz yoğun doğrusal sıralanmış bir kümedir,*

(b) *oraya $(A,<)$*

$$x \mapsto \{y \in A \colon y < x\}$$

göndermesi altında gömülür,

(c) *$(A^*, \subset)$ tamdır,*

(d) *Eğer B, A^*'ın boş olmayan, üstsınırı olan bir altkümesi ise, o zaman*

$$\sup B = \bigcup B.$$

Alıştırma II. Teoremi kanıtlayın.

Şimdi $\mathbb{R}$'nin (1.2), (1.3), ve (1.4) koşullarını sağlayan A kümeleri $\mathscr{S}$ kümesini oluştursun. O zaman tanımı (1.1) olan g göndermesi, $\mathbb{R}$'den $\mathscr{S}$'ye giden bir eşlemedir. Ayrıca $\mathbb{R}$'yi kullanılmadan $\mathscr{S}$ tanımlandığından $\mathbb{R}$, $\mathscr{S}$ olarak tanımlanabilir. Kısaca her gerçel sayı, elemanları kesirli sayı olan bir küme olarak tanımlanabilir. Özel olarak

$$\mathbb{R} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{Q}).$$

Ayrıca tanıma göre

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{x}{y} \colon (x,y) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \smallsetminus \{0\})\right\},$$

ve burada

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc.$$

Bir a/b kesirli sayısının iyitanımlanması için $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \smallsetminus \{0\})$ çarpımında

$$(x, y) \ B \ (z, w) \iff xw = yz$$

kuralı tarafından tanımlanmış B bağıntısı, bir denklik bağıntısı olmalıdır. Bu durumda

$$\frac{a}{b} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}) \colon (a, b) \ B \ (x, y)\},$$

dolayısıyla Teorem 2 sayesinde

$$\frac{a}{b} \subseteq \mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbb{Z})),$$
$$\mathbb{Q} \subseteq \mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbb{Z}))).$$

Benzer şekilde

$$a - b = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \colon a + y = b + x\}$$

olmak üzere

$$\mathbb{Z} = \{x - y \colon (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\},$$

dolayısıyla

$$\mathbb{Z} \subseteq \mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbb{N}))),$$
$$\mathbb{Q} \subseteq \mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbb{N})))))),$$
$$\mathbb{R} \subseteq \mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbb{N}))))))).$$

Küme olarak $\mathbb{N}$'nin elemanları nasıl anlaşılabilir?

2. Doğal sayılar

2.1. Sınıflar ve kümeler

Her *küme* bir *sınıftır,* ama her sınıf bir küme değildir.

Tanıma göre bir **sınıf,** *tek serbest değişkenli bir formül* tarafından tanımlanır. Bir sınıfın **elemanları** vardır, ve bunlar, tanımlayan formülün sağlayanlarıdır.

Bazı sınıflar, kümedir. Kümelerin özellikleri bir tanım değil, aksiyomlar tarafından verilecektir. Şimdilik, eğer a bir küme ise, o zaman

$$x \in a$$

ifadesi, serbest değişkeni x olan bir formüldür, ve bu formül, sınıf olarak a'yı tanımlar.

Eğer φ serbest değişkeni x olan bir formül ise, o zaman φ'nin tanımladığı sınıfı,

$$\{x \colon \varphi\}$$

olarak yazılır. Eğer bu sınıf için $\boldsymbol{A}$ harfini yazarsak, o zaman her b kümesi için $\varphi(b)$ cümlesinin yerine $b \in \boldsymbol{A}$ ifadesini yazabiliriz: kısaca

$$\varphi(b) \iff b \in \boldsymbol{A}.$$

Her tarafına göre b, $\boldsymbol{A}$'nın elemanıdır.

Formüller ve onların serbest değişkenleri, B Eki'nde tanımlanır. Sınıflar büyük siyah harfler ile göstereceğiz; küçük harfler her zaman küme olacaktır. Büyük normal harfler de küme olabilir.

Bizim için her sınıfın her elemanı bir küme olacaktır. Küme olmayan bir sınıf, bir sınıfın elemanı olamaz. Bundan dolayı, $x \in a$ veya $x \in \boldsymbol{B}$ gibi bir formülde, x değişkeninin yerine $\boldsymbol{C}$ gibi büyük siyah bir harf konulamaz.

Elemanları aynı olan sınıflar da aynıdır, ama bu aynılık, **eşitlik** olarak yazılır. (Öklid'de eşitlik, aynılık değildir. Örneğin ikizkenar bir üçgenin iki eşit kenarı vardır, ama bu kenarlar birbiriyle aynı değildir.) Böylece

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \iff \forall x\ (x \in \boldsymbol{A} \Leftrightarrow x \in \boldsymbol{B}).$$

Özel olarak

$$a = \{x \colon x \in a\}.$$

Teorem 4 (Russell Paradoksu). *$\{x \colon x \notin x\}$ sınıfı bir küme değildir.*

Kanıt. $x \notin x$ formülü φ olarak yazılsın. Mümkünse $\{x \colon \varphi\} = a$ olsun. O zaman her b kümesi için

$$b \in a \Leftrightarrow \varphi(b).$$

Özel olarak $a \in a \Leftrightarrow \varphi(a)$, yani

$$a \in a \Leftrightarrow a \notin a;$$

ama bu bir çelişkidir. Bu şekilde $\{x \colon x \notin x\}$ sınıfı, bir a kümesine eşit olamaz. □

Tanıma göre

$$\mathbf{V} = \{x \colon x \in x \lor x \notin x\},$$

$$
\begin{aligned}
\varnothing &= \{x\colon x \in x \wedge x \notin x\},\\
\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} &= \{x\colon x \in \boldsymbol{A} \vee x \in \boldsymbol{B}\},\\
\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} &= \{x\colon x \in \boldsymbol{A} \wedge x \in \boldsymbol{B}\},\\
\boldsymbol{A} \smallsetminus \boldsymbol{B} &= \{x\colon x \in \boldsymbol{A} \wedge x \notin \boldsymbol{B}\}.
\end{aligned}
$$

O zaman

$$
\begin{array}{lll}
\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}, & \boldsymbol{A} \cup \varnothing = \boldsymbol{A}, & \boldsymbol{A} \cup \mathbf{V} = \mathbf{V},\\
\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}, & \boldsymbol{A} \cap \varnothing = \varnothing, & \boldsymbol{A} \cap \mathbf{V} = \boldsymbol{A},
\end{array}
$$

ve ayrıca

$$
\boldsymbol{A} \smallsetminus \varnothing = \boldsymbol{A}, \qquad \boldsymbol{A} \smallsetminus \mathbf{V} = \varnothing.
$$

Her a kümesi için tanıma göre

$$
\{a\} = \{x\colon x = a\};
$$

burada $x = a$ ifadesi, $\forall y\ (y \in x \Leftrightarrow y \in a)$ formülü için bir kısaltmadır. Benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
\{a, b\} &= \{x\colon x = a \vee x = b\},\\
\{a, b, c\} &= \{x\colon x = a \vee x = b \vee x = c\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

AKSİYOM 1 (Boş Küme)**.** *$\varnothing$ sınıfı bir kümedir.*

Boş küme 0 olarak da yazılır.

AKSİYOM 2 (Bitiştirme)**.** *Tüm a ve b kümeleri için*

$$
a \cup \{b\}
$$

sınıfı bir kümedir.

Sonuç olarak her $\{a\}$, $\{a, b\}$, $\{a, b, c\}$, veya . . . sınıfı bir kümedir. Özellikle

$$\{0\}, \qquad \{0, \{0\}\}, \qquad \Big\{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}\Big\}, \qquad \ldots$$

sınıflarının her biri, bir kümedir. Bu kümeler, sırasıyla 1, 2, 3, . . . , olarak yazılır.

Tanıma göre her a kümesi için

$$a' = a \cup \{a\}$$

olsun. O zaman Bitiştirme Aksiyomu'na göre a' sınıfı, bir kümedir. Bu kümeye a'nın **ardılı** densin. Şimdi

$$1 = 0', \qquad 2 = 1', \qquad 3 = 2', \qquad \ldots$$

0'ı içeren, her elemanının ardılını da içeren bir sınıfa **tümevarımlı** densin. Öyleyse bir $\boldsymbol{A}$ sınıfı tümevarımlıdır ancak ve ancak

1) $0 \in \boldsymbol{A}$,
2) $\forall x \; (x \in \boldsymbol{A} \Rightarrow x' \in \boldsymbol{A})$.

O zaman $\mathbf{V}$ tümevarımlıdır.

AKSİYOM 3 (Sonsuzluk)**.** *Tümevarımlı bir küme vardır.*

2.2. Altsınıflar

Eğer bir $\boldsymbol{A}$ sınıfının her elemanı bir $\boldsymbol{B}$ sınıfının bir elemanı ise, o zaman $\boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{B}$'nin bir **altsınıfıdır** ve

$$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$$

ifadesini yazarız. Bu ifade,

$$\forall x \; (x \in \boldsymbol{A} \Rightarrow x \in \boldsymbol{B})$$

cümlesinin bir kısaltmasıdır. O zaman

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A}. \tag{2.1}$$

Ayrıca

$$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{C} \Rightarrow \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{C},$$

dolayısıyla tanıma göre

$$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{C} \iff \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{C}.$$

Sözcüklerde bir sınıf

- elemanlarını **içerir,**
- altsınıflarını **kapsar.**

O zaman a' a'yı hem içerir hem de kapsar:

$$a \in a', \qquad\qquad a \subseteq a'.$$

Eğer bir sınıfın bir altsınıfı bir küme ise, bu küme sınıfın bir **altkümesidir.**

AKSİYOM 4 (Ayırma)**.** *Her kümenin her altsınıfı bir kümedir.*

Bu şekilde her a kümesi ve $\{x\colon \varphi(x)\}$ sınıfı için

$$\{x\colon x \in a \wedge \varphi(x)\}$$

sınıfı bir kümedir. Bu küme

$$\{x \in a\colon \varphi(x)\}$$

olarak yazılabilir.

Her sınıf **V**'nin bir altsınıfı olduğundan Teorem 4 sayesinde **V** bir küme değildir.

Tanıma göre her $\boldsymbol{A}$ sınıfı için

$$\bigcap \boldsymbol{A} = \{x\colon \forall y\ (y \in \boldsymbol{A} \Rightarrow x \in y)\},$$
$$\bigcup \boldsymbol{A} = \{x\colon \exists y\ (y \in \boldsymbol{A} \wedge x \in y)\}.$$

Burada

- $\bigcap \boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{A}$'nın **kesişimidir,**
- $\bigcup \boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{A}$'nın **bileşimidir.**

Örneğin

$$\bigcap\{a, b\} = a \cap b, \qquad \bigcup\{a, b\} = a \cup b,$$
$$\bigcap\{a\} = a, \qquad \bigcup\{a\} = a,$$
$$\bigcap \varnothing = \mathbf{V}, \qquad \bigcup \varnothing = \varnothing.$$

Ayrıca

$$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \Rightarrow \bigcap \boldsymbol{B} \subseteq \bigcap \boldsymbol{A} \wedge \bigcup \boldsymbol{A} \subseteq \bigcup \boldsymbol{B},$$
$$a \in \boldsymbol{B} \Rightarrow \bigcap \boldsymbol{B} \subseteq a \subseteq \bigcup \boldsymbol{B}. \tag{2.2}$$

Ayırma Aksiyomu'ndan $\boldsymbol{A}$ boş değilse $\bigcap \boldsymbol{A}$ bir kümedir.

Tanıma göre tümevarımlı kümelerin oluşturduğu sınıfın kesişimi, **doğal sayıları** içerir, ve bu kesişimi için ω (omega) harfini yazarız. Böylece

$$\omega = \bigcap\{x\colon 0 \in x \wedge \forall y\ (y \in x \Rightarrow y' \in x)\}.$$

Sonsuzluk ve Ayırma aksiyomları sayesinde ω bir kümedir.

Teorem 5 (Tümevarım)**.** *A, ω'nın öyle altkümesi olsun ki*

1) $0 \in A$ olsun ve

2) her n doğal sayısı için $n \in A \Rightarrow n' \in A$ olsun.

O zaman $A = \omega$. Kısaca ω'nın tek tümevarımlı altkümesi, kendisidir.

Kanıt. Varsayıma göre A, ω'nın tümevarımlı bir altkümesidir. Öyleyse (2.2) sayesinde

$$A \subseteq \omega, \qquad\qquad \omega \subseteq A,$$

dolayısıyla (2.1) sayesinde $A = \omega$. □

Teorem 6. *Her doğal sayının ya 0 ya da doğal bir sayının ardılı olduğunu gösterin.*

Alıştırma III. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 7. *Her doğal sayının her elemanı, doğal sayıdır.*

Alıştırma IV. Teoremi kanıtlayın.

Her küme, kendinin altkümesidir; kümenin diğer altkümeleri, kümenin **özaltkümeleridir.** Kısaca

$$a \subset b \iff a \subseteq b \land a \neq b.$$

O zaman $\subset$ bağıntısı **yansımasız** ve **geçişlidir,** yani

$$a \not\subset a,$$
$$a \subset b \land b \subset c \Rightarrow a \subset c.$$

Kısaca $\subset$, bir **sıralamadır**.

Teorem 8. *Her doğal sayının her elemanı, sayının bir özaltkümesidir: Eğer $n \in \omega$ ise, o zaman*

$$k \in n \Rightarrow k \subset n.$$

Kanıt. Tümevarım kullanacağız.

1. 0'nın elemanı olmadığından 0'ın her elemanı bir özaltkümedir.

2. Bir m doğal sayısı için tümevarım hipotezi olarak m'nin her elemanı bir özaltküme olsun. Bu durumda $m \not\subset m$ olduğundan $m \notin m$, dolayısıyla

$$m \subset m'. \tag{2.3}$$

Şimdi $k \in m'$ olsun. O zaman

$$k \in m \vee k = m.$$

a) Eğer $k \in m$ ise hipotezden $k \subset m$.
b) Eğer $k = m$ ise $k \subseteq m$.

Her durumda (2.3) sayesinde

$$k \subset m'.$$

Böylece tümevarım tamamdır. □

Sonuç. *Ardılları aynı olan doğal sayılar da aynıdır:* ω*'da*

$$k' = n' \Rightarrow k = n.$$

Alıştırma V. Sonucu kanıtlayın.

1) Teorem 5,
2) Teorem 8'in sonucu, ve
3) 0'ın ardıl olmadığına

Peano Aksiyomları denir. Bunlardan doğal sayıların matematikte kullanılan tüm özellikleri kanıtlanabilir. Doğal sayıların kümeler kuramından gelen tanımını kullanarak özellikleri kanıtlamak daha kolaydır.

Teorem 9. *Eğer $n \in \omega$ ise, o zaman her k doğal sayısı için*

$$k \subset n \Rightarrow k \in n.$$

Kanıt. Tümevarım kullanacağız.

1. Her k doğal sayısı için $k \not\subset 0$, dolayısıyla

$$k \subset 0 \Rightarrow k \in 0.$$

2. Bir m doğal sayısı için tümevarım hipotezi olarak her k doğal sayısı için

$$k \subset m \Leftrightarrow k \in m$$

olsun. Eğer $k \subset m'$ ise, o zaman $k \subseteq m$ veya $m \in k$. Son durum imkânsızdır çünkü $m \in k$ ise, Teorem 8'den

$$m \subset k \subset m',$$

ki bu imkânsızdır. Sonuç olarak $k \subseteq m$.

- Eğer $k = m$ ise, o zaman $k \in m'$.
- Eğer $k \subset m$ ise, o zaman $k \in m$, dolayısıyla $k \in m'$.

Tümevarım tamamdır. □

Sonuç olarak ω'da $\in$ ve $\subset$, aynı bağıntıdır. Özel olarak ω'da $\in$ bağıntısı bir sıralamadır.

Teorem 10. *Tüm k ve n doğal sayıları için*

$$k \subseteq n \vee n \subset k.$$

Kanıt. 1. Her k için $0 \subseteq k$, dolayısıyla

$$k \subseteq 0 \vee 0 \subset k.$$

2. ω'da bir m için, her k için,

$$k \subseteq m \vee m \subset k$$

olsun, ama bir k için $k \nsubseteq m'$ olsun. O zaman

$$k \neq m', \qquad k \nsubseteq m,$$

dolayısıyla, hipotez sayesinde, $m \subset k$. Ayrıca Teorem 9'dan $m \in k$, dolayısıyla

$$m' \subset k. \qquad \square$$

Sonuç olarak ω'da $\subset$ veya $\in$ sıralaması, **doğrusal** bir sıralamadır.

Teorem 11. *$\in$ sıralamasına göre her doğal sayının boş olmayan her altkümesinin en küçük elemanı vardır, ve bu eleman, altkümenin kesişimidir.*

Kanıt. 1. 0'ın boş olmayan hiç altkümesi olmadığından iddia 0 için aşikâr bir şekilde doğrudur.

2. Bir m için iddia doğru olsun, ve

$$0 \subset A \subseteq m'$$

olsun. İki durum vardır.

a) Eğer $A = \{m\}$ ise, o zaman m, aşikâr bir şekilde A'nın diğer elemanlarının elemanıdır, çünkü başka eleman yoktur.

b) Diğer durumda hipoteze göre $\bigcap(A \smallsetminus \{m\})$ kesişimi, $A \smallsetminus \{m\}$ farkının en küçük elemanıdır. Ayrıca

$$A \smallsetminus \{m\} \subseteq m,$$

dolayısıyla $\bigcap(A \smallsetminus \{m\})$ A'nın en küçük elemanıdır. $\square$

Sonuç. *$\in$ sıralamasına göre ω'nın boş olmayan her altkümesinin en küçük elemanı vardır, ve bu eleman, altkümenin kesişimidir.*

Alıştırma VI. Sonucu kanıtlayın.

Kısaca ω'da $\in$ veya $\subset$ doğrusal sıralaması, **iyisıralamadır.** Ayrıca her doğal sayıda da $\in$ bir iyisıralamadır.

Alıştırma VII (Güçlü Tümevarım). A, ω'nın öyle altkümesi olsun ki

- her n doğal sayısı için
$$n \subseteq A \Rightarrow n \in A$$
olsun. (Kısaca A, kapsadığı her doğal sayıyı içersin.)

A'nın ω olduğunu kanıtlayın. *İpucu*: Önce $\boldsymbol{A}$'nın her doğal sayıyı kapsadığını kanıtlayın.

2.3. Bağıntılar ve Göndermeler

Bildiğimiz gibi
- $=$ yansımalı, simetrik, ve geçişli bir bağıntıdır;
- $\subseteq$ yansımalı ve geçişli bir bağıntıdır;
- $\subset$ yansımasız ve geçişli bir bağıntıdır, dolayısıyla bir sıralamadır;
- ω'da $\subset$ doğrusal bir sıralamadır ve $\in$ ile aynıdır.

Genelde bir **bağıntı,** iki serbest değişkeni olan bir formül tarafından tanımlanır. Örneğin $=$, $\subseteq$, $\subset$, ve $\in$, sırasıyla

$$\forall z\ (z \in x \Leftrightarrow z \in y),$$

$$\forall z\ (z \in x \Rightarrow z \in y),$$
$$\forall z\ (z \in x \Rightarrow z \in y) \land \exists z\ (z \notin x \land z \in y),$$
$$x \in y$$

formülleri tarafından tanımlanır. Eğer bir φ formülü bir $\boldsymbol{R}$ bağıntısını tanımlarsa, o zaman $\varphi(a, b)$ cümlesini

$$a\ \boldsymbol{R}\ b$$

olarak yazabiliriz.

Şimdi $\boldsymbol{R}$ bir bağıntı ve $\boldsymbol{D}$ bir sınıf olsun. Eğer $\boldsymbol{D}$'nin her a elemanı için ve bütün b ve c kümeleri için

$$a\ \boldsymbol{R}\ b \land a\ \boldsymbol{R}\ c \Rightarrow b = c$$

ise, o zaman $\boldsymbol{D}$'de $\boldsymbol{R}$ bir **göndermeyi** tanımlar. Bu göndermeye $\boldsymbol{F}$ densin; o zaman $\boldsymbol{F}$'nin **tanım sınıfı** $\boldsymbol{D}$'dir. Eğer

$$a \in \boldsymbol{D} \land a\ \boldsymbol{R}\ b$$

ise, o zaman

$$\boldsymbol{F}(a) = b$$

yazılabilir; ayrıca $\boldsymbol{F}$'nin yerine

$$x \mapsto \boldsymbol{F}(x)$$

yazılabilir. Örneğin $\mathbf{V}$'de $x \mapsto x'$ göndermesi vardır, ve bu göndermeyi

$$\forall z\ \big(z \in y \Leftrightarrow z \in x \lor \forall w\ (w \in z \Leftrightarrow w \in x)\big)$$

formülü, kısaca $\forall z\ (z \in y \Leftrightarrow z \in x \lor z = x)$, tanımlar.

AKSİYOM 5 (Yerleştirme). *Her $\boldsymbol{F}$ göndermesi için, $\boldsymbol{F}$'nin tanım sınıfının her a altkümesi için*

$$\{y \colon \exists x\ (\boldsymbol{F}(x) = y \wedge x \in a)\}$$

sınıfı bir kümedir.

Aksiyomda verilen küme

$$\{\boldsymbol{F}(x) \colon x \in a\}, \qquad\qquad \boldsymbol{F}[a]$$

ifadelerinin biri ile gösterilebilir.

2.4. Doğal Sayılarda Özyineleme

Teorem 12 (Özyineleme). *Bir A kümesi için*

1) *$b \in A$,*
2) *$f \colon A \to A$*

olsun. O zaman ω'dan A'ya giden bir ve tek bir g göndermesi için

1) *$g(0) = b$,*
2) *her k doğal sayısı için $g(k+1) = f(g(k))$.*

Şekil 1'e bakın.

Kanıt. Tümevarımdan istediğimiz özellikleri olan bir gönderme varsa, tek bir örnek vardır.

Şimdi elemanları gönderme olan bir $\mathscr{C}$ kümesini tanımlayacağız. $\mathscr{C}$'nin her h elemanı için,

1) h'nin tanım kümesi ω'nin bir altkümesidir, ve
2) herhangi ℓ doğal sayısı için, $h(\ell)$ tanımlanırsa, o zaman
   a) ya $\ell = 0$ ve $h(\ell) = b$,
   b) ya da bir k doğal sayısı için $\ell = k+1$, $h(k)$ tanımlanır, ve
   $$h(\ell) = f(h(k)).$$

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "g"'] & \omega \arrow[r, "x\mapsto x+1"] \arrow[d, "g"'] & \omega \arrow[d, "g"] \\
\{b\} \arrow[r, "\subseteq"'] & A \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$

Şekil 1.: Özyineleme

İstediğimiz gibi g göndermesi varsa $\mathscr{C}$'nin elemanıdır. Her k doğal sayısı için, A'nın bir ve tek bir d elemanı için, $\mathscr{C}$'nin bir h elemanı için $h(k) = d$ göstereceğiz. Bu şekilde $g(k) = d$ tanımlanabilir.

Yukarıdaki özelliği olan k doğal sayıları, E kümesini oluştursun. Tanım kümesi $\{0\}$ olan bir h göndermesi için $h(0) = b$. O zaman $h \in \mathscr{C}$. Ayrıca $\mathscr{C}$'nin herhangi h elemanı için $h(0)$ tanımlanırsa, o zaman $h(0) = b$ olmalıdır, çünkü hiç k doğal sayısı için $k + 1 = 0$ değildir. Bu şekilde $0 \in E$.

Şimdi $k \in E$ olsun. O zaman A'nın bir ve tek bir d elemanı için, $\mathscr{C}$'nin bir h elemanı için $h(k) = d$.

1. Eğer $h(k+1)$ tanımlanırsa, o zaman $\mathscr{C}$'nin tanımına göre $h(k + 1) = f(d)$, çünkü $k + 1 \neq 0$, ve ayrıca herhangi ℓ doğal sayısı için eğer $\ell + 1 = k + 1$ ise, o zaman $\ell = k$.
2. Eğer $h(k + 1)$ tanımlanmazsa, o zaman yeni bir h^* göndermesi için

$$h^*(x) = \begin{cases} h(x), & \text{eğer } h(x) \text{ tanımlanırsa,} \\ f(d), & \text{eğer } x = k + 1. \end{cases}$$

   O zaman $h^* \in \mathscr{C}$ ve $h^*(k + 1) = f(d)$.

Bu şekilde, her durumda, $\mathscr{C}$'nin bir h elemanı için $h(k+1) = f(d)$.

Mümkümse $d^* \in A$, $d^* \neq f(d)$ olsun, ama $\mathscr{C}$'nin bir h elemanı için $h(k+1) = d^*$ olsun. O zaman $k+1 \neq 0$ olduğundan bir ℓ doğal sayısı için $\ell + 1 = k + 1$, $h(\ell)$ tanımlanır, ve $d^* = f(h(\ell))$. Ama bu durumda $\ell = k$, dolayısıyla $h(\ell) = d$ ve $d^* = f(d)$.

Sonuç olarak $k + 1 \in E$. Tümevarım ile $E = \omega$. □

Yukarıdaki kanıt, sadece ω'nin aşağıdaki özelliklerini kullanır:

1. $0 \in \omega$.
2. $k \in \omega$ ise $k + 1 \in \omega$.
3. Tümevarım yöntemi geçerlidir.
4. Her k doğal sayısı için $0 \neq k + 1$.
5. Tüm k ve ℓ doğal sayıları için $k + 1 = \ell + 1$ ise $k = \ell$.

Bu özelliklere **Peano Aksiyomları** denir. Peano Aksiyomları, ω'da iki-konumlu toplama işleminin tanımlandığını varsaymaz; sadece tek-konumlu $x \mapsto x + 1$ işlemi vardır. Ama özyineleme yöntemiyle ω'da toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayabiliriz:

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1, \quad a \cdot 1 = a, \quad a \cdot (b + 1) = ab + a.$$

Tümevarım ve kalan Peano Aksiyomları ile toplamanın ve çarpmanın özelliklerini kanıtlayabiliriz; ayrıca ω'nın sıralamasını tanımlayıp özelliklerini kanıtlayabiliriz. Ondan sonra Bölüm 1'deki gibi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ yapılarını elde edebiliriz.

Doğal sayılar, *sonlu ordinallerdir.* Sonsuz ordinaller de vardır. Ordinallerin aksiyomlarını kullanarak toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayayıp özelliklerini kanıtlayacağız. Ondan sonra küme aksiyomlarını kullanarak ordinalleri inşa edeceğiz. Bu şekilde bildiğimiz tüm matematik, küme aksiyomları tarafından gerektirilir.

3. Ordinal Sayılar

3.1. Ordinaller

Eğer bir sınıfın her elemanı bir altküme ise, o zaman sınıf **geçişlidir.** Eğer $\boldsymbol{A}$ geçişli ise, o zaman

$$c \in b \wedge b \in \boldsymbol{A} \Rightarrow c \in \boldsymbol{A}.$$

Örneğin
- Teorem 7'ye göre ω geçişlidir;
- Teorem 8'e göre ω'nın her elemanı da geçişlidir.

Tanıma göre
1) geçişli olan
2) $\in$ tarafından iyisıralanmış olan

bir küme bir **ordinal sayıdır.**
- Teorem 11 sayesinde ω'nın her elemanı bir ordinaldir;
- teoremin sonucu sayesinde ω bir ordinaldir.

Alıştırma VIII. Bulun
(a) $\in$ bağıntısının geçişli olduğu, geçişli olmayan bir küme;
(b) $\in$ bağıntısının geçişli olmadığı, geçişli olan bir küme.

Ordinaller

$$\mathbf{ON}$$

sınıfını oluştururlar. **ON**'nin elemanları her zaman küçük Yunan harfleri tarafından gösterilecektir. Özel olarak α, β, γ, δ, ve θ, sabit ordinaldirler, ama ξ, η, ve ζ, ordinal değişkendirler. Örnegin

$$\{\xi\colon \varphi(\xi)\} = \{x\colon x \in \mathbf{ON} \wedge \varphi(x)\}.$$

Teorem 13. ON *geçişlidir, dolayısıyla her ordinalin her elemanı bir ordinaldir.*

Kanıt. $\alpha \in \mathbf{ON}$ be $b \in \alpha$ olsun. O zaman $b \subseteq \alpha$, dolayısıyla α gibi b, $\in$ tarafından iyisıralanmıştır.

Şimdi $c \in b$ olsun. O zaman $c \in \alpha$, dolayısıyla $c \subseteq \alpha$. Özel olarak $d \in c$ ise $d \in \alpha$. Bu durumda d, c, ve b, α'nın elemanıdırlar; ayrıca $d \in c$ ve $c \in b$, dolayısıyla $d \in b$ çünkü α'da $\in$ geçişlidir. Sonuç olarak $c \subseteq b$. O halde b geçişlidir. □

Lemma 1. ON*, $\in$ tarafından sıralanmıştır.*

Kanıt. $\alpha \in \mathbf{ON}$ olsun. α'da $\in$ bağıntısı yansımasız olduğundan $\alpha \notin \alpha$, çünkü $\alpha \in \alpha$ ise α'nın bir β elemanı için $\beta \in \beta$.

Eğer $\beta \in \alpha$ ve $\gamma \in \beta$ ise, α geçişli olduğundan $\gamma \in \alpha$. □

Lemma 2. ON*'de $\in$ ve $\subset$ sıralamaları aynıdır.*

Kanıt. Kanıtın iki parçası vardır.

1. $\boxed{\boldsymbol{\alpha \in \beta \Rightarrow \alpha \subset \beta}\text{:}}$ $\alpha \in \beta$ olsun. β geçişli olduğundan $\alpha \subseteq \beta$. β'da $\in$ yansımasız olduğundan $\alpha \neq \beta$. Bu şekilde $\alpha \subset \beta$.

2. $\boxed{\boldsymbol{\alpha \subset \beta \Rightarrow \alpha \in \beta}\text{:}}$ $\alpha \subset \beta$ olsun. O zaman $\beta \smallsetminus \alpha$ kümesi boş değildir. $\gamma = \min(\beta \smallsetminus \alpha)$ olsun. O zaman $\gamma \in \beta$. Biz $\boxed{\boldsymbol{\gamma = \alpha}}$ kanıtlayacağız. Bu kanıtın iki parçası vardır.

   a) $\boxed{\boldsymbol{\gamma \subseteq \alpha}\text{:}}$ $\delta \in \gamma$ olsun. O zaman β geçişli olduğundan $\delta \in \beta$. Ayrıca $\delta \notin \beta \smallsetminus \alpha$, çünkü $\delta \in \min(\beta \smallsetminus \alpha)$. O halde $\delta \in \alpha$. Böylece $\gamma \subseteq \alpha$.

b) $\boxed{\boldsymbol{\alpha \subseteq \gamma}:}$ $\delta \in \alpha$ olsun. O zaman $\delta \in \beta$, çünkü $\alpha \subset \beta$, dolayısıyla $\delta \notin \beta \smallsetminus \alpha$. Ama $\delta \in \gamma$, $\delta = \gamma$, veya $\gamma \in \delta$; ve son iki imkân olmaz. Zira $\gamma \in \beta \smallsetminus \alpha$ olduğundan $\delta \neq \gamma$; ve $\gamma \notin \alpha$ olduğundan $\gamma \notin \delta$, çünkü $\delta \in \alpha$. Bu şekilde $\alpha \subseteq \gamma$. □

Teorem 14. *Her ordinalde $\in$ ve $\subset$ sıralamaları aynıdır.*

Alıştırma IX. Teoremi kanıtlayın.

Şimdi **ON**'nin ve her elemanının $\in$ veya $\subset$ sıralamasını $<$ olarak yazabiliriz.

Lemma 3. **ON**'*nin $<$ sıralaması doğrusaldır.*

Kanıt. $\alpha \nleqslant \beta$ olsun. $\boxed{\boldsymbol{\beta < \alpha}}$ göstereceğiz.

Varsayımdan $\alpha \nsubseteq \beta$, dolayısıyla $\alpha \smallsetminus \beta \neq \varnothing$. $\gamma = \min(\alpha \smallsetminus \beta)$ olsun. O zaman $\gamma \in \alpha$, yani $\gamma < \alpha$. $\boxed{\boldsymbol{\gamma = \beta}}$ göstereceğiz.

$\boxed{\boldsymbol{\gamma \subseteq \beta}:}$ $\delta \in \gamma$ olsun. O zaman $\delta < \min(\alpha \smallsetminus \beta)$, ama $\delta \in \alpha$, dolayısıyla $\delta \in \beta$.

$\boxed{\boldsymbol{\gamma \not\subset \beta}:}$ $\gamma \in \alpha \smallsetminus \beta$ olduğundan $\gamma \notin \beta$, yani $\gamma \not\subset \beta$. □

Teorem 15. **ON**'*nin $<$ doğrusal sıralaması bir iyisıralamadır. Aslında* **ON**'*nin boş olmayan her* altsınıfının *en küçük elemanı vardır.*

Kanıt. $\boldsymbol{A} \subseteq$ **ON** ve $\alpha \in \boldsymbol{A}$ olsun.

- $\alpha \cap \boldsymbol{A} = \varnothing$ ise $\alpha = \min(\boldsymbol{A})$.
- $\alpha \cap \boldsymbol{A} \neq \varnothing$ ise $\min(\alpha \cap \boldsymbol{A}) = \min(\boldsymbol{A})$. □

Teorem 16 (Burali-Forti Paradoksu)**.** **ON** *küme değildir.*

Kanıt. Şimdi Teorem 13 ve 15'ten **ON** hem geçişli hem $\in$ tarafından iyisıralanmıştır. Tanıma göre **ON**'nin elemanlarının aynı özellikleri vardır. Ama **ON** $\in$ tarafından sıralanmış olduğundan kendinin elemanı olamaz. Bu şekilde **ON** küme olamaz. □

Teorem 17.

1. *$\varnothing \in$ **ON**.*
2. *$\alpha \in$ **ON** ise $\alpha' \in$ **ON** ve ayrıca her β ordinali için*

$$\beta \leqslant \alpha \vee \alpha' \subseteq \beta.$$

Alıştırma X. Teoremi kanıtlayın.

Tanıma göre ne 0 ne bir ardıl olan bir ordinal bir **limittir.** O zaman ω bir limittir ve (Teorem 6 sayesinde) en küçük limittir. Sonsuzluk Aksiyomu'nu kullanmadan ω, ne limit olan ne limit içeren ordinallerin oluşturduğu sınıf olarak tanımlanabilir.

Teorem 18. *Sıfır olmayan bir α ordinalinin limit olması için gerek ve yeter koşul,*

$$\beta < \alpha \Rightarrow \beta' < \alpha.$$

Alıştırma XI. Teoremi kanıtlayın.

AKSİYOM 6 (Bileşim)**.** *Her kümenin bileşimi bir kümedir.*

Teorem 19. **ON***'nın her altkümesinin en küçük üstsınırı vardır. Aslında $B \subset$ **ON** ise*

$$\sup B = \bigcup B.$$

Alıştırma XII. Teoremi kanıtlayın.

Şimdi Burali-Forti Paradoksu'nun (yani Teorem 16'nın) başka bir kanıtı vardır. Her ordinalin daha büyüğü olduğundan **ON**'nin en büyük elemanı yoktur, dolayısıyla **ON**'nin **ON**'de olan üstsınırı yoktur. **ON**'nin her altkümesinin üstsınırı olduğundan **ON**'nin kendisi küme olamaz.

3.2. Tümevarım ve Özyineleme

Teorem 20 (Ordinal Tümevarım)**.** $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbf{ON}$ *olsun. Eğer*

1) $0 \in \boldsymbol{A}$,

2) Her β *için*

$$\beta \in \boldsymbol{A} \Rightarrow \beta' \in \boldsymbol{A},$$

3) her γ *limiti için*

$$\gamma \subseteq \boldsymbol{A} \Rightarrow \gamma \in \boldsymbol{A} \tag{3.1}$$

ise, o zaman $\boldsymbol{A} = \mathbf{ON}$.

Kanıt. Verilen koşullar altında $\mathbf{ON} \smallsetminus \boldsymbol{A}$ farkının en küçük elemanı olamaz. Zira mümkümse $\alpha = \min(\mathbf{ON} \smallsetminus \boldsymbol{A})$ olsun.

1. $\alpha = 0$ ise $\alpha \in \boldsymbol{A}$.

2. $\alpha = \beta'$ ise $\beta < \alpha$ olduğundan $\beta \in \boldsymbol{A}$, ama bu durumda $\beta' \in \boldsymbol{A}$, yani $\alpha \in \boldsymbol{A}$.

3. Varsayımımıza göre $\beta < \alpha$ ise $\beta \in \boldsymbol{A}$. Bu şekilde $\alpha \subseteq \boldsymbol{A}$. Eğer ayrıca α bir limit ise, o zaman (3.1) sayesinde α da $\boldsymbol{A}$'nın elemanı olmalıdır.

Bu şekilde her ordinal ya 0, ya bir ardıl, ya da bir limit olduğundan $\alpha \in \boldsymbol{A}$, ama $\alpha = \min(\mathbf{ON} \smallsetminus \boldsymbol{A})$ varsayımına göre $\alpha \notin \boldsymbol{A}$. Öyleyse varsayım imkânsızdır. $\mathbf{ON}$'nin her boş olmayan altkümesinin en küçük elemanı var olduğundan $\mathbf{ON} \smallsetminus \boldsymbol{A} = \varnothing$, dolayısıyla $\boldsymbol{A} = \mathbf{ON}$. □

Ordinal tümevarım ile Teorem 21'i, Teorem 23'ü, Teorem 27'yi, ve daha sonraki teoremler kanıtlayacağız. Ordinal tümevarım kullanılan bir kanıtın üç adımı vardır:

1) sıfır adımı,
2) ardıl adımı, ve
3) limit adımı.

Ayrıca kanıtta iki tümevarım hipotezi vardır. Ordinal Tümevarım Teoremini yazarken kullandığımız harflerde,

- ardıl adımının hipotezi, $\beta \in \boldsymbol{A}$;
- limit adımının hipotezi, $\gamma \subseteq \boldsymbol{A}$, yani

$$\forall \xi\ (\xi < \gamma \Rightarrow \xi \in \boldsymbol{A}).$$

Teorem 21 (Ordinal Özyineleme). *Varsayımlarımız,*

1) $\theta \in \mathbf{ON}$*,*
2) $\boldsymbol{F} \colon \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$.

O zaman bir ve tek bir $\boldsymbol{H}$ *ordinal işlemi için*

1) $\boldsymbol{H}(0) = \theta$*,*
2) her β *ordinali için* $\boldsymbol{H}(\beta') = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{H}(\beta))$*,*
3) her γ *limiti için* $\boldsymbol{H}(\gamma) = \sup\{\boldsymbol{H}(\xi) \colon \xi < \gamma\}$.

Kanıt. Her α için, tanım kümesi $\{\xi \colon \xi \leqslant \alpha\}$ olan bir ve tek bir h_α göndermesi için,

1) $h_\alpha(0) = \theta$,
2) $\beta < \alpha$ ise $h_\alpha(\beta') = \boldsymbol{F}(h_\alpha(\beta))$,
3) $\gamma \leqslant \alpha$ ve limit ise $h_\alpha(\gamma) = \sup\{h_\alpha(\xi) \colon \xi < \gamma\}$.

Bunu kanıtlamak için, ordinal tümevarım kullanacağız.

1. h_0, $h_0(0) = \theta$ ile tanımlanabilir ve tanımlanmalıdır. Yani $\alpha = 0$ durumunda iddia doğrudur.

2. Eğer $\alpha = \delta$ durumunda iddia doğru ise $h_{\delta'}$,

$$h_{\delta'}(\xi) = \begin{cases} h_\delta(\xi), & \xi \leqslant \delta \text{ durumunda,} \\ \boldsymbol{F}(h_\delta(\delta)), & \xi = \delta' \text{ durumunda} \end{cases}$$

kuralı tarafından tanımlanabilir. Ayrıca $h_{\delta'}$ bu şekilde tanımlanmalıdır, çünkü hipoteze göre

$$h_{\delta'} \restriction \{\xi \colon \xi \leqslant \delta\} = h_\delta$$

olmalıdır. Bundan dolayı $\alpha = \delta'$ durumunda iddia doğrudur.

3. Benzer şekilde bir δ için $\alpha < \delta$ durumlarında iddia doğru ise, o zaman $\alpha < \beta < \delta$ durumlarında $h_\alpha(\alpha) = h_\beta(\alpha)$. Eğer ayrıca δ bir limit ise, o zaman h_δ,

$$h_\delta(\xi) = \begin{cases} h_\xi(\xi), & \xi < \delta \text{ durumunda,} \\ \sup\{h_\xi(\xi)\colon \xi < \delta\}, & \xi = \delta \text{ durumunda} \end{cases}$$

kuralı tarafından tanımlanabilir ve tanımlanmalıdır, ve bu şekilde $\alpha = \delta$ durumunda iddia doğrudur.

Ordinal tümevarımımız bitti. Şimdi $\boldsymbol{H}(\xi) = h_\xi(\xi)$ tanımlanabilir ve tanımlanmalıdır. □

Bölümler 4, 5, ve 6'da ordinal özyinelemeyle ordinal toplama, çarpma, ve kuvvet alma işlemlerini tanımlayacağız.

3.3. Normal işlemler

Şimdi $\boldsymbol{F}$, herhangi tek-konumlu ordinal işlem olsun. Ordinal aksiyomarına göre $\{\boldsymbol{F}(\xi)\colon \xi < \alpha\}$ sınıfı her zaman bir kümedir, ve bu kümenin üstsınırı vardır. Ayrıca ordinaller iyisıralanmış olduğundan $\{\boldsymbol{F}(\xi)\colon \xi < \alpha\}$ kümesinin üstsınırlarının en küçüğü vardır, yani kümenin **supremumu** vardır. Bu supremum,

$$\sup\{\boldsymbol{F}(\xi)\colon \xi < \alpha\}, \qquad\qquad \sup_{\xi<\alpha} \boldsymbol{F}(\xi)$$

şekillerinde yazılabilir.

Teorem 22. *Her α ordinali için*

$$\sup\{\xi\colon \xi < \alpha\} = \begin{cases} 0, & \alpha = 0 \textit{ durumunda,} \\ \beta, & \alpha = \beta' \textit{ durumunda,} \\ \alpha, & \alpha\textit{'nın limit olduğu durumda.} \end{cases}$$

Alıştırma XIII. Teoremi kanıtlayın.

Alıştırma XIV. $\{\xi' : \xi < \alpha\}$ kümesinin supremumunu hesaplayın.

Eğer

$$\alpha \leqslant \beta \Rightarrow \boldsymbol{F}(\alpha) \leqslant \boldsymbol{F}(\beta)$$

ise, o zaman $\boldsymbol{F}$ **artandır.** Eğer

$$\alpha < \beta \Rightarrow \boldsymbol{F}(\alpha) < \boldsymbol{F}(\beta) \tag{3.2}$$

ise, o zaman $\boldsymbol{F}$ **kesin artandır.** Eğer
1) $\boldsymbol{F}$ kesin artan ve
2) her α limiti için $\boldsymbol{F}(\alpha) = \sup\{\boldsymbol{F}(\xi) : \xi < \alpha\}$

ise, o zaman $\boldsymbol{F}$'ye **normal** densin.

Alıştırma XV. $\xi \mapsto \xi'$ işleminin kesin artan olup normal olmadığını gösterin.

Alıştırma XVI. Normal olan bir işlem örneği verin.

Sonraki teoremin ilk kullanımı, Teorem 28'in kanıtında olacaktır.

Teorem 23. $\boldsymbol{F} : \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$ *olsun. Eğer*
1) her α *için* $\boldsymbol{F}(\alpha) < \boldsymbol{F}(\alpha')$ *ve*
2) her α *limiti için* $\boldsymbol{F}(\alpha) = \sup\{\boldsymbol{F}(\xi) : \xi < \alpha\}$

ise, o zaman $\boldsymbol{F}$ *normaldir.*

Kanıt. $\boldsymbol{F}$'nin kesin artan olduğunu göstermek yeter. (3.2) gerektirmesini β üzerinden tümevarım kullanarak kanıtlayacağız.

1. $\beta = 0$ ise, (3.2) iddiası doğrudur, çünkü hiçbir zaman $\alpha < 0$ değildir.

2. $\beta = \gamma$ durumda (3.2) iddia doğru olsun. Eğer $\alpha < \gamma'$ ise, o zaman $\alpha \leqslant \gamma$, dolayısıyla

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}(\alpha) &\leqslant \boldsymbol{F}(\gamma) && \text{[tümevarım hipotezi]} \\ &< \boldsymbol{F}(\gamma'). && \text{[varsayım]} \end{aligned}$$

3. γ limit ve $\alpha < \gamma$ ise, o zaman $\alpha < \alpha' < \gamma$, dolayısıyla

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}(\alpha) &< \boldsymbol{F}(\alpha') && \text{[varsayım]} \\ &\leqslant \sup\{\boldsymbol{F}(\xi) \colon \xi < \gamma\} && \text{[supremumun tanımı]} \\ &= \boldsymbol{F}(\gamma). && \text{[varsayım]} \end{aligned}$$

(Bu adımda bir tümevarım hipotezi kullanılmıyor.) □

Sonraki teoremin ilk kullanımı, Teorem 29'un kanıtında olacaktır.

Teorem 24. $\boldsymbol{F} \colon \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$ *ve normal olsun. O zaman* **ON***'nin boş olmayan her A altkümesi için*

$$\boldsymbol{F}(\sup(A)) = \sup_{\xi \in A} \boldsymbol{F}(\xi). \tag{3.3}$$

Kanıt. A kümesinin supremumu α olsun. $\boldsymbol{F}$ kesin artan olduğundan $\beta \in A$ ise $\boldsymbol{F}(\beta) \leqslant \boldsymbol{F}(\alpha)$. Bundan dolayı, eğer $\alpha \in A$ ise, o zaman

$$\sup_{\xi \in A} \boldsymbol{F}(\xi) = F(\alpha),$$

yani (3.3) doğrudur. Şimdi $\alpha \notin A$ olsun. O zaman α ardıl olamaz. A boş olmadığından $\alpha = 0$ olamaz, dolayısıyla α limittir. Bu durumda $\boldsymbol{F}$ normal olduğundan

$$\boldsymbol{F}(\alpha) = \sup_{\xi < \alpha} \boldsymbol{F}(\xi). \tag{3.4}$$

Ayrıca
$$\sup_{\xi \in A} \boldsymbol{F}(\xi) \leqslant \sup_{\xi<\alpha} \boldsymbol{F}(\xi), \tag{3.5}$$
çünkü $A \subseteq \{\xi\colon \xi < \alpha\}$. Eğer $\beta < \alpha$ ise, A'nın bir γ elemanı için $\beta \leqslant \gamma < \alpha$, dolayısıyla $\boldsymbol{F}(\beta) \leqslant \boldsymbol{F}(\gamma) \leqslant \sup_{\xi \in A} \boldsymbol{F}(\xi)$. Bu şekilde
$$\sup_{\xi<\alpha} \boldsymbol{F}(\xi) \leqslant \sup_{\xi \in A} \boldsymbol{F}(\xi). \tag{3.6}$$
Sonuç olarak (3.4), (3.5), ve (3.6) beraber (3.3) eşitliğini tekrar gerektirir. □

3.4. Süreklilik

Normallik kavramının yerine gerçel analizden gelen süreklilik kavramını kullanabiliriz. Ordinallerde, kesin artan bir işlemin normal olması için gerek ve yeter bir koşul, işlemin sürekli olmasıdır. Bu sonuçu kurmak, bu altbölümün işidir.

Tekrar $\boldsymbol{F}\colon \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$ olsun. Varsa, $\boldsymbol{F}$'nin bir noktadaki sürekliliği gerçel analizdeki gibi tanımlanır. Aslında eğer
$$\beta < \boldsymbol{F}(\alpha) < \gamma$$
koşulunu sağlayan herhangi β ve γ için, bazı δ ve θ için,
$$\delta < \alpha < \theta \land \forall\xi\ (\delta < \xi < \theta \Rightarrow \beta < \boldsymbol{F}(\xi) < \gamma)$$
ise, o zaman $\boldsymbol{F}$, α'da **süreklidir.** Eğer $\boldsymbol{F}(\alpha) = 0$ veya $\alpha = 0$ ise, o zaman $\beta = -1$ veya $\delta = -1$ olabilir. Benzer şekilde **soldan** ve **sağdan** olan süreklilik tanımlanabilir.

Lemma 4. **ON**'*de her tek-konumlu işlem, limit olmayan her noktada süreklidir ve her noktada sağdan süreklidir.*

Alıştırma XVII. Lemmayı kanıtlayın.

Gerçel analizdeki gibi $\boldsymbol{F}\colon \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$ ise

$$\limsup_{\xi \to \alpha^-} \boldsymbol{F}(\xi) = \min \left\{ \sup_{\eta < \xi < \alpha} \boldsymbol{F}(\xi) \colon \eta < \alpha \right\}$$

tanımını yaparız.

Lemma 5. $\boldsymbol{F}\colon \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$ *ve artan ise*

$$\limsup_{\xi \to \alpha^-} \boldsymbol{F}(\xi) = \sup_{\xi < \alpha} \boldsymbol{F}(\xi).$$

Alıştırma XVIII. Lemmayı kanıtlayın.

Lemma 6. $\boldsymbol{F}\colon \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$ *olsun.* $\boldsymbol{F}$ *bir* α *limitinde süreklidir ancak ve ancak*

$$\limsup_{\xi \to \alpha^-} \boldsymbol{F}(\xi) = \boldsymbol{F}(\alpha).$$

Alıştırma XIX. Lemmayı kanıtlayın.

Teorem 25. $\boldsymbol{F}\colon \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$ *ve kesin artan olsun. O zaman* $\boldsymbol{F}$ *normaldir ancak ve ancak her noktada süreklidir.*

Alıştırma XX. Teoremi kanıtlayın.

Alıştırma XXI. Sürekli olup normal olmayan bir işlem örneği verin.

4. Ordinal toplama

4.1. Tanım ve özellikler

Özyineli tanıma göre her α ordinali için

$$\alpha + 0 = \alpha, \tag{4.1}$$
$$\alpha + \beta' = (\alpha + \beta)', \tag{4.2}$$
$$\gamma \text{ limit ise } \alpha + \gamma = \sup\{\alpha + \xi \colon \xi < \gamma\}. \tag{4.3}$$

Ordinal toplamanın özelliklerinin çoğu, tümevarım ile kanıtlanır; ama ilk teoremimiz, tümevarımdan değildir.

Teorem 26. $\alpha + 1 = \alpha'$.

Kanıt.
$$\begin{aligned} \alpha + 1 &= \alpha + 0' \\ &= (\alpha + 0)' && [(4.2) \text{ tanımından}] \\ &= \alpha'. && [(4.1) \text{ tanımından}] \end{aligned}$$
□

Teorem 27. *Her α için $0 + \alpha = \alpha$.*

Kanıt. Ordinal tümevarım kullanacağız.

1. Eğer $\alpha = 0$ ise

$$\begin{aligned} 0 + \alpha &= 0 + 0 && [\text{varsayımdan}] \\ &= 0 && [(4.1) \text{ tanımından}] \\ &= \alpha. && [\text{varsayımdan}] \end{aligned}$$

2. Eğer

$$0 + \beta = \beta \tag{4.4}$$

ise, o zaman

$$\begin{aligned} 0 + \beta' &= (0 + \beta)' && [(4.2) \text{ tanımından}] \\ &= \beta'. && [(4.4) \text{ hipotezinden}] \end{aligned}$$

3. Bir α limiti için

$$\forall \xi \ (\xi < \alpha \Rightarrow 0 + \xi = \xi) \tag{4.5}$$

ise, o zaman

$$\begin{aligned} 0 + \alpha &= \sup\{0 + \xi \colon \xi < \alpha\} && [(4.3) \text{ tanımından}] \\ &= \sup\{\xi \colon \xi < \alpha\} && [(4.5) \text{ hipotezinden}] \\ &= \alpha. && [\text{Teorem 22'den}] \end{aligned}$$

□

Alıştırma XXII. Aşağıdaki kanıt nerede yanlıştır?

Her α için $1 + \alpha = \alpha'$ kanıtlayacağız.

1. $1 + 0 = 1 = 0'$.
2. $1 + \beta = \beta'$ ise, o zaman

$$1 + \beta' = (1 + \beta)' = (\beta')'.$$

3. γ limit ve $\forall \xi \ (\xi < \gamma \Rightarrow 1 + \xi = \xi')$ ise

$$1 + \gamma = \sup_{\xi < \gamma}(1 + \xi) = \sup_{\xi < \gamma}(\xi') = \gamma'.$$

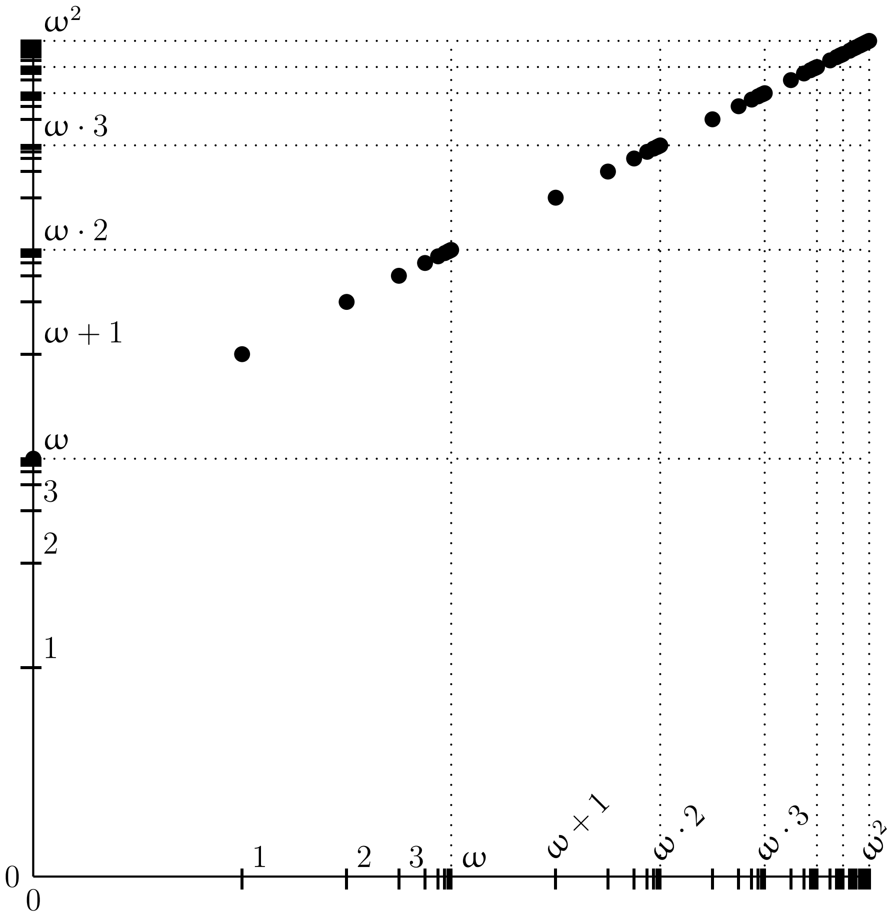
Böylece her α için $1 + \alpha = \alpha'$.

Teorem 28. *Her α ordinali için $\xi \mapsto \alpha + \xi$ normaldir.*

Kanıt. Teorem 23'ten $\alpha + \beta < \alpha + \beta'$ göstermek yeter. Ayrıca

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &< (\alpha + \beta)' \\ &= \alpha + \beta'. && [(4.2) \text{ tanımından}] \end{aligned}$$

□



Şekil 2.: $\eta = \omega + \xi$ denkleminin grafiği

Örneğin Şekil 2'ye bakın. Şekilde

$$\omega \cdot 2 = \omega + \omega, \quad \omega \cdot 3 = \omega \cdot 2 + \omega, \quad \omega \cdot 4 = \omega \cdot 3 + \omega,$$

ve genelde, Teorem 12'yi kullanan resmi özyineli tanıma göre,

$$\alpha \cdot 0 = 0, \qquad \alpha \cdot 1 = \alpha, \qquad \alpha \cdot (k+1) = \alpha \cdot k + \alpha.$$

Bu şekilde $\alpha \cdot n$, "α'dır n kere" veya "α'nın n katıdır." Ayrıca

$$\omega^2 = \omega \cdot \omega = \sup_{x<\omega}(\omega \cdot x).$$

Alıştırma XXIII. $\xi \mapsto \xi \cdot 2$ göndermesi kesin artan mıdır? Sürekli midir?

Alıştırma XXIV. Aşağıdaki kanıt nerede yanlıştır?

Her α için, her β için, $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ kanıtlayacağız.
1. $\alpha + 0 = \alpha = 0 + \alpha$.
2. Eğer $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ ise, o zaman

$$\alpha + \beta' = (\alpha + \beta)' = (\beta + \alpha)' = \beta' + \alpha.$$

3. Eğer γ limit ve $\forall \xi\ (\xi < \gamma \Rightarrow \alpha + \xi = \xi + \alpha)$ ise, o zaman

$$\alpha + \gamma = \sup_{\xi<\gamma}(\alpha + \xi) = \sup_{\xi<\gamma}(\xi + \alpha) = \gamma + \alpha.$$

Bu şekilde her durumda $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

Teorem 29. *Ordinal toplama birleşmelidir.*

Kanıt. Her γ için, tümevarım kullanarak tüm α ve β için

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

göstereceğiz.

1. $\alpha + (\beta + 0) = \alpha + \beta$ [(4.1) tanımından]
$= (\alpha + \beta) + 0.$ [(4.1) tanımından]

2. Eğer

$$\alpha + (\beta + \delta) = (\alpha + \beta) + \delta \tag{4.6}$$

ise, o zaman

$$\begin{aligned}
\alpha + (\beta + \delta') &= \alpha + (\beta + \delta)' && [(4.2) \text{ tanımından}]\\
&= (\alpha + (\beta + \delta))' && [(4.2) \text{ tanımından}]\\
&= ((\alpha + \beta) + \delta)' && [(4.6) \text{ hipotezinden}]\\
&= (\alpha + \beta) + \delta'. && [(4.2) \text{ tanımından}]
\end{aligned}$$

3. δ limit olsun, ve

$$\forall\xi\ \big(\xi < \delta \Rightarrow \alpha + (\beta + \xi) = (\alpha + \beta) + \xi\big) \tag{4.7}$$

olsun. O zaman

$$\begin{aligned}
&(\alpha + \beta) + \delta\\
&= \sup\{(\alpha + \beta) + \xi : \xi < \delta\} && [(4.3) \text{ tanımı}]\\
&= \sup\{\alpha + (\beta + \xi) : \xi < \delta\} && [(4.7) \text{ hipotezi}]\\
&= \alpha + \sup\{\beta + \xi : \xi < \delta\} && [\xi \mapsto \alpha + \xi \text{ normaldir}]\\
&= \alpha + (\beta + \delta). && [(4.3) \text{ tanımı}] \qquad \square
\end{aligned}$$

Şimdi herhangi n sayma sayısı için

$$\alpha \cdot n = \underbrace{\alpha + \cdots + \alpha}_{n}$$

anlaşılabilir.

Teorem 30. *$k < \omega$ ve $\ell < \omega$ ise $\alpha \cdot (k + \ell) = \alpha \cdot k + \alpha \cdot \ell$.*

Alıştırma XXV. Teoremi kanıtlayın. (Tümevarım kullanın.)

Teorem 31. *Her $\xi \mapsto \xi + \alpha$ göndermesi artandır.*

Kanıt. $\beta \leqslant \gamma$ olsun. α üzerinden tümevarım kullanarak

$$\beta + \alpha \leqslant \gamma + \alpha$$

kanıtlayacağız.

1. $\beta + 0 = \beta \leqslant \gamma = \gamma + 0$.
2. $\beta + \alpha = \gamma + \alpha$ ise tabii ki

$$\beta + \alpha' = (\beta + \alpha)' = (\gamma + \alpha)' = \gamma + \alpha'.$$

$\beta + \alpha < \gamma + \alpha$ ise, Teorem 18'e göre

$$\beta + \alpha' = (\beta + \alpha)' \leqslant \gamma + \alpha < (\gamma + \alpha)' = \gamma + \alpha'.$$

3. Eğer δ limit ise

$$\forall \xi \; (\xi < \delta \Rightarrow \beta + \xi < \gamma + \xi)$$

olsun. O zaman

$$\beta + \delta = \sup_{\xi<\delta}(\beta + \xi) \leqslant \sup_{\xi<\delta}(\gamma + \xi) = \gamma + \delta. \qquad \square$$

4.2. Hesaplamalar

Bu altbölümün teoremleri tümevarım kullanmaz.

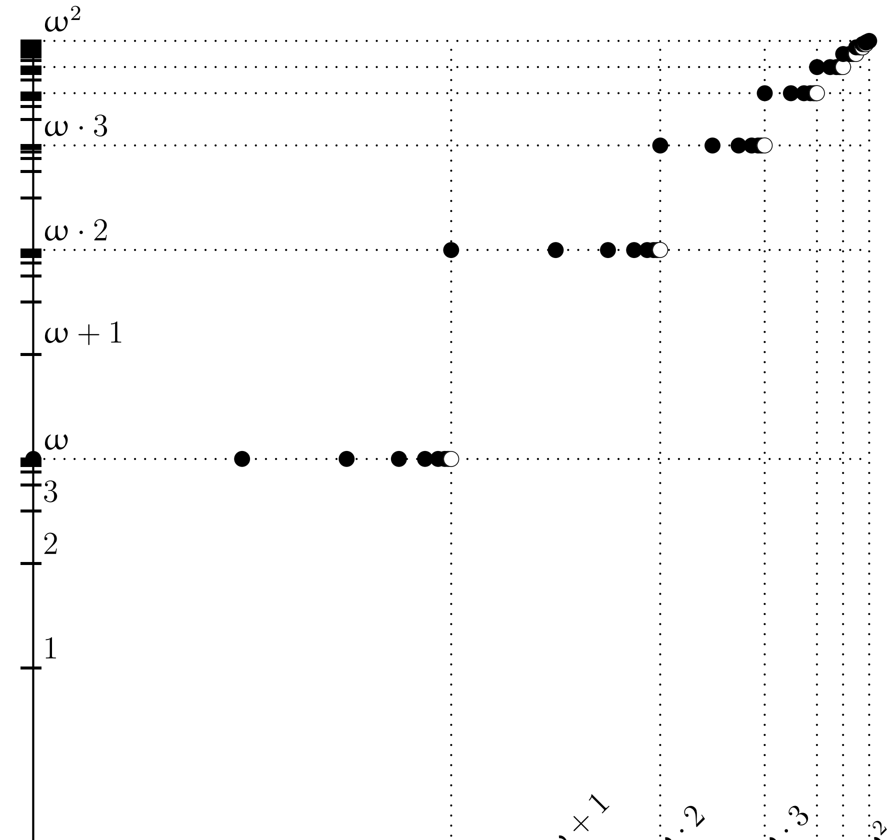
Teorem 32. *$k < \omega$ ise $k + \omega = \omega$. (Şekil 3'e bakın.)*

Kanıt. $k + \omega = \sup\{k + x \colon x < \omega\} = \omega$. $\square$

Sonuç. *$k < \omega$ ve $1 \leqslant n < \omega$ ise*

$$k + \omega \cdot n = \omega \cdot n.$$

Alıştırma XXVI. Sonucu kanıtlayın.



Şekil 3.: $\eta = \xi + \omega$ denkleminin grafiği

Teorem 33 (Çıkarma). *$\alpha \leqslant \beta$ ise*

$$\alpha + \xi = \beta \tag{4.8}$$

denkleminin bir ve tek bir çözümü vardır.

Kanıt. Denklemin çözümü varsa, Teorem 28'e göre tek çözüm vardır.

Teoremler 27 ve 31'den $\alpha + \beta \geqslant \beta$, dolayısıyla $\{\xi\colon \alpha + \xi \leqslant \beta\}$ sınıfının β' üstsınırı vardır. Şimdi γ, sınıfının supremumu olsun. O zaman

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma &= \alpha + \sup\{\xi\colon \alpha + \xi \leqslant \beta\} \\ &= \sup\{\alpha + \xi\colon \alpha + \xi \leqslant \beta\} \leqslant \beta, \\ (\alpha + \gamma)' &= \alpha + \gamma' > \beta, \end{aligned}$$

dolayısıyla $\alpha + \gamma = \beta$. □

Alıştırma XXVII. $\alpha \leqslant \beta$ varsayınca, $\{\xi\colon a + \xi \geqslant \beta\}$ sınıfının boş olmayıp sınıfın en küçük elemanının (4.8) denkleminin çözümü olduğunu gösterin.

Teorem 34. *$\omega + \alpha = \alpha$ ancak ve ancak $\omega^2 \leqslant \alpha$.*

Kanıt.
$$\begin{aligned} \omega + \omega^2 &= \omega + \sup_{x<\omega}(\omega \cdot x) \\ &= \sup_{x<\omega}(\omega + \omega \cdot x) \\ &= \sup_{x<\omega}\bigl(\omega \cdot (1 + x)\bigr) \\ &= \omega^2. \end{aligned}$$

Eğer $\alpha \geqslant \omega^2$ ise, o zaman bir β için $\omega^2 + \beta = \alpha$, dolayısıyla

$$\omega + \alpha = \omega + \omega^2 + \beta = \omega^2 + \beta = \alpha.$$

Şimdi $\alpha < \omega^2$ olsun. O zaman bir k doğal sayısı için

$$\omega \cdot k \leqslant \alpha < \omega \cdot (k+1),$$
$$\omega \cdot (k+1) \leqslant \omega + \alpha,$$

dolayısıyla $\alpha < \omega + \alpha$. □

Teorem sayesinde $\omega \leqslant \alpha < \omega^2$ ise, o zaman bir α_1 için

$$\omega + \alpha_1 = \alpha, \qquad \alpha_1 < \alpha.$$

Eğer $\omega \leqslant \alpha_1$ ise, o zaman bir α_2 için

$$\omega + \alpha_2 = \alpha_1, \qquad \alpha_2 < \alpha_1,$$

ve saire. O zaman bir k için

$$\alpha = \underbrace{\omega + \cdots + \omega}_{k} + \alpha_k = \omega \cdot k + \alpha_k.$$

ON iyisıralı olduğundan bir k için $\alpha_k < \omega$. Bu şekilde

$$\{\xi \colon \xi < \omega^2\}$$

kümesinin her elemanı, $\omega \cdot k + \ell$ biçiminde yazılabilir. Verilen küme, toplama altında kapalıdır, ve toplama kuralı,

$$(\omega \cdot k + \ell) + (\omega \cdot m + n) = \omega \cdot (k + m) + n.$$

Alıştırma XXVIII. $\alpha = \omega \cdot 17 + 6$ ve $\beta = \omega \cdot 1000 + 5$ ise $\alpha + \beta$ toplamını hesaplayın.

4.3. Kardinaller

Şimdi herhangi A ve B kümeleri için

$$A \sqcup B = (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$$

olsun; bu bileşim, A ve B'nin **ayrık bileşimidir.** Bölüm 2'den

$$\alpha = \{\xi \colon \xi < \alpha\}$$

anlaşmasını kullanacağız.

Teorem 35. *$\alpha + \beta \approx \alpha \sqcup \beta$.*

Kanıt. Teorem 33'ten

$$\begin{cases} (\xi, 0) \mapsto \xi, \\ (\eta, 1) \mapsto \alpha + \eta \end{cases}$$

kuralı, $\alpha \sqcup \beta$ ayrık bileşiminden $\alpha + \beta$ kümesine giden bir eşleme tanımlar. □

Bir A kümesi bir ordinalle eşlenik olsun. Tanıma göre

$$\operatorname{kard}(A) = \min\bigl\{\xi \colon \xi \approx A\bigr\};$$

bu ordinal, A'nın **kardinalidir.** Kardinaller, κ, λ, μ, ve ν harfleri ile gösterilecektir.

Eğer $f \colon A \to B$ ve $C \subseteq A$ ise

$$f[C] = \{f(x) \colon x \in C\}$$

olsun. Eğer f birebir ise, o zaman A'nın B'ye bir **gömmesidir,** ve

$$A \approx f[A] \subseteq B.$$

Bu durumda
$$f\colon A \xrightarrow{\preccurlyeq} B$$
yazalım, ve öyle bir f gömmesi varsa
$$A \preccurlyeq B$$
yazalım.

Teorem 36 (Schröder–Bernstein)**.** *$A \preccurlyeq B$ ve $B \preccurlyeq A$ ise*
$$A \approx B.$$

Kanıt. $f\colon A \xrightarrow{\preccurlyeq} B$ ve $g\colon B \xrightarrow{\preccurlyeq} A$ olsun. Özyinelemeyle
$$\begin{aligned} A_0 &= A, & A_{n+1} &= g[B_n], \\ B_0 &= B, & B_{n+1} &= f[A_n] \end{aligned}$$
olsun. O zaman
$$\begin{aligned} f[A_0 \smallsetminus A_1] &= B_1 \smallsetminus B_2, \\ g[B_0 \smallsetminus B_1] &= A_1 \smallsetminus A_2, \end{aligned}$$
dolayısıyla $A_0 \smallsetminus A_2 \approx B_0 \smallsetminus B_2$. Benzer şekilde
$$A_n \smallsetminus A_{n+2} \approx B_n \smallsetminus B_{n+2},$$
dolayısıyla
$$A \smallsetminus \bigcap_{i<\omega} A_i \approx B \smallsetminus \bigcap_{i<\omega} B_i.$$
Ayrıca
$$f\left[\bigcap_{i<\omega} A_i\right] = \bigcap_{i<\omega} f[A_i] = \bigcap_{0<i<\omega} B_i = \bigcap_{i<\omega} B_i,$$
dolayısıyla $\bigcap_{i<\omega} A_i \approx \bigcap_{i<\omega} B_i$, ve sonuç olarak $A \approx B$. □

Teorem 37. $\xi \mapsto \mathrm{kard}(\xi)$ *artandır.*

Kanıt. Eğer $\alpha \leqslant \beta$ ama $\mathrm{kard}(\beta) \leqslant \mathrm{kard}(\alpha)$ ise, o zaman

$$\alpha \preccurlyeq \beta \approx \mathrm{kard}(\beta) \preccurlyeq \mathrm{kard}(\alpha) \approx \alpha,$$

dolayısıyla $\alpha \approx \beta$. □

Teorem 38. $k < \omega$ *ise* $\mathrm{kard}(k) = k$.

Alıştırma XXIX. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 39. $\mathrm{kard}(\omega + \omega) = \omega$.

Alıştırma XXX. Teoremi kanıtlayın.

Sonuç. $\{\xi \colon \omega \leqslant \xi < \omega^2\}$ *kümesinin her elemanının kardinali* ω*'dır.*

Alıştırma XXXI. Sonucu kanıtlayın.

5. Ordinal çarpma

5.1. Tanım ve özellikler

Özyineli tanıma göre her α için

$$\alpha \cdot 0 = 0,$$
$$\alpha \cdot \beta' = \alpha \cdot \beta + \alpha,$$
$$\gamma \text{ limit ise } \alpha \cdot \gamma = \sup\{\alpha \cdot \xi \colon \xi < \gamma\}.$$

Ordinal çarpma hakkında ilk teoremimizin bir şıkkı tümevarım kullanmaz; kalanlar tümevarım kullanıyor.

Teorem 40.
1. $\alpha \cdot 1 = \alpha$.
2. $1 \cdot \alpha = \alpha$.
3. $0 \cdot \alpha = 0$.

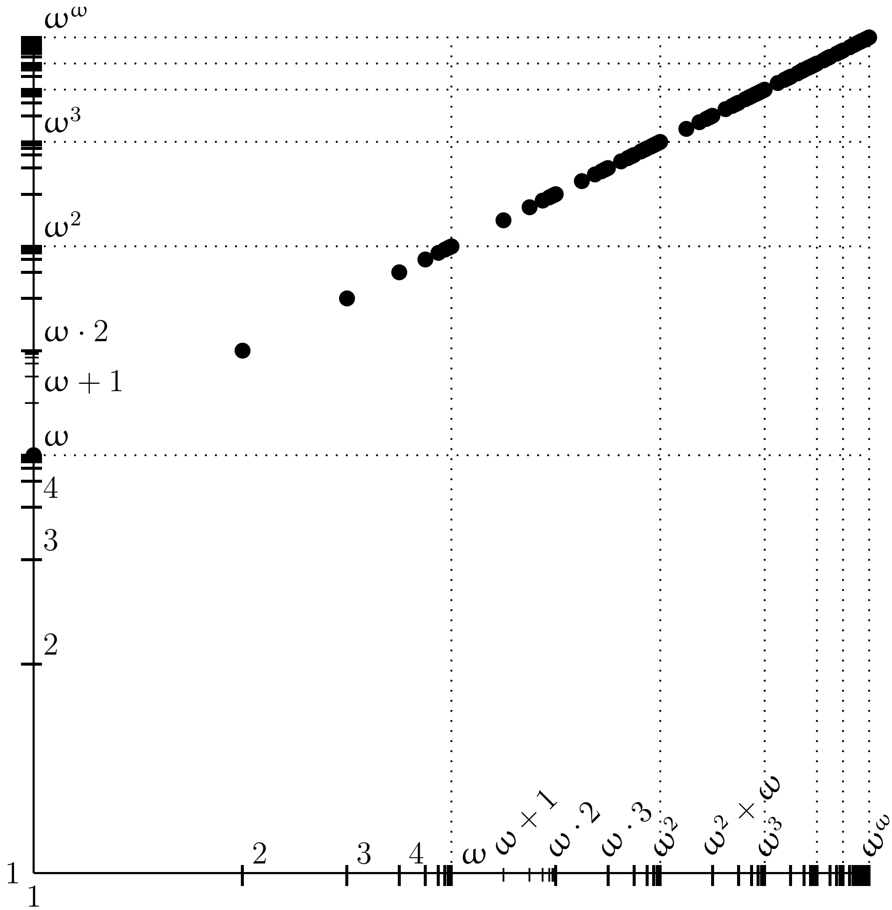
Alıştırma XXXII. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 41. $\alpha \geqslant 1$ *ise* $\xi \mapsto \alpha \cdot \xi$ *işlemi normaldir.*

Alıştırma XXXIII. Teoremi kanıtlayın.

Örneğin Şekil 4'e bakın. Şekilde

$$\omega^2 = \omega \cdot \omega, \qquad \omega^3 = \omega^2 \cdot \omega, \qquad \omega^4 = \omega^3 \cdot \omega,$$



Şekil 4.: $\eta = \omega \cdot \xi$ denkleminin grafiği

ve genelde, Teorem 12'yi kullanan resmi özyineli tanıma göre,

$$\alpha^0 = 1, \qquad \alpha^1 = \alpha, \qquad \alpha^{k+1} = \alpha^k \cdot \alpha.$$

Ayrıca

$$\omega^\omega = \sup_{x<\omega}(\omega^x).$$

Alıştırma XXXIV. $\xi \mapsto \xi^2$ göndermesi kesin artan mıdır? Sürekli midir?

Teorem 42. *Ordinal çarpma, toplama üzerine soldan dağılır.*

Kanıt. Ordinal tümevarım ile

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma \tag{5.1}$$

kanıtlayacağız.

1. $\alpha \cdot (\beta + 0) = \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta + 0 = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot 0.$
2. Eğer (5.1) doğru ise, o zaman

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (\beta + \gamma') &= \alpha \cdot (\beta + \gamma)' \\ &= \alpha \cdot (\beta + \gamma) + \alpha \\ &= (\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma) + \alpha \\ &= \alpha \cdot \beta + (\alpha \cdot \gamma + \alpha) \\ &= \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma'. \end{aligned}$$

3. Şimdi γ limit ve

$$\forall \xi \ (\xi < \gamma \Rightarrow \alpha \cdot (\beta + \xi) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \xi)$$

olsun. Eğer $\alpha = 0$ ise, iddia apaçıktır, dolayısıyla $\alpha > 0$ varsayacağız.

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \sup_{\xi<\gamma}(\beta + \xi) \qquad \text{[tanım]}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{\xi<\gamma}\bigl(\alpha\cdot(\beta+\xi)\bigr) && [\eta\mapsto\alpha\cdot\eta \text{ normaldir}]\\
&= \sup_{\xi<\gamma}(\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\xi) && [\text{tümevarım hipotezi}]\\
&= \alpha\cdot\beta+\sup_{\xi<\gamma}(\alpha\cdot\xi) && [\eta\mapsto\alpha\cdot\beta+\eta \text{ normaldir}]\\
&= \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma. && [\text{tanım}]
\end{aligned}
$$

□

Alıştırma XXXV. Aşağıdaki kanıt nerede yanlıştır?

1. $0\cdot(\beta+\gamma)=0=0+0=0\cdot\beta+0\cdot\gamma.$
2. Eğer (5.1) doğru ise, o zaman

$$
\begin{aligned}
\alpha'\cdot(\beta+\gamma) &= \alpha\cdot(\beta+\gamma)+(\beta+\gamma)\\
&= (\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma)+(\beta+\gamma)\\
&= (\alpha\cdot\beta+\beta)+(\alpha\cdot\gamma+\gamma)\\
&= \alpha'\cdot\beta+\alpha'\cdot\gamma.
\end{aligned}
$$

3. Eğer α limit ve $\forall\xi\ \bigl(\xi<\alpha\Rightarrow\xi\cdot(\beta+\gamma)=\xi\cdot\beta+\xi\cdot\gamma\bigr)$ ise

$$
\begin{aligned}
\alpha\cdot(\beta+\gamma) &= \sup_{\xi<\alpha}\bigl(\xi\cdot(\beta+\gamma)\bigr)\\
&= \sup_{\xi<\alpha}\bigl(\xi\cdot\beta+\xi\cdot\gamma\bigr)\\
&= \sup_{\xi<\alpha}(\xi\cdot\beta)+\sup_{\xi<\alpha}(\xi\cdot\gamma)\\
&= \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma.
\end{aligned}
$$

Alıştırma XXXVI. Aşağıdaki kanıt nerede yanlıştır?

1. $(\alpha+\beta)\cdot0=0=0+0=\alpha\cdot0+\beta\cdot0.$
2. Eğer $(\alpha+\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma$ ise, o zaman

$$
\begin{aligned}
(\alpha+\beta)\cdot\gamma' &= (\alpha+\beta)\cdot\gamma+(\alpha+\beta)\\
&= (\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma)+(\alpha+\beta)\\
&= (\alpha\cdot\gamma+\alpha)+(\beta\cdot\gamma+\beta)\\
&= \alpha\cdot\gamma'+\beta\cdot\gamma'.
\end{aligned}
$$

3. Eğer γ limit ve $\forall\xi\ \big(\xi < \gamma \Rightarrow (\alpha+\beta)\cdot\xi = \alpha\cdot\xi + \beta\cdot\xi\big)$ ise

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\cdot\gamma &= \sup_{\xi<\gamma}\big((\alpha+\beta)\cdot\xi\big)\\ &= \sup_{\xi<\gamma}(\alpha\cdot\xi+\beta\cdot\xi)\\ &= \sup_{\xi<\gamma}(\alpha\cdot\xi)+\sup_{\xi<\gamma}(\beta\cdot\xi)\\ &= \alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma.\end{aligned}$$

Teorem 43. *Ordinal çarpma birleşmelidir.*

Alıştırma XXXVII. Teoremi kanıtlayın.

Şimdi herhangi n sayma sayısı için

$$\alpha^n = \underbrace{\alpha\cdots\alpha}_{n}$$

anlaşılabilir.

Teorem 44. *$k < \omega$ ve $\ell < \omega$ ise $\alpha^{k+\ell} = \alpha^k\cdot\alpha^\ell$.*

Alıştırma XXXVIII. Teoremi kanıtlayın. (Tümevarım kullanın.)

Teorem 45. *Her $\xi \mapsto \xi\cdot\alpha$ işlemi artandır.*

Alıştırma XXXIX. Teoremi kanıtlayın.

5.2. Hesaplamalar

Lemma 7. *$0 < \ell < \omega$ ise $1 + \omega^\ell = \omega^\ell$.*

Alıştırma XL. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 46. *$k < m < \omega$ ise $\omega^k + \omega^m = \omega^m$.*

Kanıt. Bir ℓ için, $k + \ell = m$ ve $0 < \ell < \omega$, dolayısıyla

$$\begin{aligned}\omega^k + \omega^m &= \omega^k + \omega^{k+\ell}\\ &= \omega^k + \omega^k \cdot \omega^\ell\\ &= \omega^k \cdot (1 + \omega^\ell)\\ &= \omega^k \cdot \omega^\ell\\ &= \omega^{k+\ell}\\ &= \omega^m.\end{aligned}$$ □

Teorem 47. $1 \leqslant k < \omega$ *ise* $k \cdot \omega = \omega$. *(Şekil 5'e bakın.)*

Alıştırma XLI. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 48 (Bölme)**.** $1 \leqslant \alpha$ *ise* (ξ, η) *için*

$$\alpha \cdot \eta + \xi = \beta \wedge \xi < \alpha \tag{5.2}$$

sisteminin bir ve tek bir çözümü vardır.

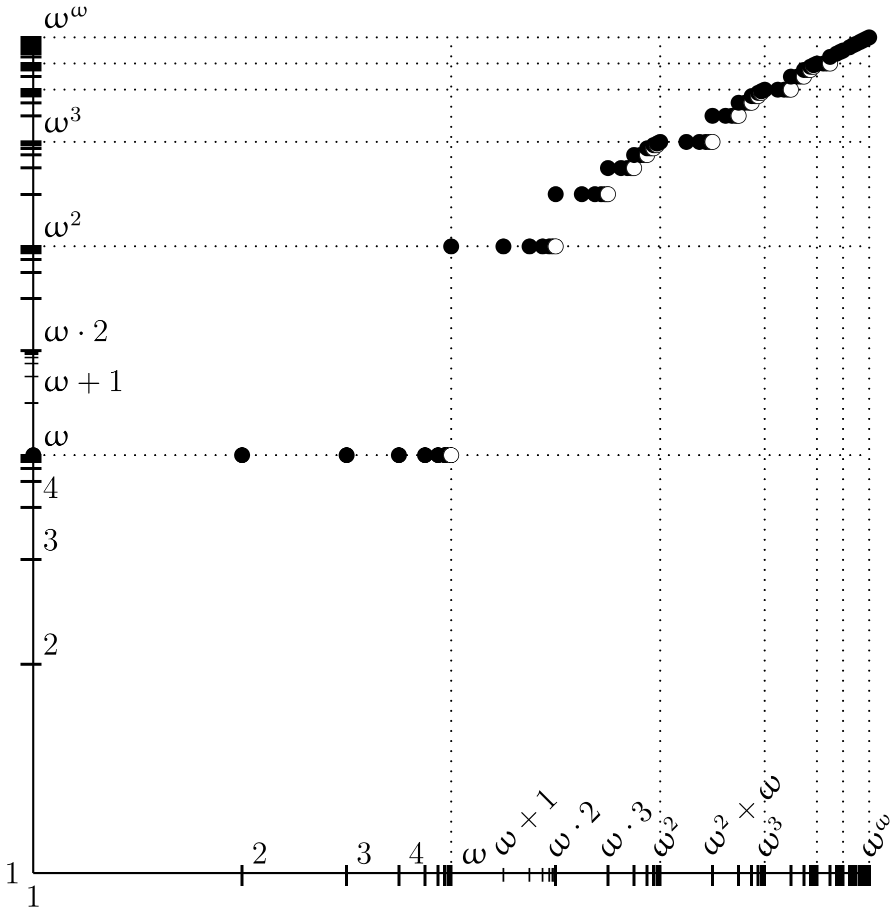
Alıştırma XLII. Teoremi kanıtlayın. Örneğin, aşağıdaki iddiaları gösterin.

1. $\alpha > 0$ ise $\alpha \cdot \beta \geqslant \beta$.
2. $\{\eta\colon \alpha \cdot \eta \leqslant \beta\}$ kümesinin üstsınırı vardır.
3. $\sup\{\eta\colon \alpha \cdot \eta \leqslant \beta\} = \delta$ olsun. O zaman $\alpha \cdot \gamma + \xi = \beta$ denkleminin γ çözümü vardır, ve $\delta < \alpha$. Ayrıca (γ, δ), (5.2) sisteminin tek çözümü vardır.

Teorem 49. ω^ω,

$$\omega \cdot \xi = \xi$$

denkleminin en küçük çözümüdür.



Şekil 5.: $\eta = \xi \cdot \omega$ denkleminin grafiği

Kanıt. $$\begin{aligned} \omega \cdot \omega^{\omega} &= \omega \cdot \sup_{x<\omega}(\omega^x) \\ &= \sup_{x<\omega}(\omega \cdot \omega^x) \\ &= \sup_{x<\omega}(\omega^{1+x}) \\ &= \omega^{\omega}. \end{aligned}$$

Şimdi $\alpha < \omega^{\omega}$ olsun. O zaman bir k doğal sayısı için

$$\omega^k \leqslant \alpha < \omega^{k+1},$$
$$\omega^{k+1} \leqslant \omega \cdot \alpha,$$

dolayısıyla $\alpha < \omega \cdot \alpha$. □

Teorem sayesinde $\alpha < \omega^{\omega}$ ise, o zaman bazı α_1 ve a_0 için

$$\omega \cdot \alpha_1 + a_0 = \alpha, \qquad \alpha_1 < \alpha, \qquad a_0 < \omega.$$

Eğer $\alpha_1 > 0$ ise, o zaman bazı α_2 ve a_1 için

$$\omega \cdot \alpha_2 + a_1 = \alpha_1, \qquad \alpha_2 < \alpha_1, \qquad a_1 < \omega,$$

ve saire. O zaman bir k için

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1} &= 0, \\ \alpha_k &= a_k, \\ \alpha_{k-1} &= \omega \cdot a_k + a_{k-1}, \\ \alpha_{k-2} &= \omega^2 \cdot a_k + \omega \cdot a_{k-1} + a_{k-2}, \\ &\dots \\ \alpha_1 &= \omega^{k-1} \cdot a_k + \omega^{k-2} \cdot a_{k-1} + \dots + \omega \cdot a_2 + a_1, \\ \alpha &= \omega^k \cdot a_k + \omega^{k-1} \cdot a_{k-1} + \dots + \omega^2 \cdot a_2 + \omega \cdot a_1 + a_0. \end{aligned}$$

Burada bazı a_i sıfır olabilir. Sıfır terimler silinirse, o zaman bir n için,

$$\omega > b_0 > b_1 > \dots > b_{n-1}$$

koşulunu sağlayan bazı b_i için, ve bazı c_i sayma sayıları için

$$\alpha = \omega^{b_0} \cdot c_0 + \omega^{b_1} \cdot c_1 + \cdots + \omega^{b_{n-1}} \cdot c_{n-1}.$$

Bu ifadeye α'nın **Cantor normal biçimi** denir. (0'ın Cantor normal biçimi 0'dır.)

Teorem 50. *$0 < m < \omega$ ve $\alpha < \omega^m$ ise $\alpha + \omega^m = \omega^m$.*

Kanıt. α'nın Cantor normal biçimini yazın ve Teorem 46'yı kullanın. □

Sonuç. *$m < \omega$, $n \in \mathbb{N}$ ve $k \in \mathbb{N}$ ise*

$$(\omega^m \cdot n + \alpha) \cdot k = \omega^m \cdot n \cdot k + \alpha.$$

Alıştırma XLIII. Sonucu kanıtlayın.

Örneğin

$$(\omega^5 \cdot 10 + \omega^3 \cdot 8 + \omega) \cdot 6 = \omega^5 \cdot 60 + \omega^3 \cdot 8 + \omega.$$

Sonucun durumunda aşağıdaki eşitlik çıkar.

$$\begin{aligned}(\omega^m \cdot n + \alpha) \cdot \omega &= \omega^m \cdot n + \underbrace{\alpha + \omega^m \cdot n}_{\omega^m \cdot n} + \underbrace{\alpha + \omega^m \cdot n}_{\omega^m \cdot n} + \cdots \\ &= \omega^m \cdot n \cdot \omega \\ &= \omega^{m+1}.\end{aligned}$$

Aslında eşitliğin gerçek kanıtının Teorem 50'ye ihtiyacı yoktur.

Teorem 51. *$m < \omega$, $n \in \mathbb{N}$ ve $\alpha < \omega^m$ ise*

$$(\omega^m \cdot n + \alpha) \cdot \omega = \omega^{m+1},$$

dolayısıyla $k \in \mathbb{N}$ ise

$$(\omega^m \cdot n + \alpha) \cdot \omega^k = \omega^{m+k}.$$

Kanıt. $(\omega^m \cdot n + \alpha) \cdot k < \omega^m \cdot (n+1) \cdot k$ olduğundan

$$\begin{aligned}\omega^{m+1} &\leqslant (\omega^m \cdot n + \alpha) \cdot \omega \\ &= \sup_{x<\omega}\bigl((\omega^m \cdot n + \alpha) \cdot x\bigr) \\ &\leqslant \sup_{x<\omega}\bigl(\omega^m \cdot (n+1) \cdot x\bigr) \\ &= \omega^{m+1}.\end{aligned}$$ □

Örneğin

$$\begin{aligned}&(\omega^3 \cdot 4 + \omega \cdot 6) \cdot (\omega^2 \cdot 3 + 8) \\ &= (\omega^3 \cdot 4 + \omega \cdot 6) \cdot \omega^2 \cdot 3 + (\omega^3 \cdot 4 + \omega \cdot 6) \cdot 8 \\ &= \omega^5 \cdot 3 + \omega^3 \cdot 32 + \omega \cdot 6.\end{aligned}$$

Alıştırma XLIV. $(\omega^9 \cdot 9 + \omega^2 \cdot 9 + \omega \cdot 9 + 9) \cdot (\omega^2 \cdot 9 + \omega \cdot 9 + 9)$ çarpımının Cantor normal biçimini hesaplayın.

5.3. Kardinaller

Teorem 52. $\alpha \cdot \beta \approx \alpha \times \beta$.

Kanıt. Teorem 48'den

$$(\xi, \eta) \mapsto \alpha \cdot \eta + \xi,$$

$\alpha \times \beta$ kartezyan çarpımından $\alpha \cdot \beta$ ordinal çarpımına giden bir eşlemedir. □

Teorem 53. $\operatorname{kard}(\omega \cdot \omega) = \omega$.

Alıştırma XLV. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 54. *$\{\xi\colon \omega \leqslant \xi < \omega^\omega\}$ kümesinin her elemanının kardinali ω'dır.*

Alıştırma XLVI. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 55. *Her k doğal sayısı için f_k bir A_k kümesini ω'ya gömsün. O zaman*

$$\bigcup_{i<\omega} A_i \preccurlyeq \omega.$$

Kanıt. $\bigcup_{i<\omega} A_i$ bileşiminde

$$g(x) = \min\{i\colon x \in A_i\}$$

olsun. O zaman $x \mapsto \big(g(x), f_{g(x)}(x)\big)$ göndermesi, bileşimin $\omega \times \omega$ çarpımına bir gömmesidir. □

Sonuç. $\omega^\omega \approx \omega$.

Kanıt. Her n için, $\omega^{n+1} = \omega^n \cdot \omega$ olduğundan, Teorem 52'nin kanıtınından kesin bir f_n için

$$f_n\colon \omega^{n+1} \xrightarrow{\approx} \omega^n \times \omega.$$

Şimdi $g\colon \omega \times \omega \xrightarrow{\approx} \omega$ olsun. O zaman

$$g \circ f_1\colon \omega^2 \xrightarrow{\approx} \omega.$$

Mümkünse

$$h_m\colon \omega^m \xrightarrow{\approx} \omega \tag{5·3}$$

olsun. O zaman bir ve tek bir h_{m+1} için,

$$h_{m+1}\colon \omega^{m+1} \to \omega,$$

$$\forall\xi\ \forall\eta\ \forall z\ \Big(f_n(\xi) = (\eta, z) \Rightarrow h_{m+1}(\xi) = g\big(h_m(\eta), z\big)\Big);$$

ve bu durumda

$$h_{m+1} \colon \omega^{m+1} \xrightarrow{\approx} \omega.$$

Tümevarım ve özyinelemeyle her m sayma sayısı için, bir ve tek bir h_m için, (5.3) doğrudur. Şimdi

$$\omega^\omega = \sup_{0<x<\omega} (\omega^x) = \bigcup_{0<x<\omega} \omega^x$$

olduğundan teoremi kullanılabilir. $\square$

6. Ordinal kuvvet alma

6.1. Tanım ve özellikler

Özyineli tanıma göre her α için

$$\alpha^0 = 1,$$
$$\alpha^{\beta'} = \alpha^\beta \cdot \alpha,$$
$$\gamma \text{ limit ise } \alpha^\gamma = \sup_{0<\xi<\gamma} (\alpha^\xi) = \lim_{\xi\to\gamma^-} \sup(\alpha^\xi).$$

Teorem 56. *$\alpha^1 = \alpha$, $1^\alpha = 1$, ve*

$$0^\alpha = \begin{cases} 1, & \alpha = 0 \text{ durumunda}, \\ 0, & \alpha > 0 \text{ durumunda}. \end{cases}$$

Alıştırma XLVII. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 57. *$\alpha \geqslant 2$ ise $\xi \mapsto \alpha^\xi$ işlemi, normaldir.*

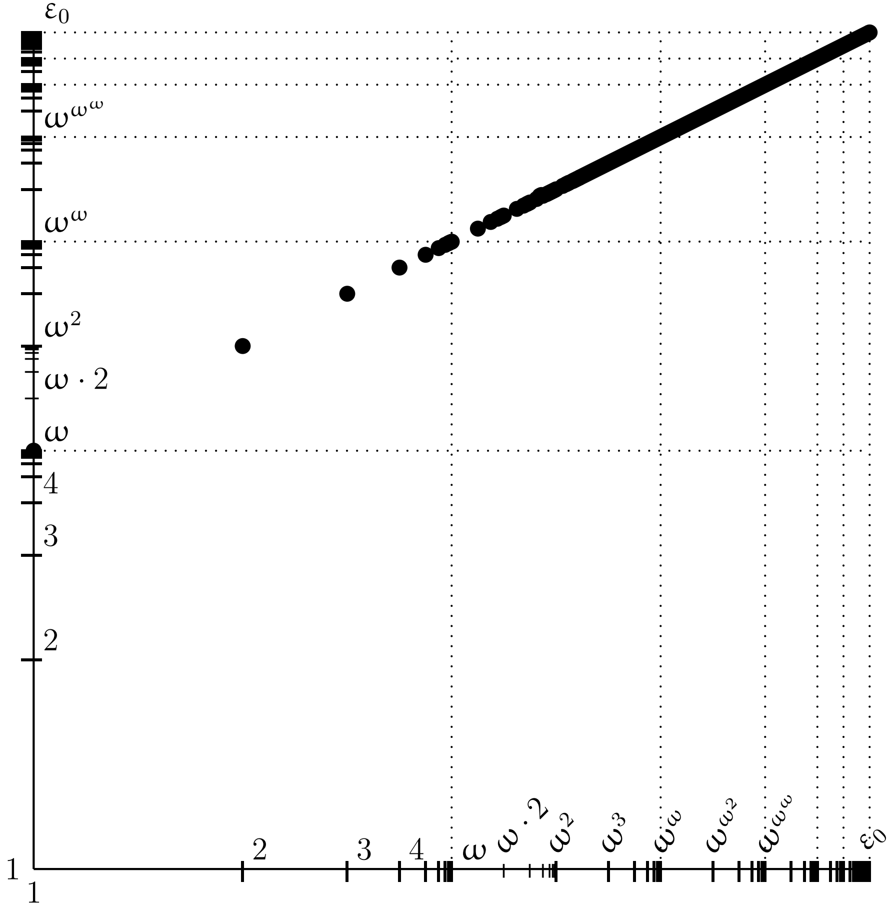
Alıştırma XLVIII. Teoremi kanıtlayın.

Şekil 6'ya bakın. Şekilde

$$\varepsilon_0 = \sup\left\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \dots\right\}.$$

Alıştırma XLIX. $\xi \mapsto \xi^\xi$ işlemi kesin artan mıdır? Sürekli midir?

Teorem 58. *$\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$ ve $\alpha^{\beta\cdot\gamma} = (\alpha^\beta)^\gamma$.*



Şekil 6.: $\eta = \omega^\xi$ denkleminin grafiği

Alıştırma L. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 59. *$\alpha \geqslant 1$ ise $\xi \mapsto \xi^\alpha$ artandır.*

Alıştırma LI. Teoremi kanıtlayın.

6.2. Hesaplamalar

Teorem 60 (Logaritma alma)**.** *$2 \leqslant \alpha$ ve $1 \leqslant \beta$ ise (ξ, η, ζ) için*

$$\alpha^\xi \cdot \eta + \zeta = \beta \land 0 < \eta < \alpha \land \zeta < \alpha^\xi$$

sisteminin bir ve tek bir çözümü vardır.

Alıştırma LII. Teoremi kanıtlayın.

Teorem sayesinde $1 \leqslant \alpha$ ise, bazı α_0, a_0, ve β_1 için

$$\omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \beta_1 = \alpha, \qquad 0 < a_0 < \omega, \qquad \beta_1 < \omega^{\alpha_0}.$$

Eğer $1 \leqslant \beta_1$ ise, o zaman bazı α_1, a_1, ve β_2 için

$$\omega^{\alpha_1} \cdot a_1 + \beta_2 = \beta_1, \qquad 0 < a_1 < \omega, \qquad \beta_2 < \omega^{\alpha_1},$$

ve saire. O zaman bir k için

$$\begin{gathered}\alpha_0 > \alpha_1 > \cdots > \alpha_k,\\ \{a_0, \ldots, a_k\} \subseteq \mathbb{N},\\ \alpha = \omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \omega^{\alpha_1} \cdot a_1 + \cdots + \omega^{\alpha_k} \cdot a_k.\end{gathered}$$

Son ifade, α'nın **Cantor normal biçimidir.**

Teorem 61. *$\alpha < \omega^\beta$ ise $\alpha + \omega^\beta = \omega^\beta$.*

Alıştırma LIII. Teoremi kanıtlayın. (Teorem 50'ye bakın.)

Sonuç. *$\alpha < \omega^\beta$, $n \in \mathbb{N}$, ve $k \in \mathbb{N}$ ise*

$$(\omega^\beta \cdot n + \alpha) \cdot k = \omega^\beta \cdot n \cdot k.$$

Alıştırma LIV. Sonucu kanıtlayın.

Teorem 62. *$\alpha < \omega^\beta$, $n \in \mathbb{N}$, ve $1 \leqslant \gamma$ ise*

$$(\omega^\beta \cdot n + \alpha) \cdot \omega^\gamma = \omega^{\beta+\gamma}.$$

Alıştırma LV. Teoremi kanıtlayın. (Bir δ için $\gamma = 1 + \delta$ olduğunu kullanabiliriz.)

Şimdi iki Cantor normal biçiminin çarpımının Cantor normal biçimini hesaplayabiliriz.

Teorem 63. *$0 < k < \omega$ ise*

$$k^{\omega^\xi} = \begin{cases} k, & \xi = 0 \text{ durumunda}, \\ \omega^{\omega^{\xi-1}}, & 0 < \xi < \omega \text{ durumunda}, \\ \omega^{\omega^\xi}, & \omega \leqslant \xi \text{ durumunda}. \end{cases}$$

Alıştırma LVI. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 64. *$\alpha < \omega^\beta$, $n \in \mathbb{N}$, ve γ limit ise*

$$(\omega^\beta \cdot n + \alpha)^\gamma = \omega^{\beta\cdot\gamma}.$$

Teorem 65. *ε_0,*

$$\omega^\xi = \xi$$

denkleminin en küçük çözümüdür.

Alıştırma LVII. Teoremi kanıtlayın.

6.3. Kardinaller

Herhangi α ve β ordinalleri için, β'dan α'ya giden göndermeler,

$$^{\beta}\alpha$$

sınıfını oluştursun, ve

$$\exp(\alpha,\beta) = \bigl\{f\colon f \in {}^{\beta}\alpha \wedge \{\xi \in \beta\colon f(\xi) > 0\} \prec \omega\bigr\}$$

olsun.

Teorem 66. $\alpha^{\beta} \approx \exp(\alpha,\beta)$.

Kanıt. $\exp(1,\beta) \approx 1 = 1^{\beta}$; ayrıca

$$\exp(0,\beta) \approx \begin{cases} 1, & \beta = 0 \text{ durumunda}, \\ 0, & \beta > 0 \text{ durumunda}, \end{cases}$$

dolayısıyla $\exp(0,\beta) \approx 0^{\beta}$. Şimdi $\alpha \geqslant 2$ olsun. Eğer $\gamma < \alpha^{\beta}$ ise, o zaman Cantor normal biçimi gibi, bazı n doğal sayısı için, bazı γ_i ve δ_i için,

$$\beta > \gamma_0 > \cdots > \gamma_{n-1},$$
$$\{\delta_i\colon i < n\} \subseteq \alpha \smallsetminus \{0\},$$
$$\gamma = \alpha^{\gamma_0} \cdot c_0 + \cdots + \alpha^{\gamma_{n-1}} \cdot c_{n-1}.$$

Şimdi tanıma göre

$$f_{\gamma}(\xi) = \begin{cases} \delta_i, & \xi = \gamma_i \text{ durumunda}, \\ 0, & \xi \in \beta \smallsetminus \{\gamma_i\colon i < n\} \text{ durumunda} \end{cases}$$

olsun. O zaman $f_{\gamma} \in \exp(\alpha,\beta)$. Asında

$$\xi \mapsto f_{\xi}\colon \alpha^{\beta} \xrightarrow{\approx} \exp(\alpha,\beta).$$ □

Teorem 67. $\varepsilon_0 \approx \omega$.

Alıştırma LVIII. Teoremi kanıtlayın.

7. Kardinal kuvvetler

7.1. Sayılamaz kümeler

Eğer $A \preccurlyeq \omega$ ise, o zaman A **sayılabilir;** diğer durumda A **sayılamaz.** Gördüğümüz gibi sayılabilir kümelerden ordinal toplama, çarpma, ve kuvvet alma ile sayılamaz kümeler elde edilemez.

Herhangi $\boldsymbol{A}$ sınıfı için

$$\mathscr{P}(\boldsymbol{A}),$$

$\boldsymbol{A}$'nın *altkümeleri* tarafından oluşturulmuş sınıftır. Yani

$$\mathscr{P}(\boldsymbol{A}) = \{X : X \subseteq \boldsymbol{A}\}.$$

Buradaki X siyah olmadığından *küme* değişkenidir. Küme olmayan bir sınıf, bir sınıfın elemanı olamaz. Eğer $\mathbf{V}$, tüm kümeler tarafından oluşturulmuş sınıf ise, o zaman

$$\mathscr{P}(\mathbf{V}) = \mathbf{V}.$$

Ama $n \in \omega$ ise

$$n < 2^n = \operatorname{kard}(\mathscr{P}(n)).$$

Teorem 68 (Cantor)**.** *Her A kümesi için*

$$A \prec \mathscr{P}(A).$$

Kanıt. $x \mapsto \{x\} \colon A \xrightarrow{\preccurlyeq} \mathscr{P}(A)$. Şimdi $f \colon A \xrightarrow{\preccurlyeq} \mathscr{P}(A)$ ise

$$B = \{x \in A \colon x \notin f(x)\}$$

olsun. O zaman A'nın her c elemanı için

$$c \in B \Leftrightarrow c \notin f(c),$$

dolayısıyla $B \neq f(c)$. Bu şekilde f, eşleme olamaz. □

Alıştırma LIX. Cantor Teoreminin kanıtı A'nın küme olduğunu nasıl kullanır?

AKSİYOM 7 (Kuvvet Küme)**.** *Her A kümesi için $\mathscr{P}(A)$ sınıfı bir kümedir.*

Herhangi a ve b için

$$(a, b) = \big\{\{a\}, \{a, b\}\big\}$$

olsun.

Teorem 69. $(a, b) = (c, d)$ *ancak ve ancak* $a = c$ *ve* $b = d$.

Alıştırma LX. Teoremi kanıtlayın.

Şimdi $A \times B = \{(x, y) \colon x \in A \wedge y \in B\}$ tanımlanabilir.

Teorem 70. $A \times B \subseteq \mathscr{P}(\mathscr{P}(A \cup B))$.

Alıştırma LXI. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 71 (Hartogs)**.** *Her kardinalin daha büyüğü vardır.*

Kanıt. $\boldsymbol{A} = \{\xi : \xi \preccurlyeq \kappa\}$ olsun. O zaman $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbf{ON}$, ve ayrıca $\boldsymbol{A}$ geçişlidir, dolayısıyla $\boldsymbol{A}$ bir kümeyse, bir α ordinalidir. Bu durumda $\alpha \notin \alpha$ olduğundan $\alpha > \kappa$.

Eğer f bir β'yı κ'ya gömürse, o zaman bir

$$\Big\{\big(f(\xi), f(\eta)\big) : \xi \leqslant \eta < \beta\Big\}$$

kümesi elde edilebilir. Bu şekilde elde edilen tüm kümeler, $\kappa \times \kappa$ çarpımının bir B altkümesini oluşturur. O halde $B \approx \boldsymbol{A}$ (neden?), dolayısıyla $\boldsymbol{A}$ da bir kümedir. □

Sonuç olarak

$$\kappa^+ = \min\{\xi : \kappa < \xi\}$$

tanımlanabilir, κ^+, κ'nın *kardinal* ardılıdır.

Şimdi özyineli tanıma göre

$$\aleph_0 = \omega,$$
$$\aleph_{\alpha'} = (\aleph_\alpha)^+,$$
$$\alpha \text{ limit ise } \aleph_\alpha = \sup_{\xi<\alpha} \aleph_\xi.$$

(Burada $\aleph$, İbrani *alef* harfidir.)

Teorem 72. *$\xi \mapsto \aleph_\xi$ normaldir, ve her sonsuz kardinal, bir α için, $\aleph_\alpha$'dır.*

Alıştırma LXII. Teoremi kanıtlayın.

Lemma 8. *Her sonsuz kardinal, ω'nın bir kuvvetidir.*

Alıştırma LXIII. Lemmayı kanıtlayın.

Tanıma göre

$$\kappa \oplus \lambda = \mathrm{kard}(\kappa \sqcup \lambda) = \mathrm{kard}(\kappa + \lambda),$$
$$\kappa \otimes \lambda = \mathrm{kard}(\kappa \times \lambda) = \mathrm{kard}(\kappa \cdot \lambda)$$

olsun; bunlar κ ve λ'nın **kardinal toplamı** ve **kardinal çarpımıdır.**

Teorem 73. *Eğer κ ve λ'nın biri sonsuz ise*

$$\kappa \oplus \lambda = \mathrm{maks}(\kappa, \lambda).$$

Eğer κ ve λ'nın biri sonsuz ise ve diğeri sıfır değilse

$$\kappa \otimes \lambda = \mathrm{maks}(\kappa, \lambda).$$

Kanıt. $\kappa \leqslant \lambda$ olsun. O zaman

$$\lambda \leqslant \kappa + \lambda \leqslant \lambda + \lambda \preccurlyeq 2 \cdot \lambda \leqslant \lambda \cdot \lambda,$$

ve $\kappa > 0$ ise

$$\lambda \leqslant \kappa \cdot \lambda \leqslant \lambda \cdot \lambda,$$

dolayısıyla $\lambda \approx \lambda^2$ kanıtlamak yeter.

Lemmadan bir α için $\lambda = \omega^\alpha$. O zaman $\lambda \approx \exp(\omega, \alpha)$. Şimdi $f \colon \omega \times \omega \xrightarrow{\approx} \omega$ olsun. Eğer g ve h, $\exp(\omega, \alpha)$ kümesinin elemanı ise $g * h$,

$$\xi \mapsto f(g(\xi), h(\xi))$$

elemanı olsun. O zaman

$$(g, h) \mapsto g * h \colon \exp(\omega, \alpha) \xrightarrow{\approx} \exp(\omega, \alpha) \times \exp(\omega, \alpha). \qquad \square$$

Sonuç olarak

$$\operatorname{kard}(\aleph_\alpha + \aleph_\beta) = \aleph_{\operatorname{maks}(\alpha,\beta)} = \operatorname{kard}(\aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta).$$

Şimdi herhangi A kümesi için

$$\mathscr{P}_\omega(A) = \{X \in \mathscr{P}(A)\colon \operatorname{kard}(X) < \omega\}$$

olsun.

Teorem 74. *Eğer κ sonsuz ise $\mathscr{P}_\omega(\kappa) \approx \kappa$.*

Kanıt. Her m için $\{\xi \in \kappa\colon \operatorname{kard}(\xi) = m\} \preccurlyeq \kappa^m \approx \kappa$, dolayısıyla

$$\mathscr{P}_\omega(\kappa) = \bigcup_{i\in\omega}\{\xi \in \kappa\colon \operatorname{kard}(\xi) = i\} \preccurlyeq \omega \times \kappa \approx \kappa. \qquad \square$$

Teorem 75. *Eğer β sonsuz ve $2 \leqslant \alpha \leqslant \beta$ ise*

$$\operatorname{kard}(\alpha^\beta) = \operatorname{kard}(\beta).$$

Eğer α sonsuz ve $1 \leqslant \beta \leqslant \alpha$ ise

$$\operatorname{kard}(\alpha^\beta) = \operatorname{kard}(\alpha).$$

Alıştırma LXIV. Teoremi kanıtlayın.

7.2. Seçme

Teorem 55'te, $\bigcup_{i<\omega} A_i$ bileşiminin sayılabilir olması için, her A_k kümesinin sayılabilir olması yetmez, ama A_k kümesinin ω'ya kesin bir gömmesi bilinmelidir. Her k için, A_k kümesinin

ω'ya gömmeleri, boş olmayan bir $\mathscr{B}_k$ kümesini oluşturabilirler; ama gördüğümüz aksiyomlarla

$$\forall x\ (x \in \omega \Rightarrow f_x \in \mathscr{B}_x)$$

koşulunu sağlayan $x \mapsto f_x$ göndermesinin olup olmadığını bilmiyoruz.

Gördüğümüz aksiyomlar, **Zermelo–Fraenkel** veya **ZF** aksiyomlarıdır.

Her k için $\mathscr{B}_k$ kümesinden bir f_k seçmek isteriz. *Seçim Aksiyomunun* biçimlerinin birine göre, bu seçme mümkündür. Bizim için, aşağıdaki biçim kullanılışlı olacaktır.

AKSİYOM 8 (Seçim)**.** *Her küme iyisıralanabilir.*

Örneğin $\bigcup_{x\in\omega} \mathscr{B}_x$ iyisıralanırsa, o zaman istediğimiz $x \mapsto f_x$ göndermesi

$$x \mapsto \min{(B_x)}$$

olabilir.

Gödel'in kanıtladığı teoreme göre, ZF aksiyomlarının bir *modelinde,* Seçim Aksiyomu doğrudur. Cohen'in kanıtladığı teoreme göre, ZF aksiyomlarının bir modelinde, Seçim Aksiyomu yanlıştır. Kısaca Seçim Aksiyomu, ZF'den bağımsızdır.

Seçim Aksiyomunu varsayıyoruz. Bununla ZF, **ZFC**'dir. Şimdi her kümenin kardinali vardır. Tanıma göre

$$\kappa^\lambda = \mathrm{kard}({}^\kappa\lambda).$$

Bu kuvvet, ordinal küvvet değil, **kardinal kuvvettir.** Orneğin $\aleph_0 = \omega$ olduğu halde $2^{\aleph_0}$, kardinal kuvvet olarak anlaşılır, ve bu kuvvet, 2^ω ordinal kuvvetinden farklıdır. Aslında $2^\omega = \omega$, ama sonraki teoreme göre $2^{\aleph_0} > \aleph_0$.

Teorem 76. $2^\kappa = \mathrm{kard}(\mathscr{P}(\kappa))$.

Alıştırma LXV. Teoremi kanıtlayın.

Aşağıdaki kurallar kolaydır.

$$0 < \lambda \Rightarrow 0^\lambda = 0, \qquad \kappa^{\lambda \oplus \mu} = \kappa^\lambda \otimes \kappa^\mu,$$
$$\kappa^0 = 1, \qquad \kappa^{\lambda \otimes \mu} = (\kappa^\lambda)^\mu,$$
$$1^\lambda = 1, \qquad \kappa \leqslant \mu \wedge \lambda \leqslant \nu \Rightarrow \kappa^\lambda \leqslant \mu^\nu.$$
$$\kappa^1 = \kappa,$$

Teorem 77. $2 \leqslant \kappa$, $1 \leqslant \lambda$, *ve* $\aleph_0 \leqslant \text{maks}\{\kappa, \lambda\}$ *olsun. O zaman*

$$\kappa \leqslant 2^\lambda \Rightarrow \kappa^\lambda = 2^\lambda, \tag{7.1}$$
$$\lambda \leqslant \kappa \Rightarrow \kappa^\lambda \leqslant 2^\kappa. \tag{7.2}$$

Kanıt. Hipoteze göre $\kappa \leqslant 2^\lambda$ ise $2 \leqslant \kappa \leqslant 2^\lambda$ ve λ sonsuzdur, dolayısıyla
$$2^\lambda \leqslant \kappa^\lambda \leqslant (2^\lambda)^\lambda = 2^{\lambda \otimes \lambda} = 2^\lambda.$$
Ayrıca $\lambda \leqslant \kappa$ ise κ sonsuzdur, dolayısıyla
$$\kappa \leqslant \kappa^\lambda \leqslant (2^\kappa)^\lambda = 2^{\kappa \otimes \lambda} = 2^\kappa. \qquad \square$$

Tekrar κ ve λ'n in biri sonsuz olsun. Eğer $\lambda \leqslant \kappa \leqslant 2^\lambda$ ise, o zaman (7.1) gerektirmesine göre
$$\kappa^\lambda = 2^\lambda \leqslant 2^\kappa;$$
burada (7.2) gerekmez. Bir durumda, eğer (7.1) gerektirmesinin hipotezi doğru değilse, o zaman $2^\lambda < \kappa$, dolayısıyla $\lambda \leqslant \kappa$, ve (7.2) kullanılabilir. Bu şekilde teoremin yerine
$$\kappa \leqslant 2^\lambda \Rightarrow \kappa^\lambda = 2^\lambda,$$
$$2^\lambda < \kappa \Rightarrow \kappa^\lambda \leqslant 2^\kappa.$$

kuralları kullanılabilir. (Tekrar $2 \leqslant \kappa$, $1 \leqslant \lambda$, ve $\aleph_0 \leqslant$ maks$\{\kappa, \lambda\}$ olmalıdır.) Örneğin

$$2 \leqslant \kappa \leqslant 2^{\aleph_0} \Rightarrow \kappa^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0},$$
$$2^{\aleph_0} < \kappa \Rightarrow \kappa^{\aleph_0} \leqslant 2^{\kappa}.$$

Şimdi aşağıdaki tanım yapabiliriz.

$$\beth_0 = \aleph_0,$$
$$\beth_{\alpha'} = \operatorname{kard}(\mathscr{P}(\beth_\alpha)) = 2^{\beth_\alpha},$$
$$\alpha \text{ limit ise } \beth_\alpha = \sup_{\xi<\alpha} \beth_\xi.$$

(Burada $\beth$, İbrani *beth* harfidir.) O zaman $\xi \mapsto \beth_\xi$ normaldir, ve

$$\aleph_\alpha \leqslant \beth_\alpha.$$

Teorem 78. *Tüm κ ve λ için*

$$2 \leqslant \kappa \leqslant \beth_{\alpha+1} \Rightarrow \kappa^{\beth_\alpha} = \beth_{\alpha+1},$$
$$1 \leqslant \lambda \leqslant \beth_\alpha \Rightarrow {\beth_{\alpha+1}}^{\lambda} = \beth_{\alpha+1}.$$

Alıştırma LXVI. Teoremi kanıtlayın.

Kontinuum Hipotezi veya **KH,** $\aleph_1 = \beth_1$ önermesidir. **Genelleştirilmiş Kontinuum Hipotezi** veya **GKH,** $\forall \xi\ \aleph_\xi = \beth_\xi$ önermesidir. Gödel'in kanıtladığı teoreme göre, ZFC aksiyomlarının bir modelinde, GKH doğrudur. Cohen'in kanıtladığı teoreme göre, ZFC aksiyomlarının bir modelinde, KH yanlıştır. Bu şekilde KH, ZFC'den bağımsızdır.

A. Harfler

Metinde simge olarak kullanılırken harfler aşağıdaki anlamlara gelir.

"Tahta siyahı" harfleri

$\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi

$\mathbb{Q}$ kesirli sayılar kümesi

$\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi

$\mathbb{N}$ $\{1, 2, 3, \ldots\}$ sayma sayılar kümesi

Küçük Latin harfleri

a, b, c, d, e sayılar veya kümeler

f, g, h kümede tanımlanmiş göndermeler

i, j doğal sayı değişkenler

k, ℓ, m, n doğal sayılar

p asal sayı

u, x, y, z sayı veya küme değişkenleri

Dikey küçük Latin harfleri

sup supremum

min minimum (en küçük)

maks maksimum (en büyük)

Büyük Latin harfleri

A, B, C, D kümeler

X, Y, Z küme değişkenleri

Kıvırcık Latin harfleri

$\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ elemanları küme veya gönderme olan kümeler

$\mathscr{P}(A)$ $\{X\colon X \subseteq A\}$

$\mathscr{P}_{\omega}(A)$ $\{X \in \mathscr{P}(A)\colon \operatorname{kard}(X) < \omega\}$

Büyük siyah Latin harfleri

$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ sınıflar

$\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{H}$ sınıfta tanımlanmış göndermeler

Dikey büyük siyah Latin harfleri

$\mathbf{V}$ evrensel sınıf

$\mathbf{ON}$ ordinaller sınıfı

$\mathbf{KN}$ kardinaller sınıfı

Yunan harfleri

α, β, γ, δ, θ ordinaller

ξ, η, ζ ordinal değişkenler

κ, λ, μ, ν kardinaller

φ, ψ, χ formüller

Dikey Yunan harfi

ε_0 $\sup\{\omega, \omega^{\omega}, \omega^{\omega^{\omega}}, \dots\}$

ω $\{0, 1, 2, \dots\}$ doğal sayıları kümesi

Harflerden türeyen simgeler

$\in$ eleman olma bağıntısı ("a $\boldsymbol{\acute{\epsilon}\sigma\tau\grave{\iota}}$ B" demek "a, bir B'dir")

$\forall$ her . . . için (*for* ***A****ll*)

$\exists$ bazı . . . için (*there* ***E****xists*)

$\cup$, $\bigcup$ bileşim (***U****nion*)

B. Mantık

B.1. Formüller

Formüllerde kullandığımız simgelerin birkaç tane türü vardır:

1) **değişkenler** (*variables*): z, y, x, $\ldots$; x_0, x_1, x_2, $\ldots$;
2) **sabitler** (*constants*): a, b, c, $\ldots$; a_0, a_1, a_2, $\ldots$;
3) **iki-konumlu bağlayıcılar** (*binary connectives*): $\land$, $\lor$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$;*
4) bir **tek-konumlu bağlayıcı** (*singulary connective*): $\neg$;
5) **niceleyiciler** (*quantifiers*): $\exists$, $\forall$;
6) **ayraçlar** (*parentheses, brackets*): (,);
7) bir **yüklem** (*predicate*): $\in$ (epsilon).

Bir **terim** (*term*), ya değişken ya da sabittir. Eğer t ile u, iki terim ise, o zaman

$$t \in u$$

ifadesi, bir **bölünemeyen formüldür** (*atomic formula*). Genelde **formüllerin** tanımı, özyinelidir:

1. Bölünemeyen bir formül, bir formüldür.
2. Eğer φ bir formül ise, o zaman

$$\neg\varphi$$

ifadesi de bir formüldür.

*Bazen $\Rightarrow$ ile $\Leftrightarrow$ oklarının yerine $\rightarrow$ ile $\leftrightarrow$ işaretleri yazılır.

3. Eğer φ ile ψ iki formül ise, o zaman

$$(\varphi \wedge \psi), \qquad (\varphi \vee \psi), \qquad (\varphi \Rightarrow \psi), \qquad (\varphi \Leftrightarrow \psi)$$

ifadeleri de formüldür.

4. Eğer φ bir formül ise, ve x bir değişken ise, o zaman

$$\exists x\ \varphi, \qquad\qquad \forall x\ \varphi$$

ifadeleri de formüldür.

Formüllerin her türünün adı vardır:

1. $\neg\varphi$ formülü, bir **değillemedir** (*negation*).
2. $(\varphi \wedge \psi)$ formülü, bir **birleşme** veya **tümel evetlemedir** (*conjunction*).
3. $(\varphi \vee \psi)$ formülü, bir **ayrılma** veya **tikel evetlemedir** (*disjunction*).
4. $(\varphi \Rightarrow \psi)$ formülü, bir **gerektirme** (*implication*).
5. $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ formülü, bir **denkliktir** (*equivalence*).
6. $\exists x\ \varphi$ formülü, bir **örneklemedir** (*instantiation*).
7. $\forall x\ \varphi$ formülü, bir **genelleştirmedir** (*generalization*).

Bu türlerin adları, çok önemli değildir. Fakat aşağıdaki teorem çok önemlidir.

Teorem 79. *Her formülün tek bir şekilde tek bir türü vardır.*

Mesela aynı formül, hem gerektirme, hem örnekleme olamaz: $\exists x\ (\varphi \Rightarrow \psi)$ formülü, gerektirme değil, örneklemedir; $(\exists x\ \varphi \Rightarrow \psi)$ formülü, örnekleme değil, gerektirmedir.

Ayrıca $(\varphi \wedge (\psi \wedge \theta))$ formülü, tek bir şekilde birleşmedir. Aslında sadece φ ile $(\psi \wedge \theta)$ formüllerinin birleşmesidir. Eğer A harfi, $\varphi \wedge (\psi$ ifadesini gösterirse ve B harfi, $\theta)$ ifadesini gösterirse, o zaman $(A \wedge B)$ ifadesi, $(\varphi \wedge (\psi \wedge \theta))$ formülünü gösterir; ama tanıma göre bu formül, A ile B ifadelerinin birleşmesi değildir, çünkü A ile B ifadeleri (yani A ile B tarafından gösterilen ifadeler), formül değildir.

Teoremi kanıtlamayacağız. Fakat teoremi kullanarak aşağıdaki özyineli tanımı yapabiliriz. Bir değişkenin bir formülde birkaç tane **geçişi** (*occurrence*) olabilir. Mesela $\forall x\ (x \in y \Leftrightarrow x \in z)$ formülünde x değişkeninin üç tane geçişi vardır (ve y ile z değişkenlerinin birer geçişi vardır).

1. Bölünemeyen bir formülde bir değişkenin her geçişi, **serbest** bir geçiştir.
2. Bir değişkenin φ formülündeki her serbest geçişi, $\neg\varphi$, $(\varphi * \psi)$, ve $(\psi * \varphi)$ formüllerinde de serbesttir. (Burada $*$ işareti, herhangi bir iki-konumlu bağlayıcıdır.)
3. Eğer x ile y, iki *farklı* değişken ise, o zaman x değişkeninin φ formülünde her serbest geçişi, $\exists y\ \varphi$ ile $\forall y\ \varphi$ formüllerinde de serbesttir.
4. $\exists x\ \varphi$ ile $\forall x\ \varphi$ formüllerinde x değişkeninin hiç serbest geçişi yoktur.

Bir formülde bir değişkenin serbest geçişi varsa, bu değişken, formülün bir **serbest değişkenidir.** Serbest değişkeni olmayan bir formül, bir **cümledir.** Cümleler için σ, τ, ve ρ gibi Yunan harflerini kullanacağız.

B.2. Doğruluk ve yanlışlık

Bir φ formülünün tek serbest değişkeni x ise, o zaman formül

$$\varphi(x)$$

olarak yazılabilir. O halde a bir sabit ise, ve x değişkeninin φ formülündeki her *serbest* geçişinin yerine a konulursa, çıkan cümle

$$\varphi(a)$$

olarak yazılabilir. Şimdi **doğruluğu** (*truth*) ve **yanlışlığı** (*falsehood*) tanımlayabiliriz:

1. Eğer b kümesi, a kümesini içerirse, o zaman $a \in b$ cümlesi doğrudur; içermezse, yanlıştır.
2. Eğer σ cümlesi doğruysa, o zaman $\neg\sigma$ değillemesi yanlıştır; σ yanlış ise, $\neg\sigma$ doğrudur.
3. Eğer hem σ hem τ doğruysa, o zaman $(\sigma \wedge \tau)$ birleşmesi de doğrudur; σ ile τ cümlelerinin biri yanlış ise, birleşmesi de yanlıştır.
4. Eğer bir a kümesi için $\varphi(a)$ cümlesi doğruysa, o zaman $\exists x\ \varphi(x)$ örneklemesi de doğrudur; hiç öyle bir a yoksa, örnekleme yanlıştır.
5. $(\sigma \vee \tau)$ cümlesi, $\neg(\neg\sigma \wedge \neg\tau)$ cümlesinin anlamına gelir, yani bu iki cümle aynı zamanda ya doğrudur, ya da yanlıştır.
6. $(\sigma \Rightarrow \tau)$ cümlesi, $(\neg\sigma \vee \tau)$ cümlesinin anlamına gelir.
7. $(\sigma \Leftrightarrow \tau)$ cümlesi, $\big((\sigma \Rightarrow \tau) \wedge (\tau \Rightarrow \sigma)\big)$ cümlesinin anlamına gelir.
8. $\forall x\ \varphi(x)$ cümlesi, $\neg\exists x\ \neg\varphi(x)$ cümlesinin anlamına gelir.

Özel olarak formüllerde $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, ve $\forall$ simgeleri gerekmez; sadece kolaylık için kullanacağız. Ama $(\sigma \Rightarrow \tau)$ cümlesi doğrudur ancak ve ancak τ doğru veya σ yanlıştır; ve $(\sigma \Leftrightarrow \tau)$ cümlesi doğrudur ancak ve ancak hem σ hem τ ya doğru ya yanlıştır. Ayrıca $\forall x\ \varphi(x)$ doğrudur ancak ve ancak her a kümesi için $\varphi(a)$ doğrudur.

Birkaç tane kısaltma daha kullanırız:

1. $\neg\, t \in u$ formülünün yerine $t \notin u$ ifadesini yazarız;
2. Bir $(\varphi * \psi)$ formülünün en dıştaki ayraçlarını yazmayız.
3. $\Rightarrow$ ile $\Leftrightarrow$ bağlayıcılarına göre $\wedge$ ile $\vee$ bağlayıcılarına önceliği veririz: Mesela $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \chi$ ifadesi, $(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \chi$ formülünün anlamına gelir.
4. $\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi$ ifadesi, $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)$ formülünün anlamına gelir.

Bir φ formülünün serbest değişkenleri x ile y ise, o zaman formül

$$\varphi(x, y)$$

olarak yazılabilir. O halde a ile b, iki sabit ise, ve x değişkeninin φ formülündeki her serbest geçişinin yerine a konulursa, ve benzer şekilde y değişkeninin her serbest geçişinin yerine b konulursa, çıkan cümle

$$\varphi(a, b)$$

olarak yazılabilir.

Genelde φ formülünün serbest değişkenleri, bir $\boldsymbol{x}$ listesini oluştururursa, o zaman formül

$$\varphi(\boldsymbol{x})$$

olarak yazılabilir; ayrıca

$$\forall \boldsymbol{x}\ \varphi(\boldsymbol{x}), \qquad \exists \boldsymbol{x}\ \varphi(\boldsymbol{x})$$

cümleleri yazılabilir. Eğer $\boldsymbol{a}$, uzunluğun $\boldsymbol{x}$ listesinin uzunluğu olan bir sabit listesiyse, o zaman

$$\varphi(\boldsymbol{a})$$

cümlesi de çıkar. Eğer $\varphi(\boldsymbol{x})$ ile $\psi(\boldsymbol{x})$, iki formül ise, ve *sadece doğruluğun tanımını kullanarak*

$$\forall \boldsymbol{x}\ \big(\varphi(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \psi(\boldsymbol{x})\big)$$

cümlesinin doğruluğu kanıtlanabilirse, o zaman φ ile ψ birbirine **(mantığa göre) denktir** (*logically equivalent*): kısaca

$$\varphi \quad \text{denktir} \quad \psi.$$

Öyleyse φ ile ψ birbirine denktir, ancak ve ancak her $\boldsymbol{a}$ sabit listesi için, *doğruluğun tanımına göre*

$$\varphi(\boldsymbol{a}) \Leftrightarrow \psi(\boldsymbol{a})$$

cümlesi doğrudur. Örneğin, yukarıdaki tanımlara göre

$$\begin{gathered}
\varphi \lor \psi \quad \text{denktir} \quad \neg(\neg\varphi \land \neg\psi), \\
\varphi \Rightarrow \psi \quad \text{denktir} \quad \neg\varphi \lor \psi, \\
\varphi \Leftrightarrow \psi \quad \text{denktir} \quad (\varphi \Rightarrow \psi) \land (\psi \Rightarrow \varphi), \\
\forall x\, \varphi \quad \text{denktir} \quad \neg\exists x\, \neg\varphi.
\end{gathered}$$

Ama $\exists y\, \forall x\, \bigl(\varphi(x) \Rightarrow x \in y\bigr)$ ile $\exists y\, \forall x\, \bigl(\varphi(x) \Leftrightarrow x \in y\bigr)$, denk değildir.

Teorem 80.

1. *Her formül, kendisine denktir.*
2. *Eğer φ ile ψ denk ise, o zaman ψ ile φ denktir.*
3. *Eğer φ ile ψ denk ise, ve ψ ile χ denk ise, o zaman φ ile χ denktir.*

Kanıt. 1. $\sigma \Leftrightarrow \sigma$ her zaman doğrudur.

2. $\sigma \Leftrightarrow \tau$ doğru olsun. O zaman hem σ hem τ ya doğru ya yanlıştır. Öyleyse hem τ hem σ ya doğru ya yanlıştır; yani $\tau \Leftrightarrow \sigma$ doğrudur.

3. $\sigma \Leftrightarrow \tau$ ve $\tau \Leftrightarrow \rho$ doğru olsun. Eğer σ doğruysa, o zaman τ doğru olmalı, ve sonuç olarak ρ doğru olmalı, dolayısıyla $\sigma \Leftrightarrow \rho$ doğrudur. Benzer şekilde σ yanlış ise $\sigma \Leftrightarrow \rho$ tekrar doğrudur. □

Teorem 81.

1. *$\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi$ ile $\varphi \land \psi \Rightarrow \chi$ denktir.*

2. *Eğer x değişkeni, φ formülünde serbest değilse, o zaman*

$$\forall x\ (\varphi \Rightarrow \psi) \quad \textit{denktir} \quad \varphi \Rightarrow \forall x\ \psi.$$

Kanıt. 1. $\sigma \Rightarrow \tau \Rightarrow \rho$ doğru olsun. Eğer $\sigma \wedge \tau$ cümlesi de doğruysa, o zaman hem σ hem τ doğrudur, ve sonuç olarak $\tau \Rightarrow \rho$ doğrudur, ve ρ doğrudur. Yani $\sigma \wedge \tau \Rightarrow \rho$ doğrudur.
Tersi için $\sigma \wedge \tau \Rightarrow \rho$ doğru olsun. O zaman $\sigma \wedge \tau$ yanlış veya ρ doğrudur. Yani σ yanlış, veya τ yanlış, veya ρ doğrudur. Eğer σ doğruysa, o zaman τ yanlış, veya ρ doğrudur, yani $\tau \Rightarrow \rho$ doğrudur. Sonuç olarak $\sigma \Rightarrow \tau \Rightarrow \rho$ doğrudur.

2. $\forall x\ (\sigma \Rightarrow \varphi(x))$ doğru olsun. O zaman her a için $\sigma \Rightarrow \varphi(a)$ doğrudur. Sonuç olarak σ doğruysa, o zaman her a için $\varphi(a)$ doğrudur. Yani $\sigma \Rightarrow \forall x\ \varphi(x)$ doğrudur.
Benzer şekilde $\sigma \Rightarrow \forall x\ \varphi(x)$ doğruysa $\forall x\ (\sigma \Rightarrow \varphi(x))$ doğrudur. □

C. Kofinallik

C.1. Tanım ve özellikler

Sonsuz bir κ kardinali limit ordinali olduğundan

$$\kappa = \sup\{\xi \colon \xi < \kappa\} = \bigcup_{\xi<\kappa} \xi.$$

Bazen bir kardinal, kendisinden küçük bir altkümenin supremumudur. Örneğin $\omega < \aleph_\omega$, ama

$$\aleph_\omega = \sup\{\aleph_x \colon x \in \omega\}.$$

Genelde α limit, $b \subseteq \alpha$, ve

$$\forall\xi \ \big(\xi < \alpha \Rightarrow \exists\eta \ (\eta \in b \land \xi < \eta)\big)$$

ise, b altkümesi, α ordinalinin **sınırsız** (*unbounded*) altkümesidir. Bu durumda

$$\alpha = \sup(b).$$

Örneğin her limit ordinali, kendisinde sınırsızdır. Ayrıca $\{\aleph_x \colon x \in \omega\}$, $\aleph_\omega$ ordinalinde sınırsızdır. Bir limit ordinalinin sınırsız altkümelerinin en küçük kardinaline, ordinalin **kofinalliği** (*cofinality*) denir, ve bu kardinal, $\mathrm{kf}(\alpha)$ olarak yazılabilir. Yani

$$\mathrm{kf}(\alpha) = \min\{\mathrm{kard}(x) \colon x \subseteq \alpha \land \sup(x) = \alpha\}.$$

Ayrıca, tanıma göre,

$$\mathrm{kf}(0) = 0, \qquad \mathrm{kf}(\alpha + 1) = 1$$

denebilir, ama bu durumları kullanmayacağız.

Teorem 82. *Her α limit ordinali için, tanım kümesi* $\mathrm{kf}(\alpha)$ *olan, değer kümesi α ordinalinin sınırsız bir altkümesi olan, kesin artan bir gönderme vardır.*

Kanıt. $f\colon \mathrm{kf}(\alpha) \to \alpha$ olsun, ve $f[\alpha]$, α ordinalinin sınırsız bir altkümesi olsun. Özyinelemeyle, tanım kümesi $\mathrm{kf}(\alpha)$ olan,

$$g(\beta) = \mathrm{maks}\Big(f(\beta), \sup\big(g[\beta]\big)\Big)$$

koşulunu sağlayan bir g göndermesi vardır. Eğer $\beta < \mathrm{kf}(\alpha)$ ve $g[\beta] \subseteq \alpha$ ise, o zaman $g[\beta]$, α ordinalinin sınırsız altkümesi değil, dolayısıyla $g(\beta) \in \alpha$; ayrıca $f(\beta) \leqslant g(\beta)$. Öyleyse g, istediğimiz gibidir. □

Teorem 83. *α ve β limit ordinalleri olsun. Eğer $f\colon \alpha \to \beta$ ve kesin artan ise, ve $\beta = \bigcup f[\alpha]$ ise, o zaman*

$$\mathrm{kf}(\alpha) = \mathrm{kf}(\beta).$$

Kanıt. $\mathrm{kf}(\beta) \leqslant \mathrm{kf}(\alpha)$ ve $\mathrm{kf}(\alpha) \leqslant \mathrm{kf}(\beta)$ eşitsizliklerini kanıtlayacağız.

1. $g\colon \mathrm{kf}(\alpha) \to \alpha$ ve $\bigcup g[\mathrm{kf}(\alpha)] = \alpha$ olsun. $\delta < \beta$ ise, hipoteze göre α ordinalinin bir θ elemanı için

$$\delta < f(\theta).$$

O zaman $\mathrm{kf}(\alpha)$ kardinalinin bir ι elemanı için

$$\theta < g(\iota), \qquad \delta < f(\theta) < f\big(g(\iota)\big).$$

Öyleyse $\bigcup (f \circ g)[\mathrm{kf}(\alpha)] = \beta$, dolayısıyla $\mathrm{kf}(\beta) \leqslant \mathrm{kf}(\alpha)$.

2. $h\colon \operatorname{kf}(\beta) \to \beta$ ve $\bigcup h[\operatorname{kf}(\beta)] = \beta$ olsun. $\delta < \operatorname{kf}(\beta)$ ise

$$k(\delta) = \min\{\xi \in \alpha\colon h(\delta) < f(\xi)\}$$

olsun. O zaman $k\colon \operatorname{kf}(\beta) \to \alpha$. Eğer $\theta \in \alpha$ ise, o zaman $\operatorname{kf}(\beta)$ kardinalinin

$$f(\theta) < h(\delta)$$

koşulunu sağlayan bir δ elemanı vardır. O zaman

$$f(\theta) < h(\delta) < f(k(\delta)),$$

dolayısıyla $\theta < k(\delta)$, çünkü f kesin artandır. Öyleyse $\bigcup k[\operatorname{kf}(\beta)] = \alpha$, dolayısıyla $\operatorname{kf}(\alpha) \leqslant \operatorname{kf}(\beta)$ ve aslında $\operatorname{kf}(\alpha) = \operatorname{kf}(\beta)$. □

Özel durum olarak $\boldsymbol{F}$ normal ve α limit ise

$$\operatorname{kf}(\boldsymbol{F}(\alpha)) = \operatorname{kf}(\alpha).$$

Teorem 84. *α limit ise* $\operatorname{kf}(\aleph_\alpha) = \operatorname{kf}(\alpha)$.

Kanıt. $\xi \mapsto \aleph_\xi$ normaldir. □

Teorem 85. *Cantor normal biçiminde*

$$\alpha = \omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \cdots + \omega^{\alpha_n} \cdot a_n$$

ve $\alpha_n > 0$ ise, o zaman

$$\operatorname{kf}(\alpha) = \begin{cases} \omega, & \text{eğer } \alpha_n \text{ bir ardılsa,} \\ \operatorname{kf}(\alpha_n), & \text{eğer } \alpha_n \text{ bir limitse.} \end{cases}$$

Kanıt. Son teoreme göre α limit, $\gamma \geqslant 1$, ve $\delta \geqslant 2$ ise

$$\operatorname{kf}(\alpha) = \operatorname{kf}(\beta + \alpha) = \operatorname{kf}(\gamma \cdot \alpha) = \operatorname{kf}(\delta^\alpha).$$ □

Bazen bu hesaplama bize yardım etmez. Mesela $f(0) = 0$ ve $f(n+1) = \omega^{f(n)}$ ve $\alpha = \sup(f[\omega])$ ise, yani

$$\alpha = \sup\{0, 1, \omega, \omega^{\omega}, \omega^{\omega^{\omega}}, \dots\}$$

ise, o zaman $\mathrm{kf}(\alpha) = \omega$, ama $\alpha = \omega^{\alpha}$.

Teorem 86. *Her α ordinali için*

$$\mathrm{kf}(\aleph_{\alpha+1}) = \aleph_{\alpha+1}.$$

Kanıt. $\beta < \aleph_{\alpha+1}$ ve $f\colon \beta \to \aleph_{\alpha+1}$ olsun. O zaman

$$\sup(f[\beta]) = \bigcup_{\xi<\beta} f(\xi).$$

Bu bileşimden $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ çarpımına giden bir h gömmesini tanımlayacağız. Seçim Aksiyomu sayesinde $\bigcup\{{}^{\xi}\aleph_\alpha \colon \xi < \aleph_{\alpha+1}\}$ kümesi iyisıralanabilir. Bu sıralamaya göre $\delta < \aleph_{\alpha+1}$ ise ${}^{\delta}\aleph_\alpha$ kümesinin en küçük *gömmesi*, g_δ olsun. O zaman $\gamma < \sup(f[\beta])$ ise

$$\delta = \min\{z \in \beta \colon \gamma < f(z)\}, \qquad h(\gamma) = \bigl(g_\beta(\delta), g_\delta(\gamma)\bigr)$$

olsun. Böylece

$$\mathrm{kard}\bigl(\sup(f[\beta])\bigr) \leqslant \mathrm{kard}(\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha) = \aleph_\alpha,$$

dolayısıyla $\sup(f[\beta]) < \aleph_{\alpha+1}$. Sonuç olarak $\mathrm{kf}(\aleph_{\alpha+1}) = \aleph_{\alpha+1}$. □

C.2. Hesaplamalar

Teorem 87. $2 \leqslant \kappa$, $1 \leqslant \lambda$, *ve* $\aleph_0 \leqslant \mathrm{maks}\{\kappa, \lambda\}$ *olsun. O zaman*

$$\lambda \geqslant \mathrm{kf}(\kappa) \Rightarrow \kappa < \kappa^{\lambda},$$
$$\mathrm{GKH} \land \lambda < \mathrm{kf}(\kappa) \Rightarrow \kappa = \kappa^{\lambda}.$$

Kanıt. $\mathrm{kf}(\kappa) \leqslant \lambda$ ise ${}^{\lambda}\kappa$ kümesinin

$$\kappa = \bigcup_{\xi<\lambda} f(\xi)$$

koşulunu sağlayan bir f elemanı vardır. Şimdi $\xi \mapsto g_\xi \colon \kappa \to {}^{\lambda}\kappa$ olsun. O zaman ${}^{\lambda}\kappa$ kümesinin $\{g_\xi \colon \xi < \kappa\}$ kümesinde olmayan bir

$$\eta \mapsto \min\Big(\kappa \smallsetminus \big\{g_\xi(\eta) \colon \xi < f(\eta)\big\}\Big)$$

elemanı vardır.

Şimdi $\lambda < \mathrm{kf}(\kappa)$ olsun. O zaman Teorem 86'nın kanıtındaki gibi

$$\begin{aligned} {}^{\lambda}\kappa = \bigcup_{\xi<\kappa} {}^{\lambda}\xi = \bigcup_{\lambda\leqslant\xi<\kappa} {}^{\lambda}\xi & \\ \preccurlyeq \bigcup_{\lambda\leqslant\xi<\kappa} {}^{\lambda}(\mathrm{kard}(\xi)) = \bigcup_{\substack{\lambda\leqslant\xi<\kappa\\ \xi\in\mathbf{KN}}} {}^{\lambda}\xi \preccurlyeq \bigcup_{\substack{\lambda\leqslant\xi<\kappa\\ \xi\in\mathbf{KN}}} {}^{\xi}2. \end{aligned}$$

Eğer GKH doğruysa $\mu < \kappa \Rightarrow 2^\mu \leqslant \kappa$, dolayısıyla $\kappa^\lambda \leqslant \kappa$. □

Şimdi, gösterdiklerimize göre, eğer $\kappa + \lambda$ sonsuzsa, o zaman

$$\begin{gathered} 2 \leqslant \kappa \leqslant 2^\lambda \Rightarrow \kappa^\lambda = 2^\lambda, \\ \mathrm{kf}(\kappa) \leqslant \lambda \leqslant \kappa \Rightarrow \kappa < \kappa^\lambda \leqslant 2^\kappa, \\ 1 \leqslant \lambda < \mathrm{kf}(\kappa) \Rightarrow \kappa \leqslant \kappa^\lambda \leqslant 2^\kappa. \end{gathered}$$

Ayrıca

$$\mathrm{GKH} \Rightarrow \kappa^\lambda = \begin{cases} \lambda^+, & \text{eğer } 2 \leqslant \kappa < \lambda \text{ ise,} \\ \kappa^+, & \text{eğer } \mathrm{kf}(\kappa) \leqslant \lambda \leqslant \kappa \text{ ise,} \\ \kappa, & \text{eğer } 1 \leqslant \lambda < \mathrm{kf}(\kappa) \text{ ise.} \end{cases}$$

Özel olarak

$$\mathrm{GKH} \Rightarrow {\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta} = \begin{cases} \aleph_{\beta+1}, & \text{eğer } \alpha < \beta \text{ ise,} \\ \aleph_{\alpha+1}, & \text{eğer } \mathrm{kf}(\alpha) \leqslant \aleph_\beta \leqslant \aleph_\alpha \text{ ise,} \\ \aleph_\alpha, & \text{eğer } \aleph_\beta < \mathrm{kf}(\alpha) \text{ ise.} \end{cases}$$