Ordinal Analiz

Aksiyomatik Kümeler Kuramı Dersi

David Pierce

21 Şubat 2018 (February 21)

Matematik Bölümü
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi
İstanbul
dpierce@msgsu.edu.tr
http://mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/

Preface

In the present text, I attempt to develop set theory on the model of calculus, so that any student who can learn the latter can learn the former. I shall explain later what this means in practical terms.

Mathematics as such

Meanwhile, in more theoretical terms, the text attempts to bridge the gap between mathematics as natural science and mathematics as logic. Under the former conception, mathematics should agree with the world (or with other mathematics courses); under the latter conception, mathematics should be logically derivable from axioms that may be plausible, but are in any case accepted for the nonce.

Euclid recognized the gap, and he has given us in the *Elements* [6] the earliest known attempt to bridge the gap. A carpenter or surveyor may recognize that many of Euclid's propositions *are* true; Euclid shows why they *must* be true.

Euclid has the spirit of Socrates, who at his trial recalls the pronouncement of the oracle at Delphi that he, Socrates, was the wisest of men [16]. Incredulous, Socrates investigated the men who are reputed to be wise:

> After the political experts I went on to the poets . . . on the basis that it was here that I'd catch myself red-handed, as

> actually more ignorant than [they]. So, picking out those of their poetic compositions they seemed to me to have spent most effort on, I would ask them what they were trying to say, with a view to learning a thing or two from them as well. Well, Athenians, I blush to tell you the truth, but it has to be told: practically speaking, almost everyone present would have better things to say than they did about their own compositions . . . But, men of Athens, the good craftsmen too seemed to me to suffer from the same failing as the poets: because they were accomplished in practising their skill, each one of them claimed to be wisest about other things too, the most important ones at that—and this error of theirs seemed to me to obscure the wisdom that they did possess.

Most undergraduate mathematics has an obvious meaning in the physical world, or at least is of use to experts who work in the world. Even number theory has its applications to cryptography and thus to warfare and internet commerce. But mathematics proper must be able to explain not only how it is true, but why. *How* Newton's infinitesimal calculus is true is that it can derive the motions of the planets from an inverse-square law of gravitation [14]. But this success did not make calculus into mathematics. *Infinitesimal* calculus became mathematics as such only after three centuries, when Robinson founded it in logic [18]. Euclid had shown the way, or established the ideal, some two millenia earlier.

Now set theory may stand as the purest mathematics. But it was created to explain the power of calculus, before Robinson was born. Alexandre Borovik notes the paradox that though there may be nothing infinite in the world, infinity is still useful as an approximation to the very large. Infinity here may not be a set, but a point to the right of all of the points on the real number line. Since those points are called numbers, infinity may be considered a new number. The linguist may say that we have the capacity to form an infinite number of grammatical sentences, as in symbolic logic we may form infinitely many conjunctions $P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n$. Here the infinite number is an infinite set, but a *countable* set. Even the *uncountably* infinite is useful, in the form of the real numbers themselves, which compose an uncountably infinite set. Taking inspiration from the line of real numbers, I try to develop in the present text an analogous conception of the class of all ordinal numbers. I even draw graphs of continuous and non-continuous ordinal-valued functions as if they were real-valued functions.

Most students come to us without knowing what mathematics is. For them, it is just like physics or any other course they have to take. Their job is to satisfy their teachers. *Our* job is to induce the students to insist on satisfying themselves. What we ask them to learn should be justified to *their* standards. Therefore they must develop their own standards. This is true in any course of study; but in mathematics, the standards of truth are universal. We expect universal agreement on whether a given theorem follows from given axioms and definitions. In practice there may not be agreement, but in this case we have a clear procedure for resolving the dispute. The person who says that a theorem is true must be prepared to supply a proof, and to explain it as needed by anybody who is seriously interested. Teachers may demand this of students; students must also feel free to demand this of teachers.

I once had a student in a set-theory course who thought a certain equation was true because he had seen it in an authoritative source. He had not understood that, in the source, the equation was true by a definition that my own course had not adopted. The equation was

$$\bigcap \varnothing = \varnothing. \tag{1}$$

I had taught instead

$$\bigcap \varnothing = \mathbf{V}; \tag{2}$$

but this was a *theorem* following from the natural definition

$$\bigcap \boldsymbol{C} = \{x \colon \forall Y\ (Y \in \boldsymbol{C} \Rightarrow x \in Y)\},$$

where $\boldsymbol{C}$ is any class. This is what I have always taught. With this definition in mind, one can write a "De Morgan law" in the form

$$\Bigl(\bigcap \boldsymbol{C}\Bigr)^{\mathrm{c}} = \bigcup \{X^{\mathrm{c}} \colon X \in \boldsymbol{C}\}, \tag{3}$$

which is a generalization of the more familiar

$$(A_1 \cap \cdots \cap A_n)^{\mathrm{c}} = {A_1}^{\mathrm{c}} \cup \cdots \cup {A_n}^{\mathrm{c}}. \tag{4}$$

One has to explain the notation on the right of (3), since the complement of a set is a proper class, so that $\{X^{\mathrm{c}} \colon X \in \boldsymbol{C}\}$ is not a class unless $\boldsymbol{C} = \varnothing$. One can still define

$$\bigcup \{X^{\mathrm{c}} \colon X \in \boldsymbol{C}\} = \{x \colon \exists Y\ (Y \in \boldsymbol{C} \wedge x \notin Y)\}.$$

When $\boldsymbol{C}$ is empty, one gets

$$\bigcup \varnothing = \varnothing, \tag{5}$$

and so (2) follows. This, or rather $(\bigcap \varnothing)^{\mathrm{c}} = \varnothing$, is also the natural interpretation of (4) when $n = 0$.

One could say that (4) made no sense when $n = 0$; but this would be contrary to the spirit of generalization in mathematics: a spirit which may lead to vacuity, but also to insight and simplicity. In *Mathematics: A Very Short Introduction* [9, ch. 3, pp. 35–48], Gowers notes that the straight lines joining any two of n points on a circle divide the circle into 2^{n-1} regions when $1 \leqslant n \leqslant 5$. This is not a proof that the same is true for all n:

> In fact, with a little further reflection one can see that the number of regions *could not possibly* double every time. For a start, it is worrying that the number of regions defined when there are 0 points round the boundary is 1 rather than 1/2, which is what it would have to be if it doubled when the first point was put in. Though anomalies of this kind sometimes happen with zero, most mathematicians would find this particular one troubling.

That a certain formula does not work when $n = 0$ is a sign (albeit not a conclusive one) that the formula will not work for other n either.

It is clear what the sum $\sum_{i=1}^{n} a_i$ means when n is a counting number; and when $n = 0$, the sum should be zero. But then the product $\prod_{i=1}^{n} a_n$ should be 1 when $n = 0$, since 1 is neutral with respect to multiplication. As a special case, we define $0! = 1$. Likewise, since the universal class is neutral with respect to intersection, we should define (2) to be true.

Nonetheless, the elegance of (2) may be lost on students. When one of them lost points on an exam for writing (1) instead of (2), he showed me an issue of *Matematik Dünyası* in which Ali Nesin said that (1) was correct. Ali worked only with sets, not with proper classes. In particular, he defined intersections only of sets, and these intersections should always be sets. By fiat then, (1) held, there being no better alternative. Seeing this equation, apparently my student took it to be as true as an equation from physics like $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. He had not learned that Arnol′d [1] was not quite right to say,

> Mathematics is a part of physics. Physics is an experimental science, a part of natural science. Mathematics is the part of physics where experiments are cheap.

That very "cheapness" of its experiments makes mathematics different. In every class, using axioms and definitions, we can create a new world, which need not be the same as the world seen in a previous class, or in a text that we are not using.

As the student of linear algebra must learn to work with more than three dimensions, overcoming his or her preconception that the additional dimensions have no physical meaning, so the student of set theory must learn to work with infinite sets that are strictly larger than other infinite sets, and even with classes that are too large to be sets at all. The universal class $\mathbf{V}$ might be considered as analogous to the point ∞ at infinity already seen in calculus.

The writing of textbooks

I have now taught set theory three times at METU, and three times at Mimar Sinan. I have always produced my own text for the course. This text contained more than could be covered in the course, because I wrote the text more for the teacher (namely myself) than for the students. Most textbooks may be written so that they can replace a teacher's lectures. I myself did aim to put in my own texts everything that lectures would cover; but the text might be terser than the lectures. The text would also cover more: things that *I,* at least, wanted to know, or that that were needed to satisfy some notion of formal completeness, though they could be skipped in class.

I write texts for many of my courses. For this habit, I blame the man who taught me precalculus and calculus in the last two years of high school. Donald Brown had us buy two textbooks: Spivak [21] for theory, and Salas and Hille [20] for practice. These could have been used for two courses called, respectively, analysis and computations in analysis at Mimar Sinan. In any case, the real text for Mr Brown's course was the one that we copied down from what Mr Brown wrote on the blackboards. I learned in this way that different choices could be made about how to do mathematics. Mr Brown was making his own choices. If I became a teacher, I could make my own choices.

In a number-theory course that I taught at METU, a student complained that the text was difficult to understand. He was embarrassed when I pointed out that the text was by me. I told him that the real course was worked out in the classroom. If a student could follow the text by itself, that was fine; but I was not interested in producing a text that would obviate a student's need to come to class.

I may not be able to produce such a text. Perhaps nobody can, but if they try, they end up with a bloated textbook with something for everybody, but too much for anybody. At least one student did praise one edition of my own set-theory text; but she had been by far the best student in the class.

The present text is somewhat different. It is set theory stripped down to precisely what I think reasonable to ask *all* students to learn. I have also changed my mind about what needs to be in the course.

I began teaching set theory at METU in order to work out some of my own concerns about mathematical rigor. For example, I had noticed that the logical distinction between induction and recursion in the natural numbers was not commonly recognized. Even otherwise-rigorous textbooks treated induction, strong induction, and well-ordering as equivalent principles, from any one of which, all of the other properties of the natural numbers could be derived. Mr Brown did this, as did Spivak; but they were in error. I ultimately wrote an article [15] about this. Meanwhile, I wanted to clarify matters in my own set-theory course.

I learned that my concerns were lost on most students. Since my students had entered university on the basis of their ability to solve odd computational problems, I decided that in set theory they should at least be able to perform computations with what Cantor [3, §19, pp. 183–195] calls the normal forms of ordinal numbers.

This text

I used to want the students to learn something of symbolic logic. However, I have now all but dropped this aspect of the course. Students should still learn that sets can be collected into classes, which are defined by formulas; but the formal definition of formulas is now relegated to **Appendix B.**

I used to try to motivate set theory by the paradox that our earliest mathematical activity is based on a proposition that everybody accepts without proof, but is not properly an axiom. The proposition is that no matter how we count a set, we always get the same number. The proposition fails when the set is infinite. This is a sign that the proposition for finite sets is a real theorem, not an axiom.

One might alternatively conclude that there are no infinite sets, or that there is not really any way to count them. I had a friend who did not believe in infinite sets; he could have been a mathematician, but became a lawyer instead.

In earlier set-theory classes, I did postpone the Axiom of

Infinity as long as possible. I did not do this in my most recent class, because I had decided to try to motivate set theory differently this time.

One does real analysis on the basis of the axioms of a complete ordered field. One can in fact construct a complete ordered field from the natural numbers, as given by the Peano Axioms. The way was shown by Dedekind [4], and Landau [11] works out the details; but one need not construct the real numbers, in order to do analysis.

I have used the same idea in the present text. The ordinals are analogous to the real numbers in the sense that every nonempty set of them with an upper bound has a least upper bound. In order to do "ordinal analysis" as soon as possible, I present axioms for ordinals in **Chapter 2,** and I prove from these axioms the tools needed for ordinal arithmetic: ordinal induction and ordinal recursion. Alternatively, one might just accept ordinal induction and recursion as axioms themselves, or as grand theorems whose proofs are deferred, like the Intermediate Value Theorem in some calculus books. In Salas and Hille, the proof of the IVT is in an appendix. In my own set-theory classes, I may prove the theorem of ordinary recursion (recursion on $\mathbb{N}$ or ω), to give a taste of what is involved, while waving my hands over ordinal recursion.

In just a few pages, Suppes [22, pp. 195–205] gives three versions of transfinite induction, five versions of transfinite recursion. I give only one version of each, a version obtained from ordinary induction or recursion by adding a limit step.

In **Chapter 3** are presented those set axioms with which the existence of a model of the ordinal axioms can be established. The chapter has two parts. As presented in the previous chapter, ordinal recursion gives us only functions from **ON** into itself. With the Empty-Set, Adjunction, and Replacement axioms, we can recursively define an isomorphism from any structure satisfying the ordinal axioms to **ON** as defined by von Neumann [25]. We may henceforth assume that **ON** has this definition. This gives us the convenient results

$$\alpha = \{\xi \colon \xi < \alpha\}, \qquad \sup A = \bigcup A.$$

This is the result of the first section. In the next section, we observe that the new **ON** is transitive and well-ordered by $\in$, and so are all of its elements. This will let us define it without using the ordinal axioms.

Bruno Poizat might be critical here. In his *Course in Model Theory* [17, p. 163], after showing that every well-ordered set is isomorphic to a unique von Neumann ordinal, he writes,

> We meet some students who are allergic to ordinals as "well-ordering types" and who find the notion of von Neumann ordinals easier to digest; that is a singular consequence of dogmatic teaching, which confuses formalism with rigor, and which favors technical craft to the detriment of the fundamental idea: It takes a strangely warped mind to find the notion of a transitive set natural!

I do not know whether it is really a job for a mathematician to judge what is strangely warped! Different people think differently, even within mathematics. Our students may indeed be victims of dogmatic teaching; but it is they with whom we have to work. In real analysis, each real number can be understood as the set of all rational numbers that are less than itself; but one need not have this understanding, in order to *do* real analysis; and the understanding may even be a distraction. In ordinal analysis, we need only think of ordinals as points on a certain line. However, it *is* useful for our purposes if the ordering of that line is precisely set-theoretic membership, so that every ordinal is precisely the set of ordinals that are less than itself. For one thing, this means the ordinal itself has a cardinality. In an early draft of the present text, I had written a theorem in the form,

$$\alpha \cdot \beta \approx \{\xi : \xi < \alpha\} \times \{\xi : \xi < \beta\}.$$

At some stage, this may express the theorem better than what I have now written, namely

$$\alpha \cdot \beta \approx \alpha \times \beta.$$

But it seemed to me that maintaining a formal distinction between α and $\{\xi : \xi < \alpha\}$ would be perverse.

Adjunction is not one of Zermelo's original axioms [26], but it follows from his axioms of Union and "Elementary Sets" (classes of at most two elements are sets). I prefer to give Adjunction before having to introduce Union. Once the Union Axiom *is* introduced, along with Separation and Infinity, we can show that von Neumann's ordinals do exist so as to satisfy the ordinal axioms given earlier. However, this material is independent from the rest of the text, and perhaps it can be ignored, however paradoxical that may be for a course of axiomatic set theory.

Most of the Zermelo–Fraenkel axioms can be understood to be that certain classes are sets. I have never seen the Axiom of Infinity presented this way, even in a thorough discussion of the axioms by Fraenkel and others [7]. However, since we have already introduced the ordinals, we can let Infinity be that the class of all ordinals that neither are limits nor contain limits is a set.

The Power-Set Axiom appears only in **Chapter 7,** on cardinals, to establish that there are uncountable sets. Then the

Axiom of Choice gives us that every set is equipollent with some ordinal. Defining the Beths as well as the Alephs makes some nontrivial computational problems possible. It may be a perversity of mathematics that we look for ways to give students problems; but this is what I have done.

I never mention the Foundation Axiom. One may raise the question of whether a set can be a member of itself; but I see no point in declaring that it cannot unless one is going to give the proof that such a declaration is consistent with the other axioms.

It might be said that my use of $\mathbf{V}$ for the class of all sets implies my acceptance of the Foundation Axiom. I use this notation in the text only to point out that $\mathscr{P}(\mathbf{V}) = \mathbf{V}$, so that Cantor's Theorem $A \prec \mathscr{P}(A)$ must somehow use that A is not a class. I do not point out that $\bigcap \varnothing = \mathbf{V}$.

The possibility of computational problems with ordinals is developed in **Chapters 4, 5,** and **6,** which concern ordinal addition, multiplication, and exponentiation respectively. The chapters are laid out in parallel, as far as possible. Thus in **Chapter 4** we establish that each element ω^2 is of the form $\omega \cdot k + n$, and $n + \omega = \omega$. In particular then, ω^2 is closed under addition. In **Chapter 5,** we see that ω^ω is closed under addition and multiplication. Within this set, Cantor normal forms can be defined in close analogy with the the usual positional notation for counting numbers; for any element of ω^ω can be written as

$$\omega^k \cdot m_0 + \omega^{k-1} \cdot m_1 + \cdots + \omega \cdot m_{k-1} + m_k$$

for some k in ω, where the coefficients m_i are allowed to be 0. The rules for addition and multiplication in ω^ω are as challenging as those for arbitrary Cantor normal forms, and they can be introduced before arbitrary exponentiation is worked out in **Chapter 6.** The tools are all there; but I think there is no need to give a rule for raising an arbitrary Cantor normal form to the power of an arbitrary Cantor normal form.

The chapters on ordinal arithmetic establish that ordinal sums, products, and powers are respectively equipollent with disjoint unions, cartesian products, and sets of finitely supported functions. It is established within each chapter that the corresponding operation yields only countable sets when applied to countable sets.

In **Chapter 7,** the Power-Set Axiom gives us uncountable sets. That cardinal addition and multiplication are trivial is established by use of Cantor normal forms.

For completeness, I added the topic of cofinality to an earlier edition of the text. It allows precise computation of infinite cardinal powers, provided one grants the Generalized Continuum Hypothesis. I have never had time to talk about this in class; but the material is in **Appendix C.**

Chapter 1 is an attempt to introduce foundational thinking in a familiar context: the real numbers. Given the real numbers as constituting an ordered field, I define the natural numbers as certain real numbers (which is what Spivak does). Ultimately I prove the Peano Axioms as a theorem about these natural numbers. Many details are left as exercises; in the class itself, I had students present at the board their solutions (or the solutions that they looked up).

One could however skip **Chapter 1.** As it is, the text introduces *four* lists of axioms: (1) the axioms of a complete ordered field, (2) the Peano axioms, (3) axioms for the class of ordinals, and (4) the Zermelo–Fraenkel axioms. One could skip the first two lists and treat the third explicitly as a theorem whose proof is deferred. Or one could skip all but the third, using "naive" set theory to justify what is done with it. This would take the course as close as possible to physics, in the sense of being about something—the class of ordinals—that is as real as the line composed of real numbers.

Appendix A lays out the different kinds of letters used as symbols in the text. It might be desirable to compose mathematics in such a way that it could be written out with a standard old-fashioned typewriter. However, the present text takes advantage of the distinctions between:

- the Latin and Greek alphabets;
- the upper and lower cases;
- roman and italic "shapes";
- plain and bold "weights," along with "blackboard bold" and curly fonts;
- different intervals of an alphabet.

Letters from the beginning of an alphabet are usually constants; from the end, variables. This follows the convention going back to Descartes [5] whereby, in an equation like

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

the x that is the variable or "unknown." The a, b, and c are constant for the sake of solving the equation; but they are still variable in the sense of having no fixed values outside the solution of the equation. If they did have values that were fixed throughout the text, they could be printed upright. In this way, $\upomega$ is the set of natural numbers, as opposed to ω, which could be used for an arbitrary ordinal, though to avoid confusion it is never used in this text. A sort of exception to this rule is that $\mathscr{P}$ always denotes the operation of producing the power set, while letters like $\mathscr{A}$ from the same font are not fixed. Moreover, while f always denotes a function, I may use it as a variable or constant, simply because I have no sense that there is any standard letter for a variable function. I have the sense that ordinary language uses no variables at all; only formalized language does. Thus we may say $\varphi(a)$, meaning implicitly that for all a, $\varphi(a)$ is true; or we may say $\forall x\ \varphi(x)$ with the same meaning. I do find it satisfying to use α and ξ in ordinal analysis the way we use a and x in real analysis. But making a formal distinction between constants and variables is admittedly not all that important. I do not want students to have to wonder about whether they should write α or ξ in a particular context.

Students should however learn to distinguish between sets and classes. A set may be called a, A, or $\mathscr{A}$, depending on what features are being emphasized. If it is important that the set has elements, it may be called A; if it is important that those elements themselves have elements, it may be called $\mathscr{A}$. A class that is not known to be a set will be $\boldsymbol{A}$, written with a wavy underline on the blackboard (and not with "blackboard bold").

In the past, I used only lower-case letters for sets, so that a capital letter would always be a class. Now I have decided it is better to follow the practice of ordinary mathematics when possible, using lower-case letters to the left of the $\in$ sign, upper-case to the right.

The course

If they learn nothing else from a course of axiomatic set theory, students should learn the Russell Paradox [19]—that, or else the Burali-Forti Paradox [2], which might be taken as even more integral to the course, given that this is presented as "ordinal analysis." The paradoxes are one bit of the "mathematics as logic" that I mentioned at the beginning. Each can be most succinctly expressed as the theorem that a certain class is not a set. Without classes, you have to say things like, "Not everything that you might expect to be a set can be a set." You can say, "Not every property defines a set"; but what is a property?

Still, introducing the class as a definite concept poses difficulty. Not every writer dare be like Levy [13], who introduces classes near the beginning of his text. Levy is perverse in another way too, by formally stating the "Axiom of Comprehension"—that every formula defines a set— and then immediately proving the theorem (called "Russell's antinomy") that the Axiom of Comprehension is inconsistent.

I conceive of sets as already existing. Sets are *collections,* though not every collection can be expected to be a set. Here I use the word "collection" for the most general kind of whole that has individual elements; but the Russell Paradox keeps us from defining a "most general" such thing in an absolute sense: there is no collection of all collections that do not contain themselves. In axiomatic set theory, we want to figure out *which* collections are sets, or ought to be sets. Purely for our convenience, we require every member of a set to be a set itself. One may prefer not to consider the so-called empty set as a set; but then one might have to say things like, "For all a, where a is a set or $\varnothing$." A similar problem arises in Euclid's number theory, where unity is not properly a number, but sometimes is implicitly treated as one. In any case, since we also consider sets to be in some sense "given," we have no reason to think that any new collection of sets that we may form is already one of the given sets. This resolves the Russell Paradox.

In my 2013–4 class, I demonstrated Tarski's Undefinability Theorem [23] in the form, *Not every collection of sets is even* *a class.* Indeed, set theory seems to be the best context to introduce the idea of the theorem, which originates with Gödel [8]. Gödel showed how to treat every formula about (counting) numbers as a number itself, so that, given a number theory, one could write down a true statement about numbers that was not provable in the theory. It is easier to do the same thing for set theory. We assign, to every symbol in the language of set theory, a different set. Considering it as a sequence of such symbols, we assign, to every formula φ about sets, a set $\ulcorner\varphi\urcorner$. Then the collection of sets $\ulcorner\sigma\urcorner$ such that σ is a true sentence is not a class: For if it were the class defined by φ, then some formula ψ would define the class of $\ulcorner\chi\urcorner$ such that $\chi(\ulcorner\chi\urcorner)$ is false. In this case $\psi(\ulcorner\psi\urcorner)$ would be true if and only if it were false. All of this can be shown to interested students; but it is not in the present text.

Our students at Mimar Sinan have read and presented the propositions of the first book of Euclid's *Elements.* Reading this book with them caused me to recognize what they sometimes did not: that equality is not identity. Euclid proves that parallelograms of the same height on the *same* base are equal, before proving that parallelograms of the same height on *equal* bases are equal. Equality here is congruence: simple congruence of line segments, and congruence of parts in the case of parallelograms.

With this example in mind, I prefer not to take equality of sets for granted, but to *define* it as having the same elements. In a word, equality of sets is sameness of extension. With this approach, one needs the axiom that equal sets are members of the same sets. One can then prove as a theorem that equal sets are members of the same classes. This theorem is usually taken as a logical axiom, because equality is treated as identity. In this case, that sameness of extension implies equality must be taken as a set-theoretic axiom. I have swept all of this under the rug in the present text.

In an email exchange, Ali Nesin allowed that he should have been clearer in his *MD* article that the equation (1) was his personal convention. Still, as I understand it, his approach to set theory may not be uncommon: here, everything should be a set, and its existence should be given by an explicit construction (or at least, as in the case of a power set or a choice function, a construction that is explicitly justified by an axiom). Kunen says,

> If $\mathscr{F} = 0$, then $\bigcup \mathscr{F} = 0$ and $\bigcap \mathscr{F}$ "should be" the set of all sets, which does not exist.

This is at [10, page 13]; Kunen does not define classes until page 23.

I myself am not interested in giving classes the formal existence that they have in so-called von Neumann–Bernays–Gödel set theory, such as is presented by Lemmon [12]. More formalism means more need to check that it agrees with our informal understanding.

For students who just want to collect enough credits to graduate, all of these foundational concerns can be de-emphasized. I used to think it a reasonable exam problem to give a verbal description of a class and ask for a formula that defines it. But I think now that enough problems can be asked without this. I propose that students should be able to do the following.

1. Add and multiply ordinals in their Cantor normal forms. (Exponentiation is optional.)
2. Recognize equations of ordinals that are identities, and supply proofs.
3. Supply counterexamples to ordinal equations that are not identities, and identify the false steps in proposed proofs that the equations *are* identities. (I recognized

late—only in 2015–6—that the students could have difficulty in finding the false steps; but if they cannot do it, they can hardly be said to have learned any mathematics at all.)

4. Perform cardinal computations of Alephs and Beths with addition, multiplication, exponentiation, and suprema.

Questions like, "Prove or disprove: every set is a class" are also standard on my exams.

Bibliography

[1] V. I. Arnol′d. On the teaching of mathematics. *Russian Mathematical Surveys*, 53(1):229–234, 1998.

[2] Cesare Burali-Forti. A question on transfinite numbers. In van Heijenoort [24], pages 104–12. First published 1897.

[3] Georg Cantor. *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite numbers.* Cosimo Classics, New York, 2007. Translation with introduction and notes by Philip E. B. Jourdain of Cantor's 1895 and 1897 papers "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre." Originally published 1915.

[4] Richard Dedekind. *Essays on the Theory of Numbers. I: Continuity and Irrational Numbers. II: The Nature and Meaning of Numbers.* Authorized translation by Wooster Woodruff Beman. Dover Publications Inc., New York, 1963.

[5] René Descartes. *The Geometry of René Descartes.* Dover Publications, Inc., New York, 1954. Translated from the French and Latin by David Eugene Smith and Marcia L. Latham, with a facsimile of the first edition of 1637.

[6] Euclid. *The Thirteen Books of Euclid's* Elements. Dover Publications, New York, 1956. Translated from the text of Heiberg with introduction and commentary by Thomas L. Heath. In three volumes. Republication of the second edition of 1925. First edition 1908.

[7] Abraham A. Fraenkel, Yehoshua Bar-Hillel, and Azriel Levy. *Foundations of set theory*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, revised edition, 1973. With the collaboration of Dirk van Dalen, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 67.

[8] Kurt Gödel. On formally undecidable propositions of *principia mathematica* and related systems I. In van Heijenoort [24], pages 596–616. First published 1931.

[9] Timothy Gowers. *Mathematics: A Very Short Introduction*. Very Short Introductions. Oxford University Press, Oxford, 2002.

[10] Kenneth Kunen. *Set theory*, volume 102 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1983. An introduction to independence proofs, Reprint of the 1980 original.

[11] Edmund Landau. *Foundations of Analysis. The Arithmetic of Whole, Rational, Irrational and Complex Numbers.* Chelsea Publishing Company, New York, N.Y., third edition, 1966. Translated by F. Steinhardt; first edition 1951; first German publication, 1929.

[12] E. J. Lemmon. *Introduction to Axiomatic Set Theory*. Routledge & Kegan Paul Ltd / Dover Publications Inc, London / New York, 1969.

[13] Azriel Levy. *Basic set theory*. Dover Publications Inc., Mineola, NY, 2002. Reprint of the 1979 original [Springer, Berlin].

[14] Isaac Newton. *The* Principia*: Mathematical Principles of Natural Philosophy*. University of California Press, Berkeley, CA, 1999. A new translation by I. Bernard Cohen and Anne Whitman, assisted by Julia Budenz. Preceded by "A guide to Newton's *Principia*" by Cohen.

[15] David Pierce. Induction and recursion. *The De Morgan Journal*, 2(1):99–125, 2012. `http://education.lms.ac.uk/2012/04/david-pierce-induction-and-recursion/`.

[16] Plato. *Socrates' Defence.* Penguin, UK, 2015. Translated by Christopher Rowe.

[17] Bruno Poizat. *A Course in Model Theory.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 2000. An introduction to contemporary mathematical logic, Translated from the French by Moses Klein and revised by the author.

[18] Abraham Robinson. *Non-standard analysis.* Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996. Reprint of the second (1974) edition. With a foreword by Wilhelmus A. J. Luxemburg. First edition 1965.

[19] Bertrand Russell. Letter to Frege. In van Heijenoort [24], pages 124–5. First published 1902.

[20] S. L. Salas and Einar Hille. *Calculus: One and Several Variables. With Analytic Geometry. Part I.* John Wiley & Sons, New York, third edition, 1978.

[21] Michael Spivak. *Calculus.* Publish or Perish, Berkeley, California, 2nd edition, 1980.

[22] Patrick Suppes. *Axiomatic Set Theory.* Dover Publications Inc., New York, 1972. Unabridged and corrected republication of the 1960 original with a new preface and a new section (8.4).

[23] Alfred Tarski. The concept of truth in formalized languages (1933). In *Logic, semantics, metamathematics*, pages 152–278. Hackett Publishing Co., Indianapolis, IN, second edition, 1983. Papers from 1923 to 1938, Translated by J. H. Woodger, Edited and with an introduction by John Corcoran.

[24] Jean van Heijenoort, editor. *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879–1931.* Harvard University Press, Cambridge, MA, 2002.

[25] John von Neumann. On the introduction of transfinite numbers. In van Heijenoort [24], pages 346–354. First published 1923.

[26] Ernst Zermelo. Investigations in the foundations of set theory I. In van Heijenoort [24], pages 199–215. First published 1908.

İçindekiler

Şekil Listesi

1. Gerçel Analiz

1.1. Tam sıralı cisim aksiyomları

Gerçel sayılar, $\mathbb{R}$ **tam sıralı cismini** oluşturur. Demek ki

1) $\mathbb{R}$, $<$ bağıntısı tarafından **sıralanmıştır,** yani
   a) $<$ bağıntısı **yansımasızdır,**

$$a \not< a;$$

   b) $<$ bağıntısı **geçişlidir,**

$$a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c;$$

2) $<$ sıralaması **doğrusaldır,**

$$a < b \vee a = b \vee a > b;$$

3) $<$ doğrusal sıralaması **tamdır,** yani $\mathbb{R}$'nin boş olmayan, üstsınırı olan her altkümesinin en küçük üstsınırı veya **supremumu** vardır:

$$\begin{gathered}\exists x\ x \in A \wedge \exists x\ \forall y\ (y \in A \Rightarrow y \leqslant x) \Rightarrow \\ \exists x\ \Big(\forall y\ (y \in A \Rightarrow y \leqslant x) \wedge \\ \forall z\ \big(\forall y\ (y \in A \Rightarrow y \leqslant z) \Rightarrow x \leqslant z\big)\Big);\end{gathered}$$

4) $\mathbb{R}$, iki-konumlu **toplama** ve **çarpma** işlemleri altında kapalıdır, ve bu işlemler ile $\mathbb{R}$ bir **cisimdir,** yani

$$\begin{aligned} a+b &= b+a, & ab &= ba, \\ a+0 &= a, & a\cdot 1 &= a, \\ -a+a &= 0, & a\neq 0 &\Rightarrow \exists x\ ax=1, \end{aligned}$$
$$a\cdot(b+c)=ab+ac;$$

5) $\mathbb{R}$'nin sıralaması ve cisim yapısı birbirine saygı gösterir:

$$a\leqslant 0 \Leftrightarrow -a\geqslant 0,$$
$$a>0\wedge b>0 \Rightarrow a+b>0\wedge ab>0.$$

Her iki tam sıralı cismin birbirine izomorf olduğunu, teorem olarak kanıtlayabiliriz.

1.2. Gerçel sayıların inşası

Gerçel analizdeki gibi, bu bölümde $\mathbb{R}$'nin var olduğunu, aksiyom olarak kabul ediyoruz. Fakat *küme aksiyomlarını* kullanarak gerçel sayıları inşa edebiliriz. Kısaca

1) $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ kesirli sayılar sıralı cisminden elde edilir,
2) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ tamsayılar sıralı halkasından elde edilir,
3) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ sayma sayıları yapısından elde edilir.

Yukarıdaki inşalar, aşağıdaki şekilde yapılır.

1. Her gerçel sayı, öyle bir A kümesi olur ki
   a) $\varnothing \subset A \subset \mathbb{Q}$, yani A boş değildir, A'nın elemanları kesirli sayıdırlar, ve her kesirli sayı A'nın elemanı değildir;
   b) $\forall x\ \forall y\ (x\in A\wedge y\in\mathbb{Q}\wedge y<x\Rightarrow y\in A)$, yani A'nın bir elemanından küçük olan her kesirli sayı A'nın elemanıdır; ve

c) $\forall x\ \exists y\ (x \in A \Rightarrow y \in A \wedge x < y)$, yani A'nın en büyük elemanı yoktur.
2. Her a/b kesirli sayısı, $\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \smallsetminus \{0\})\colon ay = bx\}$ kümesi olarak tanımlanır.
3. Benzer şekilde her tamsayı, bazı a ve b sayma sayıları için $a - b$ biçiminde yazılabilir, ve tamsayının kendisi $\{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\colon a+y = b+x\}$ kümesi olarak tanımlanır.

Burada $\mathbb{N}$ yapısının özelliklerini, *Peano Aksiyomlarından* türetebiliriz, ve ondan sonra $\mathbb{R}$'nin tam sıralı bir cisim olduğunu, teorem olarak kanıtlayabiliriz.

Peano Aksiyomlarını kullanmadan $\mathbb{N}$, sıfır olmayan sonlu olan *ordinal sayılar* tarafından oluşturulabilir. Bölüm 2'de ordinallerin özelliklerini, aksiyom olarak vereceğiz. Bölüm 3'te her ordinali bir küme olarak tanımlayacağız, ve ordinallerin *ordinal aksiyomları* sağladığını teorem olarak kanıtlayacağız. Bu şekilde gerçel analizi, kümeler kuramında temelleştirebiliriz. Ayrıca gerel analizin ve ordinal analizin bazı ortak özellikleri olacaktır.

1.3. Sayma sayıları

Şimdilik, tam tersine, gerçel sayıların yukarıdaki aksiyomlarını varsayarak $\mathbb{N}$ yapısını elde edeceğiz.

$\mathbb{R}$'nin her A altkümesi için,

1) $1 \in A$ ve
2) A'nın her b elemanı için $b + 1 \in A$

durumunda A'ya **tümevarımlı** densin. O zaman tanıma göre

$$\mathbb{N} = \bigcap\{X \subseteq \mathbb{R}\colon X \text{ tümevarımlıdır}\}$$

olsun. Bu şekilde **sayma sayısı** olmak için gerek ve yeter koşul, $\mathbb{R}$'nin her tümevarımlı altkümesinin elemanı olmaktır. Genelde elemanları küme olan her $\mathscr{B}$ kümesi için

$$\bigcap \mathscr{B} = \{x \colon \forall Y \ (Y \in \mathscr{B} \Rightarrow x \in Y)\}.$$

Bu yeni küme, B'nin **kesişimidir.** Özel olarak

$$C \cap D = \bigcap \{C, D\}.$$

Ayrıca

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bigcap \{A_i \colon i \in \mathbb{N}\}.$$

Teorem 1 (Tümevarım)**.** $\mathbb{N}$ *tümevarımlıdır. Ayrıca* $\mathbb{N}$*'nin tek tümevarımlı altkümesi, kendisidir.*

Alıştırma 1. Teoremi kanıtlayın.

Bu teoreme göre tümevarımlı kanıtlar yapılabilir. Yani $\mathbb{N}$'nin herhangi A altkümesi için
1) $1 \in A$ ve
2) $b \in A \Rightarrow b + 1 \in A$
ise, o zaman tümevarımdan $A = \mathbb{N}$. Bu kanıtta $b \in A$ varsayımı, kanıtın **tümevarım hipotezidir.**

Lemma 1. *Her sayma sayısı, ya* 1*'dir, ya da bir* k *sayma sayısı için* $k + 1$*'dir.*

Alıştırma 2. Lemmayı kanıtlayın. (Tümevarım kullanın.)

Her a gerçel sayısı, $(a-1)+1$ biçiminde yazılabilir, ama a'nın sayma sayısı olduğunda bile $a - 1$, sayma sayısı olmayabilir.

Lemma 2. $\mathbb{N}$ *doğrusal sıralıdır, ve her* k *elemanı için*

$$k < k + 1.$$

Ayrıca

$$k < \ell \Rightarrow k + 1 < \ell + 1.$$

Alıştırma 3. Lemmayı kanıtlayın. ($\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ olduğundan $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$'den bazı özellikleri alır.)

Lemma 3. *En küçük sayma sayısı vardır, ve bu sayı* 1*'dir.*

Alıştırma 4. Lemmayı kanıtlayın. (Tümevarım ve Lemma 2'yi kullanın.)

Lemma 4. *Herhangi* k *ve* m *sayma sayıları için*

$$k \leqslant m \Leftrightarrow k < m + 1, \tag{1.1}$$

yani $\{x \in \mathbb{N} \colon x < m\} \cup \{m\} = \{x \in \mathbb{N} \colon x < m + 1\}$.

Alıştırma 5. Lemmayı kanıtlayın. (Lemma 2'den (1.1) denkliği $m < k \Leftrightarrow m + 1 \leqslant k$ biçiminde yazılabilir. Bunun bir yönü apaçıktır. Diğer yön k üzerinde tümevarım, Lemmalar 1, 2, ve 3 ile kanıtlanabilir.)

Teorem 2 (Güçlu tümevarım)**.** $A \subseteq \mathbb{N}$ *olsun, ve tüm* k *sayma sayıları için*

$$\{x \in \mathbb{N} \colon x < k\} \subseteq A \Rightarrow k \in A$$

olsun. O zaman $A = \mathbb{N}$.

Alıştırma 6. Teoremi kanıtlayın. ($\big\{x \in \mathbb{N} \colon \{y \in \mathbb{N} \colon y < x\} \subseteq A\big\}$ kümesi B olsun. Lemmalar 3 ve 4 ve tümevarım ile $B = \mathbb{N}$ olduğunu kanıtlayın.)

Örneğin güçlü tümevarımdan her sayma sayısı ya 1'dir ya da asal bir sayı tarafından bölünür. Zira bu özelliği olan sayma sayıları bir A kümesini oluştursun. Bir m için $k < m$ ise $k \in A$ olsun. Eğer $m = 1$ ise $m \in A$. Eğer m asal ise $m \in A$. Kalan durumda bir k için $1 < k < m$ ve $k \mid m$. (Burada O zaman $k \in A$, ama $k \neq 1$, dolayısıyla bir p asalı için $p \mid k$, ve sonuç olarak $p \mid m$ ve $m \in A$. Güçlü tümevarımdan $A = \mathbb{N}$.

Teorem 3 (İyisıralama)**.** $\mathbb{N}$ ***iyisıralıdır,*** *yani* $\mathbb{N}$*'nin boş olmayan her altkümesinin en küçük elemanı vardır.*

Alıştırma 7. Teoremi kanıtlayın. ($A \subseteq \mathbb{N}$ olsun, ama A'nın en küçük elemanı olmasın. Güçlü tümevarım ile $\mathbb{N} \smallsetminus A = \mathbb{N}$ kanıtlayın.)

1.4. Göndermeler

Eğer f, tanım kümesi A olan ve değer kümesi B olan bir göndermeyse, bu durum

$$f\colon A \to B$$

cümlesiyle ifade edilebilir. Ayrıca f'nin kendisinin yerine

$$x \mapsto f(x)$$

isimi kullanılabilir; Şekil 1'e, Alıştırma 13'e ve Teorem 22'ye bakın.

Eğer $f\colon A \to B$, $C \subseteq A$, $g\colon C \to B$, ve C'nin her d elemanı $g(d) = f(d)$ ise, o zaman

$$g = f \restriction C;$$

Teorem 10'un kanıtına bakın. Eğer A'dan B'ye giden birebir ve örten gönderme varsa, bu gönderme bir **eşlemedir,** ve verilen kümeler **eşleniktir;** bu durum

$$A \approx B$$

cümlesiye ifade edilir. Teorem 29'a bakın.

Herhangi A ve B kümelerinin **kartezyan çarpımı** vardır. Tanıma göre

$$A \times B = \{(x, y)\colon x \in A \wedge y \in B\}.$$

Burada

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d.$$

Eğer $f\colon A \to B$ ise, o zaman f, $A \times B$ çarpımının

$$\bigl\{\bigl(x, f(x)\bigr)\colon x \in A\bigr\}$$

altkümesini belirtir.

Bir A kümesinde tek-konumlu bir işlem, A'dan kendisine giden bir göndermedir; iki-konumlu bir işlem, $A \times A$ çarpımından A'ya giden bir göndermedir.

Gerçel analiz ve sayılar kuramında tanım kümesi $\mathbb{N}$ olan göndermeler tanımlanıp kullanılır. Örneğin $x \mapsto x!$ göndermesi için

$$1! = 1, \qquad\qquad (k+1)! = (k+1) \cdot k!$$

özyineli tanımı verilir. Bu tanım neden geçerli midir?

Tanımın geçerliliği için $\mathbb{N}$ tümevarımlı olmalıdır, ama bunu Teorem 1'den biliyoruz. Ayrıca $\mathbb{N}$, gerçel sayıların çarpması altında kapalı olmalıdır.

Teorem 4. *Tüm a ve b gerçel sayıları için*

$$a \in \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{N} \Rightarrow a + b \in \mathbb{N} \wedge a \cdot b \in \mathbb{N}.$$

Alıştırma 8. Teoremi kanıtlayın.

Şimdi $1 \in \mathbb{N}$, ve ayrıca $\mathbb{N}$'nin herhangi k elemanı için eğer $k! \in \mathbb{N}$ ise, o zaman $(k+1) \cdot k! \in \mathbb{N}$. Bu şekilde $x \mapsto x!$ göndermesi tanımlanabilir mi?

- Tümevarım veya güçlü tümevarım ile bir kümenin $\mathbb{N}$ olduğu kanıtlanabilir; ama $\{x \in \mathbb{N}\colon x! \text{ tanımlanır}\}$, iyi tanımlanmış bir küme değildir.

$$\begin{tikzcd}
\{1\} \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "g"'] & \mathbb{N} \arrow[r, "x \mapsto x+1"] \arrow[d, "g"'] & \mathbb{N} \arrow[d, "g"] \\
\{b\} \arrow[r, "\subseteq"'] & A \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$

Şekil 1.: Özyineleme

- İyisıralama ile $\mathbb{N}$'nin boş olmayan bir altümesinin elemanı bulunabilir; ama $x \mapsto x!$ göndermesi, $\mathbb{N}$'nin bir elemanı değildir.

Başka bir teoreme ihtiyacımız vardır.

Teorem 5 (Özyineleme)**.** *Bir A kümesi için*
1) $b \in A$,
2) $f : A \to A$
olsun. O zaman $\mathbb{N}$'den A'ya giden bir ve tek bir g göndermesi için
1) $g(1) = b$,
2) her k sayma sayısı için $g(k+1) = f(g(k))$.
Şekil 1'e bakın.

Örneğin $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $b = (1, 1)$, ve

$$f(x, y) = \big(x + 1, (x + 1) \cdot y\big)$$

olsun. O zaman bir ve tek bir g göndermesi için g'nin tanım kümesi $\mathbb{N}$, $g(1) = (1, 1)$, ve $g(k + 1) = f(g(k))$. Şimdi $g(k)$, $(g_1(k), g_2(k))$ olarak yazılsın. Tümevarımdan $g_1(k) = k$. Bundan dolayı

$$g_2(k + 1) = (k + 1) \cdot g_2(k).$$

Ayrıca $g_2(1) = 1$. Böylece $k!$, $g_2(k)$ olarak tanımlanabilir.

Özyineleme Teoremi kanıtı. Bir ve tek bir h göndermesi için

1) göndermenin tanım kümesi, $\mathbb{N}$'nin tek-elemanlı $\{1\}$ altkümesidir, ve
2) $h(1) = b$.

Bu gönderme h_1 olsun.

Tümevarım hipotezi olarak bir m sayma sayısı için, bir ve tek bir h göndermesi için

1) göndermenin tanım kümesi, $\mathbb{N}$'nin m elemanlı $\{1, \ldots, m\}$ altkümesi olsun,
2) $h(1) = b$ olsun, ve
3) $k < m$ ise $h(k+1) = f(h(k))$ olsun.

Bu gönderme h_m olsun. O zaman bir ve tek bir h göndermesi için

1) göndermenin tanım kümesi, $\{1, \ldots, m+1\}$ altkümesidir,
2) $h(1) = b$, ve
3) $k < m+1$ ise $h(k+1) = f(h(k))$.

Zira böyle bir h varsa, o zaman $h \restriction \{1, \ldots, m\}$ ve h_m göndermelerinin özellikleri aynıdır, dolayısıyla h_m göndermesinin biricikliğinden $h \restriction \{1, \ldots, m\} = h_m$. Bu şekilde h'nin tanımı

$$h(x) = \begin{cases} h_m(x), & x \leqslant m \text{ durumunda,} \\ f(h_m(m)), & x = m+1 \text{ durumunda} \end{cases} \tag{1.2}$$

olabilir. Ayrıca $h \restriction \{1, \ldots, m\} = h_m$ olmalıdır, dolayısıyla h'nin kendisi, (1.2) eşitliğini sağlamalıdır. Bu h göndermesi h_{m+1} olsun.

Tümevarımdan, her n sayma sayısı için, $\{1, \ldots, n\}$ kümesinden giden bir be tek bir h_n göndermesi için $h_n(1) = b$ ve $k < n$ ise $h_n(k+1) = f(h_n(k))$. Ayrıca

$$h_{m+1}(m+1) = f(h_m(m)).$$

Şimdi $g(x) = h_x(x)$ olsun. O zaman

$$g(1) = h_1(1) = b,$$
$$g(k+1) = h_{k+1}(k+1) = f(h_k(k)) = f(g(k)).$$

Bu şekilde g, istediğimiz gibidir. Bir h göndermesinin istediğimiz özelliği varsa

$$h(1) = b = g(1),$$

ve $h(m) = g(m)$ ise

$$h(m+1) = f(h(m)) = f(g(m)) = g(m+1).$$

Bu şekilde her k sayma sayısı için $h(k) = g(k)$, dolayısıyla $h = g$. □

Bazı yapılarda tümevarım kullanılabilir, ama özyineleme kullanılamaz. Örneğin p asal ise, Fermat Teoremine göre herhangi a tamsayısı için

$$a^p \equiv a \pmod{p}. \tag{1.3}$$

Tümevarım ile bu teoremi kanıtlayabiliriz, zira $1^p \equiv 1$, ve ayrıca $b^p \equiv b$ ise, o zaman

$$\begin{aligned}(b+1)^p &= b^p + pb^{p-1} + \binom{p}{2}b^{p-2} + \cdots + \binom{p}{p-2}b^2 + pb + 1\\ &\equiv b^p + 1 \equiv b + 1 \pmod{p},\end{aligned}$$

çünkü $0 < k < p$ ise $k \mid \binom{p}{k}$. Neden bu kanıt geçerlidir? Sayılar kuramından

$$\begin{aligned}&a \equiv a_1 \land b \equiv b_1\\ &\qquad \Rightarrow a + b \equiv a_1 + b_1 \land ab \equiv a_1b_1 \pmod{p}.\end{aligned} \tag{1.4}$$

$\mathbb{Z}_p$, tamsayıların p'ye göre kalandaşlık sınıfları kümesi olsun. Bu şekilde

$$\mathbb{Z}_p = \{[x] \colon x \in \mathbb{Z}\}, \qquad [k] = \{x \in \mathbb{Z} \colon x \equiv k \pmod p\}.$$

O zaman $\mathbb{Z}_p = \{[1], \dots, [p]\}$. Ayrıca (1.4) gerektirmesine göre

$$[a] + [b] = [a + b], \qquad [a][b] = [ab]$$

tanımları geçerlidir, çünkü

$$[a] = [a_1] \wedge [b] = [b_1] \Rightarrow [a + b] = [a_1 + b_1] \wedge [ab] = [a_1 b_1].$$

Şimdi $A \subseteq \mathbb{Z}_p$ ve $[1] \in A$ olsun, ve $[k] \in A$ ise $[k+1] \in A$ olsun. O zaman tümevarımdan $A = \mathbb{Z}_p$. Zira $B = \{x \in \mathbb{N} \colon [x] \in A\}$ olsun. O zaman $1 \in B$, çünkü $[1] \in A$. Ayrıca $k \in B$ ise, o zaman $[k] \in A$, dolayısıyla $[k + 1] \in A$ ve $k + 1 \in B$. Tümevarımdan $B = \mathbb{N}$. Özel olarak $\{1, \dots, p\} \subseteq B$, dolayısıyla $\mathbb{Z}_p = A$.

Yukarıdaki gösterdiğimize göre $[1]^p = [1]$, ve $[b]^p = [b]$ ise $[b + 1]^p = [b + 1]$. O zaman tümevarımdan her a tamsayısı için $[a]^p = [a]$, yani (1.3) kalandaşlığı doğrudur.

Böylece $\mathbb{Z}_p$ yapısında tümevarım yöntemi geçerlidir; ama özyineleme yöntemi geçerli değildir. Örneğin $\mathbb{Z}_3$ yapısında hiçbir tek-konumlu g işlemi için

$$g([1]) = [2], \qquad g([k + 1]) = [k][2]$$

olmaz, çünkü olursa

$$g([2]) = [4] = [1], \qquad g([3]) = [2], \qquad g([4]) = [1],$$

ama $[4] = [1]$ olduğundan $g([4]) = g([1]) = [2]$, ve $[2] \neq [1]$.

Alıştırma 9. Özyineleme Teoreminin yukarıdaki kanıtı, $\mathbb{N}$'nin hangi özelliklerini kullanır?

1.5. Peano Aksiyomları

Özyineleme Teoreminin başka bir kanıtı vardır.

Özyineleme Teoremi ikinci kanıtı. Birinci kanıttaki gibi, istediğimiz özellikleri olan bir gönderme varsa, tek bir örnek vardır.

Şimdi elemanları gönderme olan bir $\mathscr{C}$ kümesini tanımlayacağız. $\mathscr{C}$'nin her h elemanı için,

1) h'nin tanım kümesi $\mathbb{N}$'nin bir altkümesidir, ve
2) herhangi ℓ sayma sayısı için, $h(\ell)$ tanımlanırsa, o zaman
   a) ya $\ell = 1$ ve $h(\ell) = b$,
   b) ya da bir k sayma sayısı için $\ell = k + 1$, $h(k)$ tanımlanır, ve
   $$h(\ell) = f(h(k)).$$

Lemma 1 sayesinde istediğimiz gibi g göndermesi varsa $\mathscr{C}$'nin elemanıdır. Her k sayma sayısı için, A'nın bir ve tek bir d elemanı için, $\mathscr{C}$'nin bir h elemanı için $h(k) = d$ göstereceğiz. Bu şekilde $g(k) = d$ tanımlanabilir.

Yukarıdaki özelliği olan k sayma sayıları, E kümesini oluştursun. Tanım kümesi $\{1\}$ olan bir h göndermesi için $h(1) = b$. O zaman $h \in \mathscr{C}$. Ayrıca $\mathscr{C}$'nin herhangi h elemanı için $h(1)$ tanımlanırsa, o zaman $h(1) = b$ olmalıdır, çünkü hiç k sayma sayısı için $k + 1 = 1$ değildir. Bu şekilde $1 \in E$.

Şimdi $k \in E$ olsun. O zaman A'nın bir ve tek bir d elemanı için, $\mathscr{C}$'nin bir h elemanı için $h(k) = d$.

1. Eğer $h(k+1)$ tanımlanırsa, o zaman $\mathscr{C}$'nin tanımına göre $h(k + 1) = f(d)$, çünkü $k + 1 \neq 1$, ve ayrıca herhangi ℓ sayma sayısı için eğer $\ell + 1 = k + 1$ ise, o zaman $\ell = k$.
2. Eğer $h(k + 1)$ tanımlanmazsa, o zaman yeni bir h^* gön-

dermesi için

$$h^*(x) = \begin{cases} h(x), & \text{eğer } h(x) \text{ tanımlanırsa,} \\ f(d), & \text{eğer } x = k+1. \end{cases}$$

O zaman $h^* \in \mathscr{C}$ ve $h^*(k+1) = f(d)$.
Bu şekilde, her durumda, $\mathscr{C}$'nin bir h elemanı için $h(k+1) = f(d)$.

Mümkümse $d^* \in A$, $d^* \neq f(d)$ olsun, ama $\mathscr{C}$'nin bir h elemanı için $h(k+1) = d^*$ olsun. O zaman $k+1 \neq 1$ olduğundan bir ℓ sayma sayısı için $\ell + 1 = k + 1$, $h(\ell)$ tanımlanır, ve $d^* = f(h(\ell))$. Ama bu durumda $\ell = k$, dolayısıyla $h(\ell) = d$ ve $d^* = f(d)$.

Sonuç olarak $k+1 \in E$. Tümevarım ile $E = \mathbb{N}$. □

Yukarıdaki kanıt, sadece $\mathbb{N}$'nin aşağıdaki özelliklerini kullanır:

1. $1 \in \mathbb{N}$.
2. $k \in \mathbb{N}$ ise $k+1 \in \mathbb{N}$.
3. Tümevarım yöntemi geçerlidir.
4. Her k sayma sayısı için $1 \neq k+1$.
5. Tüm k ve ℓ sayma sayıları için $k+1 = \ell+1$ ise $k = \ell$.

Bu özelliklere **Peano Aksiyomları** denir. Peano Aksiyomları, $\mathbb{N}$'de iki-konumlu toplama işleminin tanımlandığını varsaymaz; sadece tek-konumlu $x \mapsto x+1$ işlemi vardır. Ama özyineleme yöntemiyle $\mathbb{N}$'de toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayabiliriz:

$$a + (b+1) = (a+b) + 1, \quad a \cdot 1 = a, \quad a \cdot (b+1) = ab + a.$$

Tümevarım ve kalan Peano Aksiyomları ile toplamanın ve çarpmanın özelliklerini kanıtlayabiliriz; ayrıca $\mathbb{N}$'nin sıralamasını tanımlayıp özelliklerini kanıtlayabiliriz. Ondan sonra yukarıdaki gibi $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ yapılarını elde edebiliriz.

Tam tersine tam sıralı cisim aksiyomlarını kullanarak $\mathbb{N}$ yapısını inşa ettik ve onun Peano Aksiyomlarını sağladığını teorem olarak kanıtladık. (Teorem 1 ve Lemmalar 2 ve 3'e bakın.)

Sayma sayılarına sıfırı ekleyerek doğal sayıları elde ederiz. Doğal sayılar, *sonlu ordinallerdir.* Sonsuz ordinaller de vardır. Ordinallerin aksiyomlarını kullanarak toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayayıp özelliklerini kanıtlayacağız. Ondan sonra küme aksiyomlarını kullanarak ordinalleri inşa edeceğiz. Bu şekilde bildiğimiz tüm matematik, küme aksiyomları tarafından gerektirilir.

2. Ordinal sayılar

Kümeler kuramımızda her kümenin her elemanı, bir küme olacaktır. (Bu şekilde "elemanları küme olan küme" ifadesi gereksiz kılınacaktır.) Bir küme boş olacaktır, ve bu küme,

$$\varnothing$$

olarak yazılır. Ayrıca

$$0 = \varnothing \tag{2.1}$$

tanımlayacağız. Herhangi a kümesi için

$$a' = a \cup \{a\} \tag{2.2}$$

tanımlayacağız. Ayrıca

$$1 = 0', \qquad 2 = 1', \qquad 3 = 2', \qquad 4 = 3', \qquad \dots \tag{2.3}$$

olacaktır. O zaman $0, 1, 2, 3, \dots$, **doğal sayı** olacaklardır. Doğal sayılar, sonlu **ordinal** olacaklardır, ama sonsuz ordinaller de var olacaktır. Örneğin

$$\omega = \{0, 1, 2, \dots\}, \tag{2.4}$$

ve ω, en küçük sonsuz ordinal olacaktır.

Şimdilik (2.1), (2.2), ve (2.4) tanımlarını kullanmayacağız. Bölüm 3'te, küme aksiyomlarını kullanarak, ordinalleri tanımlayıp özelliklerini teorem olarak kanıtlayacağız; ama şimdilik ordinallerın aşağıda verilen özelliklerini aksiyom olarak kabul edeceğiz.

2.1. Kümeler ve sınıflar

Ordinaller bir

$$\mathbf{ON}$$

sınıfını oluşturacaktır. Biz zaten $\mathbb{Z}_p$ yapısını tanımlamak için *denklik sınıfları* kullandık. Normalde bir denklik sınıfı bir kümedir. Aslında her küme bir sınıftır, ama her sınıf bir küme değildir.

Her sınıf *tek serbest değişkeni olan bir formül* tarafından tanımlanır. Örneğin birazdan kullanacağımız

$$x \in a,$$
$$x \in \boldsymbol{A} \Leftrightarrow x \in \boldsymbol{B},$$
$$x \in c \Leftrightarrow x \in d,$$
$$x \notin x$$

ifadeleri, serbest değişkeni x olan formüldürler. (Formüllerin resmi tanımı için, B Eki'ne bakın.) Eğer φ, tek serbest değişkeni olan bir formül ise, o zaman φ'nin tanımladığı sınıfın elemanları, φ'yi sağlayan kümelerdir, ve sınıfın kendisi

$$\{x\colon \varphi(x)\}$$

olarak yazılabilir. Sınıflar büyük siyah harfler de ile göstereceğiz. Küçük harfler her zaman küme olacaktır. Örnegin

$$\boldsymbol{A} = \{x\colon \varphi(x)\}$$

ise, o zaman her b kümesi için

$$b \in \boldsymbol{A} \Leftrightarrow \varphi(b).$$

Her küme bir sınıfa eşittir. Özel olarak her a kümesi için

$$a = \{x\colon x \in a\}.$$

Genelde elemanları aynı olan sınıflar ve kümeler eşittir:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \forall x\ (x \in \boldsymbol{A} \Leftrightarrow x \in \boldsymbol{B}),$$
$$c = d \Leftrightarrow \forall x\ (x \in c \Leftrightarrow x \in d).$$

Teorem 6 (Russell Paradoksu)**.** *Her sınıf bir kümeye eşit değildir. Örneğin $\{x\colon x \notin x\}$ sınıfı bir kümeye eşit değildir.*

Kanıt. $x \notin x$ formülü $\varphi(x)$ olarak yazılsın. Eğer $\{x\colon \varphi(x)\} = a$ ise, o zaman her b kümesi için

$$b \in a \Leftrightarrow \varphi(b).$$

Özel olarak $a \in a \Leftrightarrow \varphi(a)$, yani

$$a \in a \Leftrightarrow a \notin a;$$

ama bu bir çelişkidir. Bu şekilde $\{x\colon x \notin x\}$ sınıfı, bir a kümesine eşit olamaz. □

Öklid'de eşitlik, aynılık değildir. İkizkenar bir üçgenin iki eşit kenarı vardır. Bu kenarlar iki olduğundan birbiriyle aynı değildir. Ama eşit sınıflar aynı olarak düşünülebilir.

2.2. Ordinallerin özellikleri

Küçük Yunan harfleri her zaman ordinal gösterecektir. Özel olarak α, β, γ, δ, ve θ, sabit ordinaldirler, ama ξ, η, ve ζ, ordinal değişkendirler. Örnegin

$$\{\xi\colon \varphi(\xi)\} = \{\eta\colon \varphi(\eta)\} = \{\zeta\colon \varphi(\zeta)\} = \{x\colon x \in \mathbf{ON} \wedge \varphi(x)\}.$$

Şimdilik aksiyom olarak kabul edeceğimiz **ON**'nin özellikleri aşağıdadır.

1. En az bir ordinal vardır.

2. **ON** iyisıralıdır.

3. Her ordinal için, daha büyük ordinal vardır.

4. **ON**'nin herhangi altkümesinin **ON**'de olan üstsınırı vardır.

5. Herhangi α için $\{\xi : \xi < \alpha\}$ sınıfı bir kümedir.

6. Herhangi $\boldsymbol{F}$ tek-konumlu ordinal işlemi için, herhangi α için $\{\boldsymbol{F}(\xi) : \xi < \alpha\}$ sınıfı bir kümedir.

7. Bir α için $\{\xi : \xi < \alpha\}$ kümesi sonsuzdur.

Aslında her α ordinali, $\{\xi : \xi < \alpha\}$ kümesinin kendisi olarak tanımlanabilecektir; ama şimdilik bu tanımı kullanmayıp sadece yukarıdaki yedi özelliği kullanacağız.

Teorem 7 (Burali-Forti Paradoksu)**. ON** *küme değildir.*

Kanıt. Her ordinalin daha büyüğü olduğundan **ON**'nin en büyük elemanı yoktur, dolayısıyla **ON**'nin **ON**'de olan üstsınırı yoktur. **ON**'nin her altkümesinin üstsınırı olduğundan **ON**'nin kendisi küme olamaz. □

Şimdi 0, en küçük ordinal olarak tanımlansın, ve herhangi α ordinali için

$$\alpha' = \min\{\xi : \alpha < \xi\} \tag{2.5}$$

tanımlansın. Bu şekilde α', α'nın **ardılı,** yani α'dan büyük olan ordinallerin en küçüğüdür. Şimdi yukarıdaki (2.3) tanımlarını kullanabiliriz. Ne sıfır ne bir ardıl olan ordinal, bir **limittir.**

Teorem 8. *Sıfır olmayan bir α ordinalinin limit olması için gerek ve yeter koşul,*

$$\beta < \alpha \Rightarrow \beta' < \alpha.$$

Alıştırma 10. Teoremi kanıtlayın.

Eğer $\{\xi : \xi < \alpha\}$ kümesi sonlu ise, α'ya da **sonlu** densin; diğer durumda, **sonsuz.** O zaman en küçük sonsuz ordinal bir limittir, ve her limit ordinali sonsuzdur. En küçük limit

$$\omega$$

olsun. O zaman $\{\xi : \xi < \omega\}$, doğal sayılar kümesidir.

Teorem 9 (Ordinal Tümevarım)**.** $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbf{ON}$ *olsun. Eğer*

1) $0 \in \boldsymbol{A}$,

2) Her β için

$$\beta \in \boldsymbol{A} \Rightarrow \beta' \in \boldsymbol{A},$$

3) her γ limiti için

$$\{\xi : \xi < \gamma\} \subseteq \boldsymbol{A} \Rightarrow \gamma \in \boldsymbol{A}$$

ise, o zaman $\boldsymbol{A} = \mathbf{ON}$.

Kanıt. Verilen koşullar altında $\mathbf{ON} \setminus \boldsymbol{A}$ farkının en küçük elemanı olamaz. Zira mümkümse $\alpha = \min(\mathbf{ON} \setminus \boldsymbol{A})$ olsun.

1. $\alpha = 0$ ise $\alpha \in \boldsymbol{A}$.

2. $\alpha = \beta'$ ise $\beta < \alpha$ olduğundan $\beta \in \boldsymbol{A}$, ama bu durumda $\beta' \in \boldsymbol{A}$, yani $\alpha \in \boldsymbol{A}$.

3. Varsayımımıza göre $\beta < \alpha$ ise $\beta \in \boldsymbol{A}$. Bu şekilde

$$\{\xi : \xi < \alpha\} \subseteq \boldsymbol{A}.$$

Eğer α bir limit ise, o zaman α da $\boldsymbol{A}$'nın elemanı olmalıdır.

Bu şekilde her ordinal ya 0, ya bir ardıl, ya da bir limit olduğundan $\alpha \in \boldsymbol{A}$, ama $\alpha = \min(\mathbf{ON} \smallsetminus \boldsymbol{A})$ varsayımına göre $\alpha \notin \boldsymbol{A}$. Öyleyse varsayım imkânsızdır. **ON**'nin her boş olmayan altkümesinin en küçük elemanı var olduğundan $\mathbf{ON} \smallsetminus \boldsymbol{A} = \varnothing$, dolayısıyla $\boldsymbol{A} = \mathbf{ON}$. □

Ordinal tümevarım ile Teorem 10'u, Teorem 12'yi, Teorem 21'i, ve daha sonraki teoremler kanıtlayacağız. Ordinal tümevarım kullanılan bir kanıtın üç adımı vardır:

1) sıfır adımı,
2) ardıl adımı, ve
3) limit adımı.

Ayrıca kanıtta iki tümevarım hipotezi vardır. Ordinal Tümevarım Teoremini yazarken kullandığımız harflerde,

- ardıl adımının hipotezi, $\beta \in \boldsymbol{A}$;
- limit adımının hipotezi, $\{\xi \colon \xi < \gamma\} \subseteq \boldsymbol{A}$, yani

$$\forall \xi \ (\xi < \gamma \Rightarrow \xi \in \boldsymbol{A}).$$

Teorem 10 (Ordinal Özyineleme)**.** *Varsayımlarımız,*

1) $\theta \in \mathbf{ON}$,
2) $\boldsymbol{F} \colon \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$.

O zaman bir ve tek bir $\boldsymbol{H}$ *ordinal işlemi için*

1) $\boldsymbol{H}(0) = \theta$,
2) her β *ordinali için* $\boldsymbol{H}(\beta') = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{H}(\beta))$,
3) her γ *limiti için* $\boldsymbol{H}(\gamma) = \sup\{\boldsymbol{H}(\xi) \colon \xi < \gamma\}$.

Kanıt. Her α için, tanım kümesi $\{\xi \colon \xi \leqslant \alpha\}$ olan bir ve tek bir h_α göndermesi için,

1) $h_\alpha(0) = \theta$,
2) $\beta < \alpha$ ise $h_\alpha(\beta') = \boldsymbol{F}(h_\alpha(\beta))$,
3) $\gamma \leqslant \alpha$ ve limit ise $h_\alpha(\gamma) = \sup\{h_\alpha(\xi) \colon \xi < \gamma\}$.

Bunu kanıtlamak için, ordinal tümevarım kullanacağız.

1. h_0, $h_0(0) = \theta$ ile tanımlanabilir ve tanımlanmalıdır. Yani $\alpha = 0$ durumunda iddia doğrudur.

2. Eğer $\alpha = \delta$ durumunda iddia doğru ise $h_{\delta'}$,

$$h_{\delta'}(\xi) = \begin{cases} h_\delta(\xi), & \xi \leqslant \delta \text{ durumunda,} \\ \boldsymbol{F}(h_\delta(\delta)), & \xi = \delta' \text{ durumunda} \end{cases}$$

kuralı tarafından tanımlanabilir. Ayrıca $h_{\delta'}$ bu şekilde tanımlanmalıdır, çünkü hipoteze göre

$$h_{\delta'} \restriction \{\xi \colon \xi \leqslant \delta\} = h_\delta$$

olmalıdır. Bundan dolayı $\alpha = \delta'$ durumunda iddia doğrudur.

3. Benzer şekilde bir δ için $\alpha < \delta$ durumlarında iddia doğru ise, o zaman $\alpha < \beta < \delta$ durumlarında $h_\alpha(\alpha) = h_\beta(\alpha)$. Eğer ayrıca δ bir limit ise, o zaman h_δ,

$$h_\delta(\xi) = \begin{cases} h_\xi(\xi), & \xi < \delta \text{ durumunda,} \\ \sup\{h_\xi(\xi) \colon \xi < \delta\}, & \xi = \delta \text{ durumunda} \end{cases}$$

kuralı tarafından tanımlanabilir ve tanımlanmalıdır, ve bu şekilde $\alpha = \delta$ durumunda iddia doğrudur.

Ordinal tümevarımımız bitti. Şimdi $\boldsymbol{H}(\xi) = h_\xi(\xi)$ tanımlanabilir ve tanımlanmalıdır. $\square$

Bölümler 4, 5, ve 6'da ordinal özyinelemeyle ordinal toplama, çarpma, ve kuvvet alma işlemlerini tanımlayacağız.

2.3. Normal işlemler

Şimdi $\boldsymbol{F}$, herhangi tek-konumlu ordinal işlem olsun. Ordinal aksiyomarına göre $\{\boldsymbol{F}(\xi) \colon \xi < \alpha\}$ sınıfı her zaman bir kümedir, ve bu kümenin üstsınırı vardır. Ayrıca ordinaller iyisıralanmış olduğundan $\{\boldsymbol{F}(\xi) \colon \xi < \alpha\}$ kümesinin üstsınırlarının en küçüğü vardır, yani kümenin **supremumu** vardır. Bu supremum,

$$\sup\{\boldsymbol{F}(\xi)\colon \xi < \alpha\}, \qquad\qquad \sup_{\xi<\alpha} \boldsymbol{F}(\xi)$$

şekillerinde yazılabilir.

Teorem 11. *Her α ordinali için*

$$\sup\{\xi\colon \xi < \alpha\} = \begin{cases} 0, & \alpha = 0 \textit{ durumunda}, \\ \beta, & \alpha = \beta' \textit{ durumunda}, \\ \alpha, & \alpha\textit{'nın limit olduğu durumda.} \end{cases}$$

Alıştırma 11. Teoremi kanıtlayın.

Alıştırma 12. $\{\xi'\colon \xi < \alpha\}$ kümesinin supremumunu hesaplayın.

Eğer

$$\alpha \leqslant \beta \Rightarrow \boldsymbol{F}(\alpha) \leqslant \boldsymbol{F}(\beta)$$

ise, o zaman $\boldsymbol{F}$ **artandır.** Eğer

$$\alpha < \beta \Rightarrow \boldsymbol{F}(\alpha) < \boldsymbol{F}(\beta) \tag{2.6}$$

ise, o zaman $\boldsymbol{F}$ **kesin artandır.** Eğer
1) $\boldsymbol{F}$ kesin artan ve
2) her α limiti için $\boldsymbol{F}(\alpha) = \sup\{\boldsymbol{F}(\xi)\colon \xi < \alpha\}$
ise, o zaman $\boldsymbol{F}$'ye **normal** densin.

Alıştırma 13. $\xi \mapsto \xi'$ işleminin kesin artan olup normal olmadığını gösterin.

Alıştırma 14. Normal olan bir işlem örneği verin.

Sonraki teoremin ilk kullanımı, Teorem 22'nin kanıtında olacaktır.

Teorem 12. $\boldsymbol{F}\colon \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$ *olsun. Eğer*

1) her α *için* $\boldsymbol{F}(\alpha) < \boldsymbol{F}(\alpha')$ *ve*

2) her α *limiti için* $\boldsymbol{F}(\alpha) = \sup\{\boldsymbol{F}(\xi)\colon \xi < \alpha\}$

ise, o zaman $\boldsymbol{F}$ *normaldir.*

Kanıt. $\boldsymbol{F}$'nin kesin artan olduğunu göstermek yeter. (2.6) gerektirmesini β üzerinden tümevarım kullanarak kanıtlayacağız.

1. $\beta = 0$ ise, (2.6) iddiası doğrudur, çünkü hiçbir zaman $\alpha < 0$ değildir.

2. $\beta = \gamma$ durumda (2.6) iddia doğru olsun. Eğer $\alpha < \gamma'$ ise, o zaman $\alpha \leqslant \gamma$, dolayısıyla

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}(\alpha) &\leqslant \boldsymbol{F}(\gamma) && \text{[tümevarım hipotezi]}\\ &< \boldsymbol{F}(\gamma'). && \text{[varsayım]} \end{aligned}$$

3. γ limit ve $\alpha < \gamma$ ise, o zaman $\alpha < \alpha' < \gamma$, dolayısıyla

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}(\alpha) &< \boldsymbol{F}(\alpha') && \text{[varsayım]}\\ &\leqslant \sup\{\boldsymbol{F}(\xi)\colon \xi < \gamma\} && \text{[supremumun tanımı]}\\ &= \boldsymbol{F}(\gamma). && \text{[varsayım]} \end{aligned}$$

(Bu adımda bir tümevarım hipotezi kullanılmıyor.) □

Sonraki teoremin ilk kullanımı, Teorem 23'ün kanıtında olacaktır.

Teorem 13. $\boldsymbol{F}\colon \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$ *ve normal olsun. O zaman* $\mathbf{ON}$*'nin boş olmayan her* A *altkümesi için*

$$\boldsymbol{F}(\sup(A)) = \sup_{\xi \in A} \boldsymbol{F}(\xi). \tag{2.7}$$

Kanıt. A kümesinin supremumu α olsun. $\boldsymbol{F}$ kesin artan olduğundan $\beta \in A$ ise $\boldsymbol{F}(\beta) \leqslant \boldsymbol{F}(\alpha)$. Bundan dolayı, eğer $\alpha \in A$ ise, o zaman

$$\sup_{\xi \in A} \boldsymbol{F}(\xi) = F(\alpha),$$

yani (2.7) doğrudur. Şimdi $\alpha \notin A$ olsun. O zaman α ardıl olamaz. A boş olmadığından $\alpha = 0$ olamaz, dolayısıyla α limittir. Bu durumda $\boldsymbol{F}$ normal olduğundan

$$\boldsymbol{F}(\alpha) = \sup_{\xi < \alpha} \boldsymbol{F}(\xi). \tag{2.8}$$

Ayrıca

$$\sup_{\xi \in A} \boldsymbol{F}(\xi) \leqslant \sup_{\xi < \alpha} \boldsymbol{F}(\xi), \tag{2.9}$$

çünkü $A \subseteq \{\xi \colon \xi < \alpha\}$. Eğer $\beta < \alpha$ ise, A'nın bir γ elemanı için $\beta \leqslant \gamma < \alpha$, dolayısıyla $\boldsymbol{F}(\beta) \leqslant \boldsymbol{F}(\gamma) \leqslant \sup_{\xi \in A} \boldsymbol{F}(\xi)$. Bu şekilde

$$\sup_{\xi < \alpha} \boldsymbol{F}(\xi) \leqslant \sup_{\xi \in A} \boldsymbol{F}(\xi). \tag{2.10}$$

Sonuç olarak (2.8), (2.9), ve (2.10) beraber (2.7) eşitliğini tekrar gerektirir. □

2.4. Süreklilik

Normallik kavramının yerine gerçel analizden gelen süreklilik kavramını kullanabiliriz. Ordinallerde, kesin artan bir işlemin normal olması için gerek ve yeter bir koşul, işlemin sürekli olmasıdır. Bu sonucu kurmak, bu altbölümün işidir.

Tekrar $\boldsymbol{F} \colon \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$ olsun. Varsa, $\boldsymbol{F}$'nin bir noktadaki sürekliliği gerçel analizdeki gibi tanımlanır. Aslında eğer

$$\beta < \boldsymbol{F}(\alpha) < \gamma$$

koşulunu sağlayan herhangi β ve γ için, bazı δ ve θ için,

$$\delta < \alpha < \theta \wedge \forall \xi \; (\delta < \xi < \theta \Rightarrow \beta < \boldsymbol{F}(\xi) < \gamma)$$

ise, o zaman $\boldsymbol{F}$, α'da **süreklidir.** Eğer $\boldsymbol{F}(\alpha) = 0$ veya $\alpha = 0$ ise, o zaman $\beta = -1$ veya $\delta = -1$ olabilir. Benzer şekilde **soldan** ve **sağdan** olan süreklilik tanımlanabilir.

Lemma 5. **ON**'*de her tek-konumlu işlem, limit olmayan her noktada süreklidir ve her noktada sağdan süreklidir.*

Alıştırma 15. Lemmayı kanıtlayın.

Gerçel analizdeki gibi $\boldsymbol{F} \colon \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$ ise

$$\limsup_{\xi \to \alpha^-} \boldsymbol{F}(\xi) = \min \left\{ \sup_{\eta < \xi < \alpha} \boldsymbol{F}(\xi) \colon \eta < \alpha \right\}$$

tanımını yaparız.

Lemma 6. $\boldsymbol{F} \colon \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$ *ve artan ise*

$$\limsup_{\xi \to \alpha^-} \boldsymbol{F}(\xi) = \sup_{\xi < \alpha} \boldsymbol{F}(\xi).$$

Alıştırma 16. Lemmayı kanıtlayın.

Lemma 7. $\boldsymbol{F} \colon \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$ *olsun.* $\boldsymbol{F}$ *bir* α *limitinde süreklidir ancak ve ancak*

$$\limsup_{\xi \to \alpha^-} \boldsymbol{F}(\xi) = \boldsymbol{F}(\alpha).$$

Alıştırma 17. Lemmayı kanıtlayın.

Teorem 14. $\boldsymbol{F} \colon \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$ *ve kesin artan olsun. O zaman* $\boldsymbol{F}$ *normaldir ancak ve ancak her noktada süreklidir.*

Alıştırma 18. Teoremi kanıtlayın.

Alıştırma 19. Sürekli olup normal olmayan bir işlem örneği verin.

3. Küme aksiyomları

Bu bölümde **ON**'nin sayfa 21'deki özelliklerini ve

$$\alpha = \{\xi \colon \xi < \alpha\} \tag{3.1}$$

tanımlama imkânını, küme aksiyomlarından elde edeceğiz. Bölümler 4, 5, ve 6'da sadece (3.1) eşitliğini kullanacağız.

3.1. Ordinaller varsa

Tanıma göre

$$\varnothing = \{x \colon x \in x \land x \notin x\},$$
$$a \cup \{b\} = \{x \colon x \in a \lor x = b\}.$$

AKSİYOM 1 (Boş Küme)**.** *$\varnothing$ bir kümedir.*

AKSİYOM 2 (Bitiştirme)**.** *Tüm a ve b kümeleri için $a \cup \{b\}$ bir kümedir.*

AKSİYOM 3 (Yerleştirme)**.** *Her $\boldsymbol{F}$ göndermesi için, eğer bir A kümesinin her b elemanı için $\boldsymbol{F}(b)$ tanımlanırsa, o zaman*

$$\{\boldsymbol{F}(x) \colon x \in a\}$$

sınıfı bir kümedir.

Teorem 15. **ON**'*de tanımlanan bir* $\boldsymbol{F}$ *göndermesi için, her* α *için*

$$\boldsymbol{F}(\alpha) = \{\boldsymbol{F}(\xi) \colon \xi < \alpha\},$$

ve sonuç olarak, tüm α *ve* β *için*

$$\left.\begin{aligned} \alpha < \beta &\Leftrightarrow \boldsymbol{F}(\alpha) \in \boldsymbol{F}(\beta), \\ \alpha \leqslant \beta &\Leftrightarrow \boldsymbol{F}(\alpha) \subseteq \boldsymbol{F}(\beta). \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

Kanıt. Yerleştirme Aksiyomu sayesinde, Ordinal Özyineleme Teoreminin kanıtının yöntemini kullanarak

1) $\boldsymbol{F}(0) = \varnothing$,
2) $\boldsymbol{F}(\alpha') = \boldsymbol{F}(\alpha) \cup \{\boldsymbol{F}(\alpha)\}$,
3) α limit ise

$$\boldsymbol{F}(\alpha) = \{\boldsymbol{F}(\xi) \colon \xi < \alpha\} \tag{3.3}$$

koşullarını sağlayan bir $\boldsymbol{F}$ göndermesinin var olduğunu kanıtlayabiliriz. O zaman ordinal tümevarımdan her α için (3.3) doğrudur. O halde

$$\begin{aligned} \alpha < \beta &\Rightarrow \boldsymbol{F}(\alpha) \in \boldsymbol{F}(\beta), \\ \alpha \leqslant \beta &\Rightarrow \boldsymbol{F}(\alpha) \subseteq \boldsymbol{F}(\beta). \end{aligned}$$

Tersleri de doğrudur. Zira $\boldsymbol{F}(\alpha) \in \boldsymbol{F}(\beta)$ ama $\beta \leqslant \alpha$ ise, o zaman

$$\boldsymbol{F}(\alpha) \in \boldsymbol{F}(\alpha).$$

Bu durumda bir γ için $\gamma < \alpha$ ve $\boldsymbol{F}(\alpha) = \boldsymbol{F}(\gamma)$, dolayısıyla $\boldsymbol{F}(\gamma) \in \boldsymbol{F}(\gamma)$. O halde boş olmayan $\{\xi \colon \boldsymbol{F}(\xi) \in \boldsymbol{F}(\xi)\}$ sınıfının en küçük elemanı yoktur, ki bu çelişkidir. Sonuç olarak (3.2) doğrudur □

Her $\boldsymbol{A}$ sınıfı için

$$\bigcup \boldsymbol{A} = \{x \colon \exists y\ (y \in A \land x \in y)\}$$

olsun. Bu yeni sınıf, $\boldsymbol{A}$'nın **bileşimidir.** Özel olarak

$$B \cup C = \bigcup \{B, C\}.$$

Sonuç. *Teoremde $\boldsymbol{F}$ birebirdir, dolayısıyla $\boldsymbol{F}(\xi) = \xi$ varsayılabilir. Bu durumda*

$$\alpha = \{\xi \colon \xi < \alpha\},$$
$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \in \beta \Leftrightarrow \alpha \subset \beta.$$

*Ayrıca $B \subseteq$ **ON** ise*

$$\sup B = \bigcup B.$$

Alıştırma 20. Sonucu kanıtlayın.

Şimdi **ON**'nin sonuçtaki gibi olduğunu varsayalım. O zaman **ON**, $\in$ bağıntısı tarafından iyisıralanmıştır, ve sınıfın her elemanı sınıfın bir altkümesidir. Ayrıca, sınıfın her elemanının aynı özellikleri vardır (yani eleman $\in$ bağıntısı tarafından iyisıralanmıştır, ve elemanın her elemanı elemanın bir altkümesidir).

Herhangi $\boldsymbol{A}$ sınıfı için

$$\forall x \ (x \in \boldsymbol{A} \Rightarrow x \subseteq \boldsymbol{A})$$

ise, o zaman $\boldsymbol{A}$ **geçişlidir.** Geçişli kümeler

$$\forall y \ \big(y \in x \Rightarrow \forall z \ (z \in y \Rightarrow z \in x)\big)$$

formülü tarafından tanımlanmış sınıfı oluşturur. Ayrıca $\in$ tarafından doğrusal sıralanmış kümeler

$$\forall y \ (y \in x \Rightarrow y \notin y) \wedge$$

$$\begin{aligned}\forall y\,\forall z\,\forall u\,\big(y\in x\wedge z\in x\wedge u\in x\Rightarrow\\ (y\in z\wedge z\in u\Rightarrow y\in u)\big)\wedge\\ \forall y\,\forall z\,(y\in x\wedge z\in x\Rightarrow y\in z\vee y=z\vee y\in z)\end{aligned}$$

formülü tarafından tanımlanmış sınıfı oluşturur. Bu formül $\varphi(x)$ ise $\in$ tarafından iyisıralanmış kümeler

$$\begin{aligned}\varphi(x)\wedge\forall y\,\Big(\forall z\,(z\in y\Rightarrow z\in x)\wedge\exists z\;z\in y\Rightarrow\\ \exists z\,\big(z\in y\wedge\forall u\,(u\in y\Rightarrow z\in u\vee z=u)\big)\Big)\end{aligned}$$

formülü tarafından tanımlanmış sınıfı oluşturur.

3.2. Ordinaller vardır

Şimdi sayfa 21'deki özelliklerini unutunca, yeniden her **ordinali,**

1) geçişli ve
2) $\in$ tarafından iyisıralanmış

bir küme olarak tanımlarız. O zaman ordinaller bir sınıf oluştururlar. Önceki gibi bu sınıf **ON** olsun, ve **ON**'nin elemanları, küçük Yunan harfleriyle yazılsın. Sadece küme aksiyomları kullanarak, sayfa 21'deki özellikleri teorem olarak elde edeceğiz.

Teorem 16. ON *geçişlidir, yani her ordinalin her elemanı bir ordinaldir.*

Kanıt. $\alpha\in\mathbf{ON}$ be $b\in\alpha$ olsun. O zaman $b\subseteq\alpha$, dolayısıyla α gibi b, $\in$ tarafından iyisıralanmıştır.

Şimdi $c\in b$ olsun. O zaman $c\in\alpha$, dolayısıyla $c\subseteq\alpha$. Özel olarak $d\in c$ ise $d\in\alpha$. Bu durumda d, c, ve b, α'nın elemanıdırlar, ve $d\in c$ ve $c\in b$, dolayısıyla $d\in b$ çünkü α'da $\in$ geçişlidir. Sonuç olarak $c\subseteq b$. O halde b geçişlidir. □

Lemma 8. **ON**, *$\in$ tarafından sıralanmıştır, yani* **ON***'de $\in$, yansımasız ve geçişlidir.*

Kanıt. $\alpha \in$ **ON** olsun. α'da $\in$ bağıntısı yansımasız olduğundan $\alpha \notin \alpha$, çünkü $\alpha \in \alpha$ ise α'nın bir β elemanı için $\beta \in \beta$.
Eğer $\beta \in \alpha$ ve $\gamma \in \beta$ ise, α geçişli olduğundan $\gamma \in \alpha$. □

Her ordinalin boş olmayan her a altkümesinin, $\in$ bağıntısına göre en küçük elemanıdır. Buradaki a'nın yerine bir *sınıf* kullanmak isteriz. Sonraki aksiyomu kullanacağız.

AKSİYOM 4 (Ayırma). *Her kümenin her altsınıfı bir kümedir.*

Bu şekilde her a kümesi ve $\{x\colon \varphi(x)\}$ sınıfı için

$$\{x\colon x \in a \wedge \varphi(x)\}$$

sınıfı bir kümedir. Bu küme

$$\{x \in a\colon \varphi(x)\}$$

olarak yazılabilir.

Lemma 9. **ON***'de $\in$ ve $\subset$ sıralamaları aynıdır.*

Kanıt. Kanıtın iki parçası vardır.
$\boxed{\boldsymbol{\alpha \in \beta \Rightarrow \alpha \subset \beta}\text{:}}$ $\alpha \in \beta$ olsun. β geçişli olduğundan $\alpha \subseteq \beta$. β'da $\in$ yansımasız olduğundan $\alpha \neq \beta$. Bu şekilde $\alpha \subset \beta$.
$\boxed{\boldsymbol{\alpha \subset \beta \Rightarrow \alpha \in \beta}\text{:}}$ $\alpha \subset \beta$ olsun. O zaman $\beta \smallsetminus \alpha$ kümesi boş değildir. $\gamma = \min(\beta \smallsetminus \alpha)$ olsun. O zaman $\gamma \in \beta$. Biz $\boxed{\boldsymbol{\gamma = \alpha}}$ kanıtlayacağız. Bu kanıtın iki parçası vardır.
$\boxed{\boldsymbol{\gamma \subseteq \alpha}\text{:}}$ $\delta \in \gamma$ olsun. O zaman β geçişli olduğundan $\delta \in \beta$. Ayrıca $\delta \notin \beta \smallsetminus \alpha$, çünkü $\delta \in \min(\beta \smallsetminus \alpha)$. O halde $\delta \in \alpha$. Böylece $\gamma \subseteq \alpha$.

$\boxed{\boldsymbol{\alpha \subseteq \gamma}:}$ $\delta \in \alpha$ olsun. O zaman $\delta \in \beta$, çünkü $\alpha \subset \beta$, dolayısıyla $\delta \notin \beta \smallsetminus \alpha$. Ama $\delta \in \gamma$, $\delta = \gamma$, veya $\gamma \in \delta$; ve son iki imkân olmaz. Zira $\gamma \in \beta \smallsetminus \alpha$ olduğundan $\delta \neq \gamma$; ve $\gamma \notin \alpha$ olduğundan $\gamma \notin \delta$, çünkü $\delta \in \alpha$. Bu şekilde $\alpha \subseteq \gamma$. □

Şimdi **ON**'nin $\in$ veya $\subset$ sıralamasını $<$ olarak yazabiliriz.

Lemma 10. **ON**'*nin* $<$ *sıralaması doğrusaldır.*

Kanıt. $\alpha \nleqslant \beta$ olsun. $\boxed{\boldsymbol{\beta < \alpha}}$ göstereceğiz.

Varsayımdan $\alpha \nsubseteq \beta$, dolayısıyla $\alpha \smallsetminus \beta \neq \varnothing$. $\gamma = \min(\alpha \smallsetminus \beta)$ olsun. O zaman $\gamma \in \alpha$, yani $\gamma < \alpha$. $\boxed{\boldsymbol{\gamma = \beta}}$ göstereceğiz.

$\boxed{\boldsymbol{\gamma \subseteq \beta}:}$ $\delta \in \gamma$ olsun. O zaman $\delta < \min(\alpha \smallsetminus \beta)$, ama $\delta \in \alpha$, dolayısıyla $\delta \in \beta$.

$\boxed{\boldsymbol{\gamma \not\subset \beta}:}$ $\gamma \in \alpha \smallsetminus \beta$ olduğundan $\gamma \notin \beta$, yani $\gamma \not\subset \beta$. □

Teorem 17. **ON**'*nin* $<$ *doğrusal sıralaması bir iyisıralamadır. Aslında* **ON**'*nin boş olmayan her* altsınıfının *en küçük elemanı vardır.*

Kanıt. $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbf{ON}$ ve $\alpha \in \boldsymbol{A}$ olsun.

- $\alpha \cap \boldsymbol{A} = \varnothing$ ise $\alpha = \min(\boldsymbol{A})$.
- $\alpha \cap \boldsymbol{A} \neq \varnothing$ ise $\min(\alpha \cap \boldsymbol{A}) = \min(\boldsymbol{A})$. □

Şimdi Teorem 16 ve 17'den **ON** hem geçişli hem $\in$ tarafından iyisıralanmıştır. Tanıma göre **ON**'nin elemanlarının aynı özellikleri vardır. Ama **ON** $\in$ tarafından sıralanmış olduğundan kendinin elemanı olamaz. Bu şekilde **ON** küme olamaz. Bu sonuç, Teorem 7 olarak gördüğümüz **Burali-Forti Paradoksudur.**

Teorem 18. $\varnothing \in \mathbf{ON}$ *ve* $\alpha \in \mathbf{ON}$ *ise* $\alpha \cup \{\alpha\} \in \mathbf{ON}$, *ve ayrıca her* β *ordinali için*

$$\beta \leqslant \alpha \vee \alpha \cup \{\alpha\} \subseteq \beta.$$

Alıştırma 21. Teoremi kanıtlayın.

Şimdi

$$0 = \varnothing, \qquad \alpha' = \alpha \cup \{\alpha\}$$

tanımlayabiliriz.

AKSİYOM 5 (Sonsuzluk). *Ne limit olan ne limit içeren ordinallerin oluşturduğu sınıf bir kümedir.*

Sonsuzluk Aksiyomu tarafından verilen küme, ω'dır.

AKSİYOM 6. *Her kümenin bileşimi bir kümedir.*

Teorem 19. *Sayfa 32'de tanımlanmış* **ON** *sınıfı, Sayfa 21'deki özellikleri sağlar.*

Alıştırma 22. Teoremi kanıtlayın.

4. Ordinal Toplama

4.1. Tanım ve özellikler

Özyineli tanıma göre her α ordinali için

$$\alpha + 0 = \alpha, \tag{4.1}$$

$$\alpha + \beta' = (\alpha + \beta)', \tag{4.2}$$

$$\gamma \text{ limit ise } \alpha + \gamma = \sup\{\alpha + \xi : \xi < \gamma\}. \tag{4.3}$$

Ordinal toplamanın özelliklerinin çoğu, tümevarım ile kanıtlanır; ama ilk teoremimiz, tümevarımdan değildir.

Teorem 20. $\alpha + 1 = \alpha'$.

Kanıt.

$$\begin{aligned} \alpha + 1 &= \alpha + 0' && [(2.3) \text{ tanımından}] \\ &= (\alpha + 0)' && [(4.2) \text{ tanımından}] \\ &= \alpha'. && [(4.1) \text{ tanımından}] \end{aligned}$$

□

Teorem 21. *Her α için $0 + \alpha = \alpha$.*

Kanıt. Ordinal tümevarım kullanacağız.

1. Eğer $\alpha = 0$ ise

$$\begin{aligned} 0 + \alpha &= 0 + 0 && [\text{varsayımdan}] \\ &= 0 && [(4.1) \text{ tanımından}] \\ &= \alpha. && [\text{varsayımdan}] \end{aligned}$$

2. Eğer

$$0 + \beta = \beta \tag{4.4}$$

ise, o zaman

$$\begin{aligned} 0 + \beta' &= (0 + \beta)' && [(4.2) \text{ tanımından}] \\ &= \beta'. && [(4.4) \text{ hipotezinden}] \end{aligned}$$

3. Bir α limiti için

$$\forall \xi \ (\xi < \alpha \Rightarrow 0 + \xi = \xi) \tag{4.5}$$

ise, o zaman

$$\begin{aligned} 0 + \alpha &= \sup\{0 + \xi \colon \xi < \alpha\} && [(4.3) \text{ tanımından}] \\ &= \sup\{\xi \colon \xi < \alpha\} && [(4.5) \text{ hipotezinden}] \\ &= \alpha. && [\text{Teorem 11'den}] \end{aligned}$$

□

Alıştırma 23. Aşağıdaki kanıt nerede yanlıştır?

Her α için $1 + \alpha = \alpha'$ kanıtlayacağız.

1. $1 + 0 = 1 = 0'$.
2. $1 + \beta = \beta'$ ise, o zaman

$$1 + \beta' = (1 + \beta)' = (\beta')'.$$

3. γ limit ve $\forall \xi \ (\xi < \gamma \Rightarrow 1 + \xi = \xi')$ ise

$$1 + \gamma = \sup_{\xi < \gamma}(1 + \xi) = \sup_{\xi < \gamma}(\xi') = \gamma'.$$

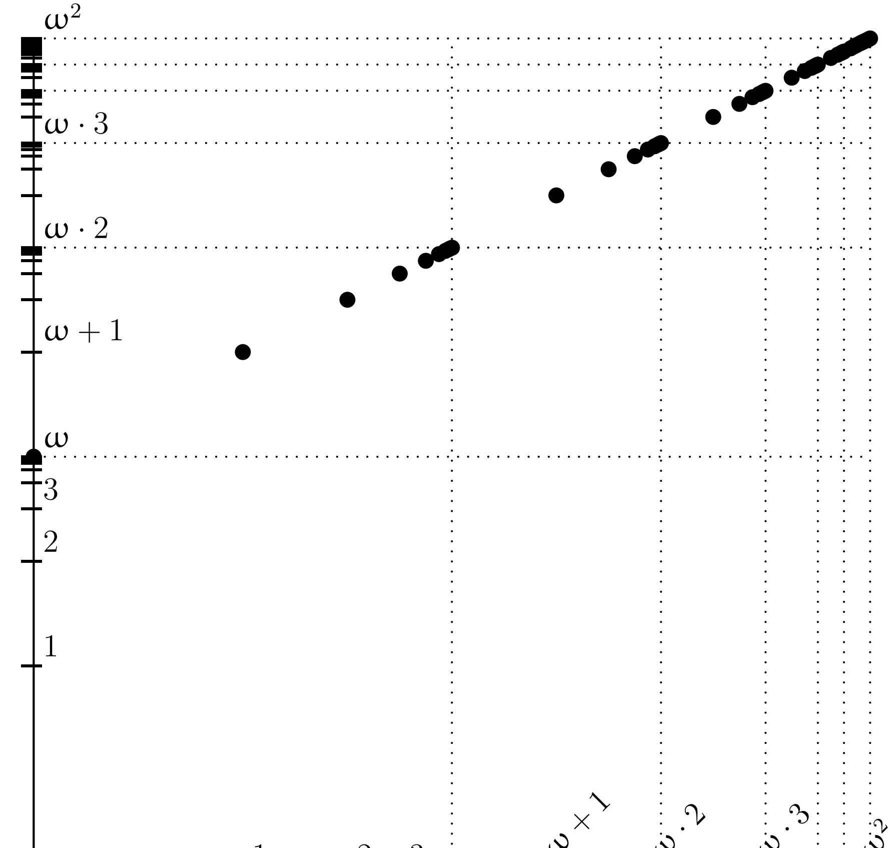
Böylece her α için $1 + \alpha = \alpha'$.

Teorem 22. *Her α ordinali için $\xi \mapsto \alpha + \xi$ normaldir.*

Kanıt. Teorem 12'den $\alpha + \beta < \alpha + \beta'$ göstermek yeter. Ayrıca

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &< (\alpha + \beta)' && [(2.5) \text{ tanımından}] \\ &= \alpha + \beta'. && [(4.2) \text{ tanımından}] \end{aligned}$$

□



Şekil 2.: $\eta = \omega + \xi$ denkleminin grafiği

Örneğin Şekil 2'ye bakın. Şekilde

$$\omega \cdot 2 = \omega + \omega, \quad \omega \cdot 3 = \omega \cdot 2 + \omega, \quad \omega \cdot 4 = \omega \cdot 3 + \omega,$$

ve genelde, Teorem 5'i kullanan resmi özyineli tanıma göre,

$$\alpha \cdot 0 = 0, \qquad \alpha \cdot 1 = \alpha, \qquad \alpha \cdot (k+1) = \alpha \cdot k + \alpha.$$

Bu şekilde $\alpha \cdot n$, "α'dır n kere" veya "α'nın n katıdır." Ayrıca

$$\omega^2 = \omega \cdot \omega = \sup_{x<\omega}(\omega \cdot x).$$

Alıştırma 24. $\xi \mapsto \xi \cdot 2$ göndermesi kesin artan mıdır? Sürekli midir?

Alıştırma 25. Aşağıdaki kanıt nerede yanlıştır?

> Her α için, her β için, $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ kanıtlayacağız.
> 1. $\alpha + 0 = \alpha = 0 + \alpha$.
> 2. Eğer $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ ise, o zaman
> $$\alpha + \beta' = (\alpha + \beta)' = (\beta + \alpha)' = \beta' + \alpha.$$
> 3. Eğer γ limit ve $\forall\xi\ (\xi < \gamma \Rightarrow \alpha + \xi = \xi + \alpha)$ ise, o zaman
> $$\alpha + \gamma = \sup_{\xi<\gamma}(\alpha + \xi) = \sup_{\xi<\gamma}(\xi + \alpha) = \gamma + \alpha.$$
>
> Bu şekilde her durumda $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

Teorem 23. *Ordinal toplama birleşmelidir.*

Kanıt. Her γ için, tümevarım kullanarak tüm α ve β için

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

göstereceğiz.

1. $\alpha + (\beta + 0) = \alpha + \beta$ [(4.1) tanımından]
$\qquad = (\alpha + \beta) + 0.$ [(4.1) tanımından]

2. Eğer

$$\alpha + (\beta + \delta) = (\alpha + \beta) + \delta \tag{4.6}$$

ise, o zaman

$$\begin{aligned}
\alpha + (\beta + \delta') &= \alpha + (\beta + \delta)' && [(4.2) \text{ tanımından}]\\
&= (\alpha + (\beta + \delta))' && [(4.2) \text{ tanımından}]\\
&= ((\alpha + \beta) + \delta)' && [(4.6) \text{ hipotezinden}]\\
&= (\alpha + \beta) + \delta'. && [(4.2) \text{ tanımından}]
\end{aligned}$$

3. δ limit olsun, ve

$$\forall\xi\ \big(\xi < \delta \Rightarrow \alpha + (\beta + \xi) = (\alpha + \beta) + \xi\big) \tag{4.7}$$

olsun. O zaman

$$\begin{aligned}
&(\alpha + \beta) + \delta\\
&= \sup\{(\alpha + \beta) + \xi \colon \xi < \delta\} && [(4.3) \text{ tanımı}]\\
&= \sup\{\alpha + (\beta + \xi) \colon \xi < \delta\} && [(4.7) \text{ hipotezi}]\\
&= \alpha + \sup\{\beta + \xi \colon \xi < \delta\} && [\xi \mapsto \alpha + \xi \text{ normaldir}]\\
&= \alpha + (\beta + \delta). && [(4.3) \text{ tanımı}]
\end{aligned}$$

□

Şimdi herhangi n sayma sayısı için

$$\alpha \cdot n = \underbrace{\alpha + \cdots + \alpha}_{n}$$

anlaşılabilir.

Teorem 24. *$k < \omega$ ve $\ell < \omega$ ise $\alpha \cdot (k + \ell) = \alpha \cdot k + \alpha \cdot \ell$.*

Alıştırma 26. Teoremi kanıtlayın. (Tümevarım kullanın.)

Teorem 25. *Her $\xi \mapsto \xi + \alpha$ göndermesi artandır.*

Kanıt. $\beta \leqslant \gamma$ olsun. α üzerinden tümevarım kullanarak

$$\beta + \alpha \leqslant \gamma + \alpha$$

kanıtlayacağız.

1. $\beta + 0 = \beta \leqslant \gamma = \gamma + 0$.
2. $\beta + \alpha = \gamma + \alpha$ ise tabii ki

$$\beta + \alpha' = (\beta + \alpha)' = (\gamma + \alpha)' = \gamma + \alpha'.$$

$\beta + \alpha < \gamma + \alpha$ ise, Teorem 8'e göre

$$\beta + \alpha' = (\beta + \alpha)' \leqslant \gamma + \alpha < (\gamma + \alpha)' = \gamma + \alpha'.$$

3. Eğer δ limit ise

$$\forall \xi \ (\xi < \delta \Rightarrow \beta + \xi < \gamma + \xi)$$

olsun. O zaman

$$\beta + \delta = \sup_{\xi < \delta}(\beta + \xi) \leqslant \sup_{\xi < \delta}(\gamma + \xi) = \gamma + \delta. \qquad \square$$

4.2. Hesaplamalar

Bu altbölümün teoremleri tümevarım kullanmaz.

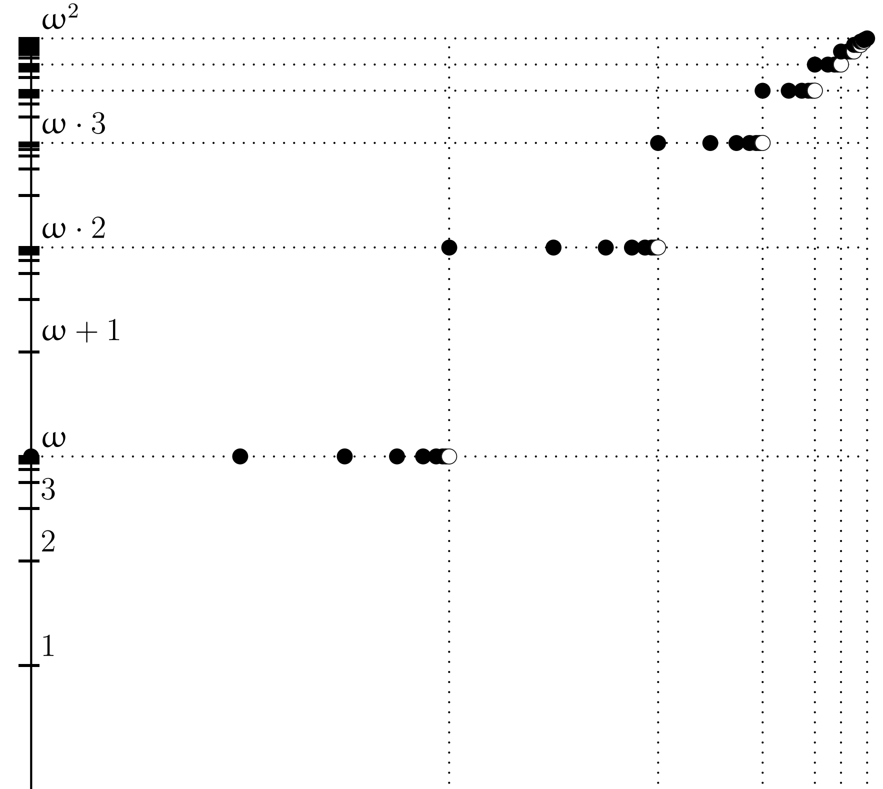
Teorem 26. *$k < \omega$ ise $k + \omega = \omega$. (Şekil 3'e bakın.)*

Kanıt. $k + \omega = \sup\{k + x \colon x < \omega\} = \omega$. $\square$

Sonuç. *$k < \omega$ ve $1 \leqslant n < \omega$ ise*

$$k + \omega \cdot n = \omega \cdot n.$$

Alıştırma 27. Sonucu kanıtlayın.



Şekil 3.: $\eta = \xi + \omega$ denkleminin grafiği

Teorem 27 (Çıkarma)**.** *$\alpha \leqslant \beta$ ise*

$$\alpha + \xi = \beta \tag{4.8}$$

denkleminin bir ve tek bir çözümü vardır.

Kanıt. Denklemin çözümü varsa, Teorem 22'ye göre tek çözüm vardır.

Teoremler 21 ve 25'ten $\alpha + \beta \geqslant \beta$, dolayısıyla $\{\xi\colon \alpha + \xi \leqslant \beta\}$ sınıfının β' üstsınırı vardır. Şimdi γ, sınıfının supremumu olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\alpha + \gamma &= \alpha + \sup\{\xi\colon \alpha + \xi \leqslant \beta\}\\ &= \sup\{\alpha + \xi\colon \alpha + \xi \leqslant \beta\} \leqslant \beta,\\ (\alpha + \gamma)' &= \alpha + \gamma' > \beta,\end{aligned}$$

dolayısıyla $\alpha + \gamma = \beta$. □

Alıştırma 28. $\alpha \leqslant \beta$ varsayınca, $\{\xi\colon a + \xi \geqslant \beta\}$ sınıfının boş olmayıp sınıfın en küçük elemanının (4.8) denkleminin çözümü olduğunu gösterin.

Teorem 28. *$\omega + \alpha = \alpha$ ancak ve ancak $\omega^2 \leqslant \alpha$.*

Kanıt.
$$\begin{aligned}\omega + \omega^2 &= \omega + \sup_{x<\omega}(\omega \cdot x)\\ &= \sup_{x<\omega}(\omega + \omega \cdot x)\\ &= \sup_{x<\omega}\bigl(\omega \cdot (1 + x)\bigr)\\ &= \omega^2.\end{aligned}$$

Eğer $\alpha \geqslant \omega^2$ ise, o zaman bir β için $\omega^2 + \beta = \alpha$, dolayısıyla

$$\omega + \alpha = \omega + \omega^2 + \beta = \omega^2 + \beta = \alpha.$$

Şimdi $\alpha < \omega^2$ olsun. O zaman bir k doğal sayısı için

$$\omega \cdot k \leqslant \alpha < \omega \cdot (k+1),$$
$$\omega \cdot (k+1) \leqslant \omega + \alpha,$$

dolayısıyla $\alpha < \omega + \alpha$. □

Teorem sayesinde $\omega \leqslant \alpha < \omega^2$ ise, o zaman bir α_1 için

$$\omega + \alpha_1 = \alpha, \qquad \alpha_1 < \alpha.$$

Eğer $\omega \leqslant \alpha_1$ ise, o zaman bir α_2 için

$$\omega + \alpha_2 = \alpha_1, \qquad \alpha_2 < \alpha_1,$$

ve saire. O zaman bir k için

$$\alpha = \underbrace{\omega + \cdots + \omega}_{k} + \alpha_k = \omega \cdot k + \alpha_k.$$

ON iyisıralı olduğundan bir k için $\alpha_k < \omega$. Bu şekilde

$$\{\xi \colon \xi < \omega^2\}$$

kümesinin her elemanı, $\omega \cdot k + \ell$ biçiminde yazılabilir. Verilen küme, toplama altında kapalıdır, ve toplama kuralı,

$$(\omega \cdot k + \ell) + (\omega \cdot m + n) = \omega \cdot (k+m) + n.$$

Alıştırma 29. $\alpha = \omega \cdot 17 + 6$ ve $\beta = \omega \cdot 1000 + 5$ ise $\alpha + \beta$ toplamını hesaplayın.

4.3. Kardinaller

Şimdi herhangi A ve B kümeleri için

$$A \sqcup B = (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$$

olsun; bu bileşim, A ve B'nin **ayrık bileşimidir.** Bölüm 3'ten

$$\alpha = \{\xi \colon \xi < \alpha\}$$

anlaşmasını kullanacağız.

Teorem 29. $\alpha + \beta \approx \alpha \sqcup \beta$.

Kanıt. Teorem 27'den

$$\begin{cases} (\xi, 0) \mapsto \xi, \\ (\eta, 1) \mapsto \alpha + \eta \end{cases}$$

kuralı, $\alpha \sqcup \beta$ ayrık bileşiminden $\alpha + \beta$ kümesine giden bir eşleme tanımlar. □

Bir A kümesi bir ordinalle eşlenik olsun. Tanıma göre

$$\operatorname{kard}(A) = \min\bigl\{\xi \colon \xi \approx A\bigr\};$$

bu ordinal, A'nın **kardinalidir.** Kardinaller, κ, λ, μ, ve ν harfleri ile gösterilecektir.

Eğer $f \colon A \to B$ ve $C \subseteq A$ ise

$$f[C] = \{f(x) \colon x \in C\}$$

olsun. Eğer f birebir ise, o zaman A'nın B'ye bir **gömmesidir,** ve

$$A \approx f[A] \subseteq B.$$

Bu durumda
$$f\colon A \xrightarrow{\preccurlyeq} B$$
yazalım, ve öyle bir f gömmesi varsa
$$A \preccurlyeq B$$
yazalım.

Teorem 30 (Schröder–Bernstein)**.** *$A \preccurlyeq B$ ve $B \preccurlyeq A$ ise*
$$A \approx B.$$

Kanıt. $f\colon A \xrightarrow{\preccurlyeq} B$ ve $g\colon B \xrightarrow{\preccurlyeq} A$ olsun. Özyinelemeyle
$$\begin{aligned} A_0 &= A, & A_{n+1} &= g[B_n], \\ B_0 &= B, & B_{n+1} &= f[A_n] \end{aligned}$$
olsun. O zaman
$$\begin{aligned} f[A_0 \smallsetminus A_1] &= B_1 \smallsetminus B_2, \\ g[B_0 \smallsetminus B_1] &= A_1 \smallsetminus A_2, \end{aligned}$$
dolayısıyla $A_0 \smallsetminus A_2 \approx B_0 \smallsetminus B_2$. Benzer şekilde
$$A_n \smallsetminus A_{n+2} \approx B_n \smallsetminus B_{n+2},$$
dolayısıyla
$$A \smallsetminus \bigcap_{i<\omega} A_i \approx B \smallsetminus \bigcap_{i<\omega} B_i.$$
Ayrıca
$$f\left[\bigcap_{i<\omega} A_i\right] = \bigcap_{i<\omega} f[A_i] = \bigcap_{0<i<\omega} B_i = \bigcap_{i<\omega} B_i,$$
dolayısıyla $\bigcap_{i<\omega} A_i \approx \bigcap_{i<\omega} B_i$, ve sonuç olarak $A \approx B$. □

Teorem 31. $\xi \mapsto \operatorname{kard}(\xi)$ *artandır.*

Kanıt. Eğer $\alpha \leqslant \beta$ ama $\operatorname{kard}(\beta) \leqslant \operatorname{kard}(\alpha)$ ise, o zaman

$$\alpha \preccurlyeq \beta \approx \operatorname{kard}(\beta) \preccurlyeq \operatorname{kard}(\alpha) \approx \alpha,$$

dolayısıyla $\alpha \approx \beta$. □

Teorem 32. $k < \omega$ *ise* $\operatorname{kard}(k) = k$.

Alıştırma 30. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 33. $\operatorname{kard}(\omega + \omega) = \omega$.

Alıştırma 31. Teoremi kanıtlayın.

Sonuç. $\{\xi \colon \omega \leqslant \xi < \omega^2\}$ *kümesinin her elemanının kardinali* ω*'dır.*

Alıştırma 32. Sonucu kanıtlayın.

5. Ordinal çarpma

5.1. Tanım ve özellikler

Özyineli tanıma göre her α için

$$\alpha \cdot 0 = 0,$$
$$\alpha \cdot \beta' = \alpha \cdot \beta + \alpha,$$
$$\gamma \text{ limit ise } \alpha \cdot \gamma = \sup\{\alpha \cdot \xi \colon \xi < \gamma\}.$$

Ordinal çarpma hakkında ilk teoremimizin bir şıkkı tümevarım kullanmaz; kalanlar tümevarım kullanıyor.

Teorem 34.

1. $\alpha \cdot 1 = \alpha$.
2. $1 \cdot \alpha = \alpha$.
3. $0 \cdot \alpha = 0$.

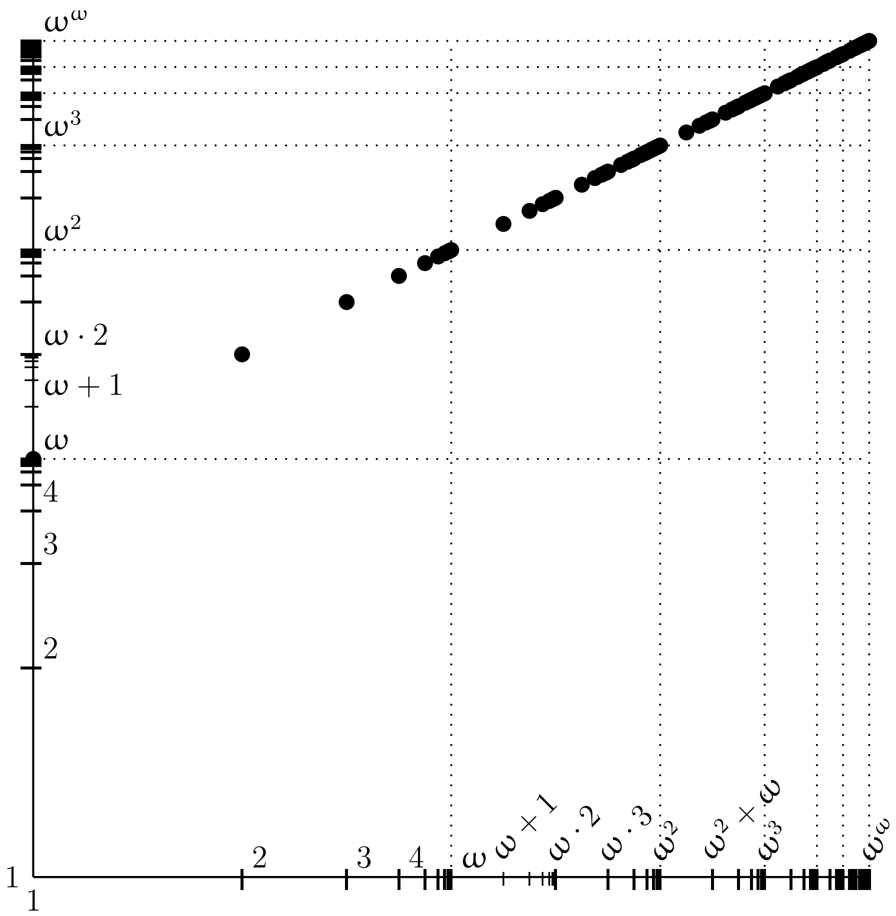
Alıştırma 33. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 35. *$\alpha \geqslant 1$ ise $\xi \mapsto \alpha \cdot \xi$ işlemi normaldir.*

Alıştırma 34. Teoremi kanıtlayın.

Örneğin Şekil 4'e bakın. Şekilde

$$\omega^2 = \omega \cdot \omega, \qquad \omega^3 = \omega^2 \cdot \omega, \qquad \omega^4 = \omega^3 \cdot \omega,$$



Şekil 4.: $\eta = \omega \cdot \xi$ denkleminin grafiği

ve genelde, Teorem 5'i kullanan resmi özyineli tanıma göre,

$$\alpha^0 = 1, \qquad \alpha^1 = \alpha, \qquad \alpha^{k+1} = \alpha^k \cdot \alpha.$$

Ayrıca

$$\omega^\omega = \sup_{x<\omega}(\omega^x).$$

Alıştırma 35. $\xi \mapsto \xi^2$ göndermesi kesin artan mıdır? Sürekli midir?

Teorem 36. *Ordinal çarpma, toplama üzerine soldan dağılır.*

Kanıt. Ordinal tümevarım ile

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma \tag{5.1}$$

kanıtlayacağız.

1. $\alpha \cdot (\beta + 0) = \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta + 0 = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot 0.$
2. Eğer (5.1) doğru ise, o zaman

$$\begin{aligned}\alpha \cdot (\beta + \gamma') &= \alpha \cdot (\beta + \gamma)' \\ &= \alpha \cdot (\beta + \gamma) + \alpha \\ &= (\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma) + \alpha \\ &= \alpha \cdot \beta + (\alpha \cdot \gamma + \alpha) \\ &= \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma'.\end{aligned}$$

3. Şimdi γ limit ve

$$\forall \xi \ (\xi < \gamma \Rightarrow \alpha \cdot (\beta + \xi) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \xi)$$

olsun. Eğer $\alpha = 0$ ise, iddia apaçıktır, dolayısıyla $\alpha > 0$ varsayacağız.

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \sup_{\xi<\gamma}(\beta + \xi) \qquad \text{[tanım]}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{\xi<\gamma}\bigl(\alpha\cdot(\beta+\xi)\bigr) && [\eta\mapsto\alpha\cdot\eta \text{ normaldir}]\\
&= \sup_{\xi<\gamma}(\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\xi) && [\text{tümevarım hipotezi}]\\
&= \alpha\cdot\beta+\sup_{\xi<\gamma}(\alpha\cdot\xi) && [\eta\mapsto\alpha\cdot\beta+\eta \text{ normaldir}]\\
&= \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma. && [\text{tanım}]
\end{aligned}
$$

□

Alıştırma 36. Aşağıdaki kanıt nerede yanlıştır?

1. $0\cdot(\beta+\gamma)=0=0+0=0\cdot\beta+0\cdot\gamma$.
2. Eğer (5.1) doğru ise, o zaman

$$
\begin{aligned}
\alpha'\cdot(\beta+\gamma) &= \alpha\cdot(\beta+\gamma)+(\beta+\gamma)\\
&= (\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma)+(\beta+\gamma)\\
&= (\alpha\cdot\beta+\beta)+(\alpha\cdot\gamma+\gamma)\\
&= \alpha'\cdot\beta+\alpha'\cdot\gamma.
\end{aligned}
$$

3. Eğer α limit ve $\forall\xi\ \bigl(\xi<\alpha\Rightarrow\xi\cdot(\beta+\gamma)=\xi\cdot\beta+\xi\cdot\gamma\bigr)$ ise

$$
\begin{aligned}
\alpha\cdot(\beta+\gamma) &= \sup_{\xi<\alpha}\bigl(\xi\cdot(\beta+\gamma)\bigr)\\
&= \sup_{\xi<\alpha}\bigl(\xi\cdot\beta+\xi\cdot\gamma\bigr)\\
&= \sup_{\xi<\alpha}(\xi\cdot\beta)+\sup_{\xi<\alpha}(\xi\cdot\gamma)\\
&= \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma.
\end{aligned}
$$

Alıştırma 37. Aşağıdaki kanıt nerede yanlıştır?

1. $(\alpha+\beta)\cdot 0=0=0+0=\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0$.
2. Eğer $(\alpha+\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma$ ise, o zaman

$$
\begin{aligned}
(\alpha+\beta)\cdot\gamma' &= (\alpha+\beta)\cdot\gamma+(\alpha+\beta)\\
&= (\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma)+(\alpha+\beta)\\
&= (\alpha\cdot\gamma+\alpha)+(\beta\cdot\gamma+\beta)\\
&= \alpha\cdot\gamma'+\beta\cdot\gamma'.
\end{aligned}
$$

3. Eğer γ limit ve $\forall\xi\ \big(\xi < \gamma \Rightarrow (\alpha+\beta)\cdot\xi = \alpha\cdot\xi+\beta\cdot\xi\big)$ ise

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\cdot\gamma &= \sup_{\xi<\gamma}\big((\alpha+\beta)\cdot\xi\big)\\ &= \sup_{\xi<\gamma}(\alpha\cdot\xi+\beta\cdot\xi)\\ &= \sup_{\xi<\gamma}(\alpha\cdot\xi)+\sup_{\xi<\gamma}(\beta\cdot\xi)\\ &= \alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma.\end{aligned}$$

Teorem 37. *Ordinal çarpma birleşmelidir.*

Alıştırma 38. Teoremi kanıtlayın.

Şimdi herhangi n sayma sayısı için

$$\alpha^n = \underbrace{\alpha\cdots\alpha}_{n}$$

anlaşılabilir.

Teorem 38. *$k < \omega$ ve $\ell < \omega$ ise $\alpha^{k+\ell} = \alpha^k\cdot\alpha^\ell$.*

Alıştırma 39. Teoremi kanıtlayın. (Tümevarım kullanın.)

Teorem 39. *Her $\xi \mapsto \xi\cdot\alpha$ işlemi artandır.*

Alıştırma 40. Teoremi kanıtlayın.

5.2. Hesaplamalar

Lemma 11. *$0 < \ell < \omega$ ise $1+\omega^\ell = \omega^\ell$.*

Alıştırma 41. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 40. *$k < m < \omega$ ise $\omega^k+\omega^m = \omega^m$.*

Kanıt. Bir ℓ için, $k+\ell=m$ ve $0<\ell<\omega$, dolayısıyla

$$\begin{aligned}\omega^k+\omega^m &= \omega^k+\omega^{k+\ell}\\ &= \omega^k+\omega^k\cdot\omega^\ell\\ &= \omega^k\cdot(1+\omega^\ell)\\ &= \omega^k\cdot\omega^\ell\\ &= \omega^{k+\ell}\\ &= \omega^m.\end{aligned}$$ □

Teorem 41. $1\leqslant k<\omega$ *ise* $k\cdot\omega=\omega$. *(Şekil 5'e bakın.)*

Alıştırma 42. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 42 (Bölme)**.** $1\leqslant\alpha$ *ise* (ξ,η) *için*

$$\alpha\cdot\eta+\xi=\beta\wedge\xi<\alpha \tag{5.2}$$

sisteminin bir ve tek bir çözümü vardır.

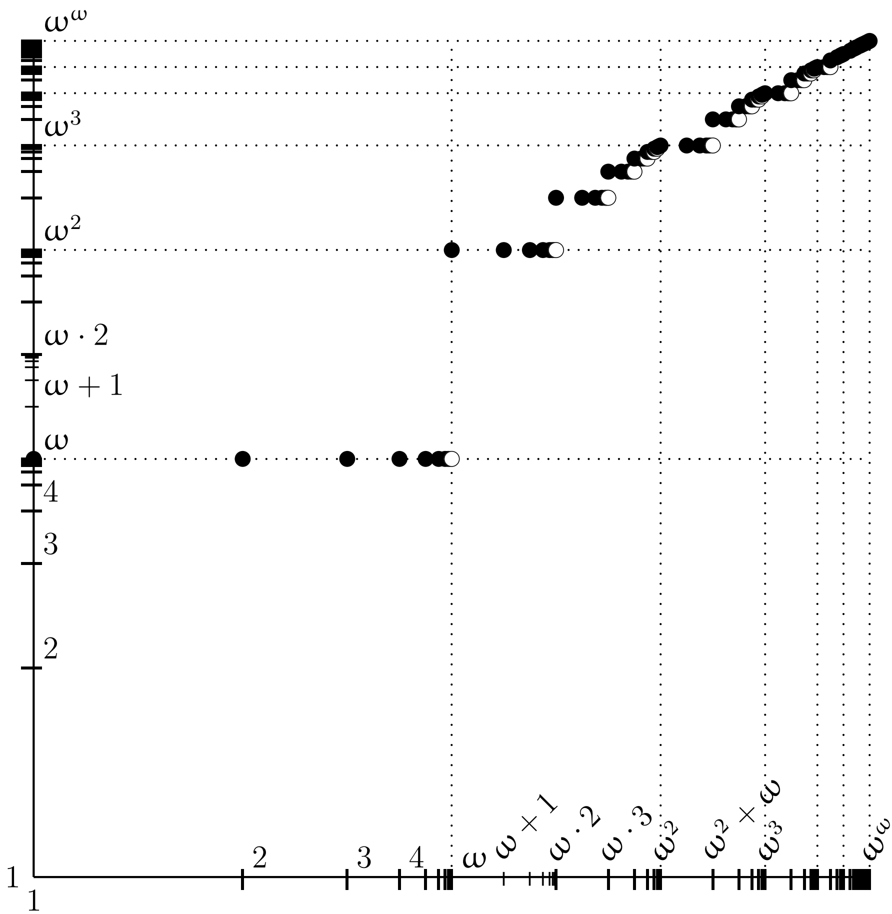
Alıştırma 43. Teoremi kanıtlayın. Örneğin, aşağıdaki iddiaları gösterin.

1. $\alpha>0$ ise $\alpha\cdot\beta\geqslant\beta$.
2. $\{\eta\colon\alpha\cdot\eta\leqslant\beta\}$ kümesinin üstsınırı vardır.
3. $\sup\{\eta\colon\alpha\cdot\eta\leqslant\beta\}=\delta$ olsun. O zaman $\alpha\cdot\gamma+\xi=\beta$ denkleminin γ çözümü vardır, ve $\delta<\alpha$. Ayrıca (γ,δ), (5.2) sisteminin tek çözümü vardır.

Teorem 43. ω^ω*,*

$$\omega\cdot\xi=\xi$$

denkleminin en küçük çözümüdür.



Şekil 5.: $\eta = \xi \cdot \omega$ denkleminin grafiği

Kanıt.
$$\begin{aligned}\omega \cdot \omega^{\omega} &= \omega \cdot \sup_{x<\omega}(\omega^x)\\ &= \sup_{x<\omega}(\omega \cdot \omega^x)\\ &= \sup_{x<\omega}(\omega^{1+x})\\ &= \omega^{\omega}.\end{aligned}$$

Şimdi $\alpha < \omega^{\omega}$ olsun. O zaman bir k doğal sayısı için
$$\omega^k \leqslant \alpha < \omega^{k+1},$$
$$\omega^{k+1} \leqslant \omega \cdot \alpha,$$
dolayısıyla $\alpha < \omega \cdot \alpha$. □

Teorem sayesinde $\alpha < \omega^{\omega}$ ise, o zaman bazı α_1 ve a_0 için
$$\omega \cdot \alpha_1 + a_0 = \alpha, \qquad \alpha_1 < \alpha, \qquad a_0 < \omega.$$
Eğer $\alpha_1 > 0$ ise, o zaman bazı α_2 ve a_1 için
$$\omega \cdot \alpha_2 + a_1 = \alpha_1, \qquad \alpha_2 < \alpha_1, \qquad a_1 < \omega,$$
ve saire. O zaman bir k için
$$\begin{aligned}\alpha_{k+1} &= 0,\\ \alpha_k &= a_k,\\ \alpha_{k-1} &= \omega \cdot a_k + a_{k-1},\\ \alpha_{k-2} &= \omega^2 \cdot a_k + \omega \cdot a_{k-1} + a_{k-2},\\ &\dots\\ \alpha_1 &= \omega^{k-1} \cdot a_k + \omega^{k-2} \cdot a_{k-1} + \dots + \omega \cdot a_2 + a_1,\\ \alpha &= \omega^k \cdot a_k + \omega^{k-1} \cdot a_{k-1} + \dots + \omega^2 \cdot a_2 + \omega \cdot a_1 + a_0.\end{aligned}$$
Burada bazı a_i sıfır olabilir. Sıfır terimler silinirse, o zaman bir n için,
$$\omega > b_0 > b_1 > \dots > b_{n-1}$$

koşulunu sağlayan bazı b_i için, ve bazı c_i sayma sayıları için

$$\alpha = \omega^{b_0} \cdot c_0 + \omega^{b_1} \cdot c_1 + \cdots + \omega^{b_{n-1}} \cdot c_{n-1}.$$

Bu ifadeye α'nın **Cantor normal biçimi** denir. (0'ın Cantor normal biçimi 0'dır.)

Teorem 44. *$0 < m < \omega$ ve $\alpha < \omega^m$ ise $\alpha + \omega^m = \omega^m$.*

Kanıt. α'nın Cantor normal biçimini yazın ve Teorem 40'ı kullanın. □

Sonuç. *$m < \omega$, $n \in \mathbb{N}$ ve $k \in \mathbb{N}$ ise*

$$(\omega^m \cdot n + \alpha) \cdot k = \omega^m \cdot n \cdot k + \alpha.$$

Alıştırma 44. Sonucu kanıtlayın.

Örneğin

$$(\omega^5 \cdot 10 + \omega^3 \cdot 8 + \omega) \cdot 6 = \omega^5 \cdot 60 + \omega^3 \cdot 8 + \omega.$$

Sonucun durumunda aşağıdaki eşitlik çıkar.

$$\begin{aligned}(\omega^m \cdot n + \alpha) \cdot \omega &= \omega^m \cdot n + \underbrace{\alpha + \omega^m \cdot n}_{\omega^m \cdot n} + \underbrace{\alpha + \omega^m \cdot n}_{\omega^m \cdot n} + \cdots \\ &= \omega^m \cdot n \cdot \omega \\ &= \omega^{m+1}.\end{aligned}$$

Aslında eşitliğin gerçek kanıtının Teorem 44'e ihtiyacı yoktur.

Teorem 45. *$m < \omega$, $n \in \mathbb{N}$ ve $\alpha < \omega^m$ ise*

$$(\omega^m \cdot n + \alpha) \cdot \omega = \omega^{m+1},$$

dolayısıyla $k \in \mathbb{N}$ ise

$$(\omega^m \cdot n + \alpha) \cdot \omega^k = \omega^{m+k}.$$

Kanıt. $(\omega^m \cdot n + \alpha) \cdot k < \omega^m \cdot (n+1) \cdot k$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\omega^{m+1} &\leqslant (\omega^m \cdot n + \alpha) \cdot \omega \\
&= \sup_{x<\omega} \big((\omega^m \cdot n + \alpha) \cdot x\big) \\
&\leqslant \sup_{x<\omega} \big(\omega^m \cdot (n+1) \cdot x\big) \\
&= \omega^{m+1}.
\end{aligned}$$

□

Örneğin

$$\begin{aligned}
&(\omega^3 \cdot 4 + \omega \cdot 6) \cdot (\omega^2 \cdot 3 + 8) \\
&= (\omega^3 \cdot 4 + \omega \cdot 6) \cdot \omega^2 \cdot 3 + (\omega^3 \cdot 4 + \omega \cdot 6) \cdot 8 \\
&= \omega^5 \cdot 3 + \omega^3 \cdot 32 + \omega \cdot 6.
\end{aligned}$$

Alıştırma 45. $(\omega^9 \cdot 9 + \omega^2 \cdot 9 + \omega \cdot 9 + 9) \cdot (\omega^2 \cdot 9 + \omega \cdot 9 + 9)$ çarpımının Cantor normal biçimini hesaplayın.

5.3. Kardinaller

Teorem 46. $\alpha \cdot \beta \approx \alpha \times \beta$.

Kanıt. Teorem 42'den

$$(\xi, \eta) \mapsto \alpha \cdot \eta + \xi,$$

$\alpha \times \beta$ kartezyan çarpımından $\alpha \cdot \beta$ ordinal çarpımına giden bir eşlemedir. □

Teorem 47. $\operatorname{kard}(\omega \cdot \omega) = \omega$.

Alıştırma 46. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 48. *$\{\xi\colon \omega \leqslant \xi < \omega^\omega\}$ kümesinin her elemanının kardinali ω'dır.*

Alıştırma 47. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 49. *Her k doğal sayısı için f_k bir A_k kümesini ω'ya gömsün. O zaman*
$$\bigcup_{i<\omega} A_i \preccurlyeq \omega.$$

Kanıt. $\bigcup_{i<\omega} A_i$ bileşiminde
$$g(x) = \min\{i\colon x \in A_i\}$$
olsun. O zaman $x \mapsto \big(g(x), f_{g(x)}(x)\big)$ göndermesi, bileşimin $\omega \times \omega$ çarpımına bir gömmesidir. □

Sonuç. $\omega^\omega \approx \omega$.

Kanıt. Her n için, $\omega^{n+1} = \omega^n \cdot \omega$ olduğundan, Teorem 46'nın kanıtınından kesin bir f_n için
$$f_n\colon \omega^{n+1} \xrightarrow{\approx} \omega^n \times \omega.$$
Şimdi $g\colon \omega \times \omega \xrightarrow{\approx} \omega$ olsun. O zaman
$$g \circ f_1\colon \omega^2 \xrightarrow{\approx} \omega.$$
Mümkünse
$$h_m\colon \omega^m \xrightarrow{\approx} \omega \tag{5.3}$$
olsun. O zaman bir ve tek bir h_{m+1} için,
$$h_{m+1}\colon \omega^{m+1} \to \omega,$$
$$\forall\xi\ \forall\eta\ \forall z\ \Big(f_n(\xi) = (\eta, z) \Rightarrow h_{m+1}(\xi) = g\big(h_m(\eta), z\big)\Big);$$

ve bu durumda

$$h_{m+1}\colon \omega^{m+1} \xrightarrow{\approx} \omega.$$

Tümevarım ve özyinelemeyle her m sayma sayısı için, bir ve tek bir h_m için, (5.3) doğrudur. Şimdi

$$\omega^\omega = \sup_{0<x<\omega} (\omega^x) = \bigcup_{0<x<\omega} \omega^x$$

olduğundan teoremi kullanılabilir. □

6. Ordinal kuvvet alma

6.1. Tanım ve özellikler

Özyineli tanıma göre her α için

$$\alpha^0 = 1,$$
$$\alpha^{\beta'} = \alpha^\beta \cdot \alpha,$$
$$\gamma \text{ limit ise } \alpha^\gamma = \sup_{0<\xi<\gamma} (\alpha^\xi) = \limsup_{\xi\to\gamma^-} (\alpha^\xi).$$

Teorem 50. *$\alpha^1 = \alpha$, $1^\alpha = 1$, ve*

$$0^\alpha = \begin{cases} 1, & \alpha = 0 \text{ durumunda}, \\ 0, & \alpha > 0 \text{ durumunda}. \end{cases}$$

Alıştırma 48. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 51. *$\alpha \geqslant 2$ ise $\xi \mapsto \alpha^\xi$ işlemi, normaldir.*

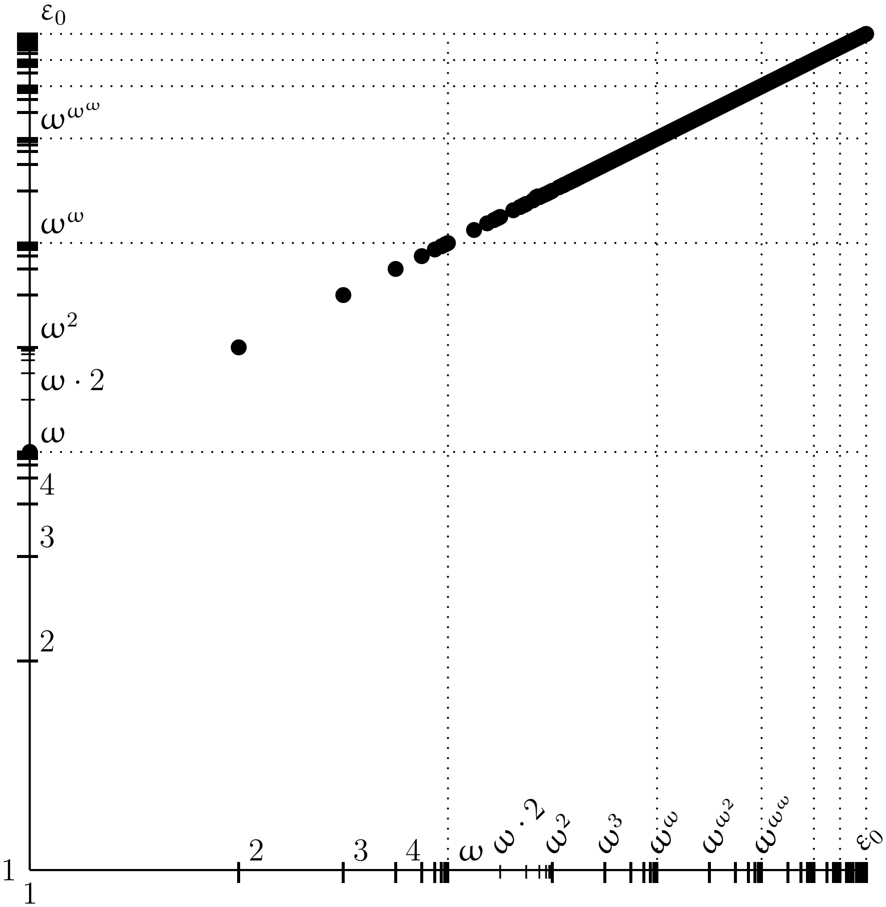
Alıştırma 49. Teoremi kanıtlayın.

Şekil 6'ya bakın. Şekilde

$$\varepsilon_0 = \sup\left\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \dots\right\}.$$

Alıştırma 50. $\xi \mapsto \xi^\xi$ işlemi kesin artan mıdır? Sürekli midir?

Teorem 52. *$\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$ ve $\alpha^{\beta\cdot\gamma} = (\alpha^\beta)^\gamma$.*



Şekil 6.: $\eta = \omega^{\xi}$ denkleminin grafiği

Alıştırma 51. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 53. *$\alpha \geqslant 1$ ise $\xi \mapsto \xi^{\alpha}$ artandır.*

Alıştırma 52. Teoremi kanıtlayın.

6.2. Hesaplamalar

Teorem 54 (Logaritma alma)**.** *$2 \leqslant \alpha$ ve $1 \leqslant \beta$ ise (ξ, η, ζ) için*

$$\alpha^{\xi} \cdot \eta + \zeta = \beta \wedge 0 < \eta < \alpha \wedge \zeta < \alpha^{\xi}$$

sisteminin bir ve tek bir çözümü vardır.

Alıştırma 53. Teoremi kanıtlayın.

Teorem sayesinde $1 \leqslant \alpha$ ise, bazı α_0, a_0, ve β_1 için

$$\omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \beta_1 = \alpha, \qquad 0 < a_0 < \omega, \qquad \beta_1 < \omega^{\alpha_0}.$$

Eğer $1 \leqslant \beta_1$ ise, o zaman bazı α_1, a_1, ve β_2 için

$$\omega^{\alpha_1} \cdot a_1 + \beta_2 = \beta_1, \qquad 0 < a_1 < \omega, \qquad \beta_2 < \omega^{\alpha_1},$$

ve saire. O zaman bir k için

$$\begin{gathered} \alpha_0 > \alpha_1 > \cdots > \alpha_k, \\ \{a_0, \ldots, a_k\} \subseteq \mathbb{N}, \\ \alpha = \omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \omega^{\alpha_1} \cdot a_1 + \cdots + \omega^{\alpha_k} \cdot a_k. \end{gathered}$$

Son ifade, α'nın **Cantor normal biçimidir.**

Teorem 55. *$\alpha < \omega^{\beta}$ ise $\alpha + \omega^{\beta} = \omega^{\beta}$.*

Alıştırma 54. Teoremi kanıtlayın. (Teorem 44'e bakın.)

Sonuç. *$\alpha < \omega^\beta$, $n \in \mathbb{N}$, ve $k \in \mathbb{N}$ ise*

$$(\omega^\beta \cdot n + \alpha) \cdot k = \omega^\beta \cdot n \cdot k.$$

Alıştırma 55. Sonucu kanıtlayın.

Teorem 56. *$\alpha < \omega^\beta$, $n \in \mathbb{N}$, ve $1 \leqslant \gamma$ ise*

$$(\omega^\beta \cdot n + \alpha) \cdot \omega^\gamma = \omega^{\beta+\gamma}.$$

Alıştırma 56. Teoremi kanıtlayın. (Bir δ için $\gamma = 1 + \delta$ olduğunu kullanabiliriz.)

Şimdi iki Cantor normal biçiminin çarpımının Cantor normal biçimini hesaplayabiliriz.

Teorem 57. *$0 < k < \omega$ ise*

$$k^{\omega^\xi} = \begin{cases} k, & \xi = 0 \text{ durumunda,} \\ \omega^{\omega^{\xi-1}}, & 0 < \xi < \omega \text{ durumunda,} \\ \omega^{\omega^\xi}, & \omega \leqslant \xi \text{ durumunda.} \end{cases}$$

Alıştırma 57. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 58. *$\alpha < \omega^\beta$, $n \in \mathbb{N}$, ve γ limit ise*

$$(\omega^\beta \cdot n + \alpha)^\gamma = \omega^{\beta \cdot \gamma}.$$

Teorem 59. *ε_0,*

$$\omega^\xi = \xi$$

denkleminin en küçük çözümüdür.

Alıştırma 58. Teoremi kanıtlayın.

6.3. Kardinaller

Herhangi α ve β ordinalleri için, β'dan α'ya giden göndermeler,

$$^{\beta}\alpha$$

sınıfını oluştursun, ve

$$\exp(\alpha,\beta) = \bigl\{f\colon f \in {}^{\beta}\alpha \land \{\xi \in \beta\colon f(\xi) > 0\} \prec \omega\bigr\}$$

olsun.

Teorem 60. $\alpha^{\beta} \approx \exp(\alpha,\beta)$.

Kanıt. $\exp(1,\beta) \approx 1 = 1^{\beta}$; ayrıca

$$\exp(0,\beta) \approx \begin{cases} 1, & \beta = 0 \text{ durumunda},\\ 0, & \beta > 0 \text{ durumunda}, \end{cases}$$

dolayısıyla $\exp(0,\beta) \approx 0^{\beta}$. Şimdi $\alpha \geqslant 2$ olsun. Eğer $\gamma < \alpha^{\beta}$ ise, o zaman Cantor normal biçimi gibi, bazı n doğal sayısı için, bazı γ_i ve δ_i için,

$$\beta > \gamma_0 > \cdots > \gamma_{n-1},$$
$$\{\delta_i\colon i < n\} \subseteq \alpha \smallsetminus \{0\},$$
$$\gamma = \alpha^{\gamma_0} \cdot c_0 + \cdots + \alpha^{\gamma_{n-1}} \cdot c_{n-1}.$$

Şimdi tanıma göre

$$f_{\gamma}(\xi) = \begin{cases} \delta_i, & \xi = \gamma_i \text{ durumunda},\\ 0, & \xi \in \beta \smallsetminus \{\gamma_i\colon i < n\} \text{ durumunda} \end{cases}$$

olsun. O zaman $f_{\gamma} \in \exp(\alpha,\beta)$. Asında

$$\xi \mapsto f_{\xi}\colon \alpha^{\beta} \xrightarrow{\approx} \exp(\alpha,\beta). \qquad \square$$

Teorem 61. $\varepsilon_0 \approx \omega$.

Alıştırma 59. Teoremi kanıtlayın.

7. Kardinal kuvvetler

7.1. Sayılamaz kümeler

Eğer $A \preccurlyeq \omega$ ise, o zaman A **sayılabilir;** diğer durumda A **sayılamaz.** Gördüğümüz gibi sayılabilir kümelerden ordinal toplama, çarpma, ve kuvvet alma ile sayılamaz kümeler elde edilemez.

Herhangi $\boldsymbol{A}$ sınıfı için

$$\mathscr{P}(\boldsymbol{A}),$$

$\boldsymbol{A}$'nın *altkümeleri* tarafından oluşturulmuş sınıftır. Yani

$$\mathscr{P}(\boldsymbol{A}) = \{X : X \subseteq \boldsymbol{A}\}.$$

Buradaki X siyah olmadığından *küme* değişkenidir. Küme olmayan bir sınıf, bir sınıfın elemanı olamaz. Eğer $\mathbf{V}$, tüm kümeler tarafından oluşturulmuş sınıf ise, o zaman

$$\mathscr{P}(\mathbf{V}) = \mathbf{V}.$$

Ama $n \in \omega$ ise

$$n < 2^n = \operatorname{kard}(\mathscr{P}(n)).$$

Teorem 62 (Cantor)**.** *Her A kümesi için*

$$A \prec \mathscr{P}(A).$$

Kanıt. $x \mapsto \{x\} \colon A \xrightarrow{\preccurlyeq} \mathscr{P}(A)$. Şimdi $f \colon A \xrightarrow{\preccurlyeq} \mathscr{P}(A)$ ise

$$B = \{x \in A \colon x \notin f(x)\}$$

olsun. O zaman A'nın her c elemanı için

$$c \in B \Leftrightarrow c \notin f(c),$$

dolayısıyla $B \neq f(c)$. Bu şekilde f, eşleme olamaz. □

Alıştırma 60. Cantor Teoreminin kanıtı A'nın küme olduğunu nasıl kullanır?

AKSİYOM 7 (Kuvvet Küme). *Her A kümesi için $\mathscr{P}(A)$ sınıfı bir kümedir.*

Herhangi a ve b için

$$(a, b) = \big\{\{a\}, \{a, b\}\big\}$$

olsun.

Teorem 63. $(a, b) = (c, d)$ *ancak ve ancak* $a = c$ *ve* $b = d$.

Alıştırma 61. Teoremi kanıtlayın.

Şimdi $A \times B = \{(x, y) \colon x \in A \wedge y \in B\}$ tanımlanabilir.

Teorem 64. $A \times B \subseteq \mathscr{P}(\mathscr{P}(A \cup B))$.

Alıştırma 62. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 65 (Hartogs). *Her kardinalin daha büyüğü vardır.*

Kanıt. $\boldsymbol{A} = \{\xi \colon \xi \preccurlyeq \kappa\}$ olsun. O zaman $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbf{ON}$, ve ayrıca $\boldsymbol{A}$ geçişlidir, dolayısıyla $\boldsymbol{A}$ bir kümeyse, bir α ordinalidir. Bu durumda $\alpha \notin \alpha$ olduğundan $\alpha > \kappa$.

Eğer f bir β'yı κ'ya gömürse, o zaman bir

$$\Big\{\big(f(\xi), f(\eta)\big) \colon \xi \leqslant \eta < \beta\Big\}$$

kümesi elde edilebilir. Bu şekilde elde edilen tüm kümeler, $\kappa \times \kappa$ çarpımının bir B altkümesini oluşturur. O halde $B \approx \boldsymbol{A}$ (neden?), dolayısıyla $\boldsymbol{A}$ da bir kümedir. □

Sonuç olarak

$$\kappa^+ = \min\{\xi \colon \kappa < \xi\}$$

tanımlanabilir, κ^+, κ'nın *kardinal* ardılıdır.

Şimdi özyineli tanıma göre

$$\begin{gathered} \aleph_0 = \omega, \\ \aleph_{\alpha'} = (\aleph_\alpha)^+, \\ \alpha \text{ limit ise } \aleph_\alpha = \sup_{\xi < \alpha} \aleph_\xi. \end{gathered}$$

(Burada $\aleph$, İbrani *alef* harfidir.)

Teorem 66. *$\xi \mapsto \aleph_\xi$ normaldir, ve her sonsuz kardinal, bir α için, $\aleph_\alpha$'dır.*

Alıştırma 63. Teoremi kanıtlayın.

Lemma 12. *Her sonsuz kardinal, ω'nın bir kuvvetidir.*

Alıştırma 64. Lemmayı kanıtlayın.

Tanıma göre

$$\kappa \oplus \lambda = \operatorname{kard}(\kappa \sqcup \lambda) = \operatorname{kard}(\kappa + \lambda),$$
$$\kappa \otimes \lambda = \operatorname{kard}(\kappa \times \lambda) = \operatorname{kard}(\kappa \cdot \lambda)$$

olsun; bunlar κ ve λ'nın **kardinal toplamı** ve **kardinal çarpımıdır.**

Teorem 67. *Eğer κ ve λ'nın biri sonsuz ise*

$$\kappa \oplus \lambda = \operatorname{maks}(\kappa, \lambda).$$

Eğer κ ve λ'nın biri sonsuz ise ve diğeri sıfır değilse

$$\kappa \otimes \lambda = \operatorname{maks}(\kappa, \lambda).$$

Kanıt. $\kappa \leqslant \lambda$ olsun. O zaman

$$\lambda \leqslant \kappa + \lambda \leqslant \lambda + \lambda \preccurlyeq 2 \cdot \lambda \leqslant \lambda \cdot \lambda,$$

ve $\kappa > 0$ ise

$$\lambda \leqslant \kappa \cdot \lambda \leqslant \lambda \cdot \lambda,$$

dolayısıyla $\lambda \approx \lambda^2$ kanıtlamak yeter.

Lemmadan bir α için $\lambda = \omega^\alpha$. O zaman $\lambda \approx \exp(\omega, \alpha)$. Şimdi $f\colon \omega \times \omega \xrightarrow{\approx} \omega$ olsun. Eğer g ve h, $\exp(\omega, \alpha)$ kümesinin elemanı ise $g * h$,

$$\xi \mapsto f(g(\xi), h(\xi))$$

elemanı olsun. O zaman

$$(g, h) \mapsto g * h\colon \exp(\omega, \alpha) \xrightarrow{\approx} \exp(\omega, \alpha) \times \exp(\omega, \alpha). \qquad \square$$

Sonuç olarak

$$\mathrm{kard}(\aleph_\alpha + \aleph_\beta) = \aleph_{\mathrm{maks}(\alpha,\beta)} = \mathrm{kard}(\aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta).$$

Şimdi herhangi A kümesi için

$$\mathscr{P}_\omega(A) = \{X \in \mathscr{P}(A) \colon \mathrm{kard}(X) < \omega\}$$

olsun.

Teorem 68. *Eğer κ sonsuz ise $\mathscr{P}_\omega(\kappa) \approx \kappa$.*

Kanıt. Her m için $\{\xi \in \kappa \colon \mathrm{kard}(\xi) = m\} \preccurlyeq \kappa^m \approx \kappa$, dolayısıyla

$$\mathscr{P}_\omega(\kappa) = \bigcup_{i\in\omega}\{\xi \in \kappa \colon \mathrm{kard}(\xi) = i\} \preccurlyeq \omega \times \kappa \approx \kappa. \qquad \square$$

Teorem 69. *Eğer β sonsuz ve $2 \leqslant \alpha \leqslant \beta$ ise*

$$\mathrm{kard}(\alpha^\beta) = \mathrm{kard}(\beta).$$

Eğer α sonsuz ve $1 \leqslant \beta \leqslant \alpha$ ise

$$\mathrm{kard}(\alpha^\beta) = \mathrm{kard}(\alpha).$$

Alıştırma 65. Teoremi kanıtlayın.

7.2. Seçme

Teorem 49'da, $\bigcup_{i<\omega} A_i$ bileşiminin sayılabilir olması için, her A_k kümesinin sayılabilir olması yetmez, ama A_k kümesinin ω'ya kesin bir gömmesi bilinmelidir. Her k için, A_k kümesinin

ω'ya gömmeleri, boş olmayan bir $\mathscr{B}_k$ kümesini oluşturabilirler; ama gördüğümüz aksiyomlarla

$$\forall x\ (x \in \omega \Rightarrow f_x \in \mathscr{B}_x)$$

koşulunu sağlayan $x \mapsto f_x$ göndermesinin olup olmadığını bilmiyoruz.

Gördüğümüz aksiyomlar, **Zermelo–Fraenkel** veya **ZF** aksiyomlarıdır.

Her k için $\mathscr{B}_k$ kümesinden bir f_k seçmek isteriz. *Seçim Aksiyomunun* biçimlerinin birine göre, bu seçme mümkündür. Bizim için, aşağıdaki biçim kullanılışlı olacaktır.

AKSİYOM 8 (Seçim)**.** *Her küme iyisıralanabilir.*

Örneğin $\bigcup_{x\in\omega} \mathscr{B}_x$ iyisıralanırsa, o zaman istediğimiz $x \mapsto f_x$ göndermesi

$$x \mapsto \min(B_x)$$

olabilir.

Gödel'in kanıtladığı teoreme göre, ZF aksiyomlarının bir *modelinde,* Seçim Aksiyomu doğrudur. Cohen'in kanıtladığı teoreme göre, ZF aksiyomlarının bir modelinde, Seçim Aksiyomu yanlıştır. Kısaca Seçim Aksiyomu, ZF'den bağımsızdır.

Seçim Aksiyomunu varsayıyoruz. Bununla ZF, **ZFC**'dir. Şimdi her kümenin kardinali vardır. Tanıma göre

$$\kappa^\lambda = \mathrm{kard}({}^\kappa\lambda).$$

Bu kuvvet, ordinal küvvet değil, **kardinal kuvvettir.** Örneğin $\aleph_0 = \omega$ olduğu halde $2^{\aleph_0}$, kardinal kuvvet olarak anlaşılır, ve bu kuvvet, 2^ω ordinal kuvvetinden farklıdır. Aslında $2^\omega = \omega$, ama sonraki teoreme göre $2^{\aleph_0} > \aleph_0$.

Teorem 70. $2^\kappa = \mathrm{kard}(\mathscr{P}(\kappa))$.

Alıştırma 66. Teoremi kanıtlayın.

Aşağıdaki kurallar kolaydır.

$$\begin{aligned} 0 < \lambda \Rightarrow 0^\lambda &= 0, \\ \kappa^0 &= 1, \\ 1^\lambda &= 1, \\ \kappa^1 &= \kappa, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \kappa^{\lambda \oplus \mu} &= \kappa^\lambda \otimes \kappa^\mu, \\ \kappa^{\lambda \otimes \mu} &= (\kappa^\lambda)^\mu, \\ \kappa \leqslant \mu \land \lambda \leqslant \nu &\Rightarrow \kappa^\lambda \leqslant \mu^\nu. \end{aligned}$$

Teorem 71. *$2 \leqslant \kappa$, $1 \leqslant \lambda$, ve $\aleph_0 \leqslant \operatorname{maks}\{\kappa, \lambda\}$ olsun. O zaman*

$$\kappa \leqslant 2^\lambda \Rightarrow \kappa^\lambda = 2^\lambda, \tag{7.1}$$

$$\lambda \leqslant \kappa \Rightarrow \kappa^\lambda \leqslant 2^\kappa. \tag{7.2}$$

Kanıt. Hipoteze göre $\kappa \leqslant 2^\lambda$ ise $2 \leqslant \kappa \leqslant 2^\lambda$ ve λ sonsuzdur, dolayısıyla

$$2^\lambda \leqslant \kappa^\lambda \leqslant (2^\lambda)^\lambda = 2^{\lambda \otimes \lambda} = 2^\lambda.$$

Ayrıca $\lambda \leqslant \kappa$ ise κ sonsuzdur, dolayısıyla

$$\kappa \leqslant \kappa^\lambda \leqslant (2^\kappa)^\lambda = 2^{\kappa \otimes \lambda} = 2^\kappa. \qquad \square$$

Tekrar κ ve λ'n in biri sonsuz olsun. Eğer $\lambda \leqslant \kappa \leqslant 2^\lambda$ ise, o zaman (7.1) gerektirmesine göre

$$\kappa^\lambda = 2^\lambda \leqslant 2^\kappa;$$

burada (7.2) gerekmez. Bir durumda, eğer (7.1) gerektirmesinin hipotezi doğru değilse, o zaman $2^\lambda < \kappa$, dolayısıyla $\lambda \leqslant \kappa$, ve (7.2) kullanılabilir. Bu şekilde teoremin yerine

$$\kappa \leqslant 2^\lambda \Rightarrow \kappa^\lambda = 2^\lambda,$$

$$2^\lambda < \kappa \Rightarrow \kappa^\lambda \leqslant 2^\kappa.$$

kuralları kullanılabilir. (Tekrar $2 \leqslant \kappa$, $1 \leqslant \lambda$, ve $\aleph_0 \leqslant \text{maks}\{\kappa, \lambda\}$ olmalıdır.) Örneğin

$$2 \leqslant \kappa \leqslant 2^{\aleph_0} \Rightarrow \kappa^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0},$$
$$2^{\aleph_0} < \kappa \Rightarrow \kappa^{\aleph_0} \leqslant 2^{\kappa}.$$

Şimdi aşağıdaki tanım yapabiliriz.

$$\beth_0 = \aleph_0,$$
$$\beth_{\alpha'} = \text{kard}(\mathscr{P}(\beth_\alpha)) = 2^{\beth_\alpha},$$
$$\alpha \text{ limit ise } \beth_\alpha = \sup_{\xi<\alpha} \beth_\xi.$$

(Burada $\beth$, İbrani *beth* harfidir.) O zaman $\xi \mapsto \beth_\xi$ normaldir, ve

$$\aleph_\alpha \leqslant \beth_\alpha.$$

Teorem 72. *Tüm κ ve λ için*

$$2 \leqslant \kappa \leqslant \beth_{\alpha+1} \Rightarrow \kappa^{\beth_\alpha} = \beth_{\alpha+1},$$
$$1 \leqslant \lambda \leqslant \beth_\alpha \Rightarrow {\beth_{\alpha+1}}^{\lambda} = \beth_{\alpha+1}.$$

Alıştırma 67*.* Teoremi kanıtlayın.

Kontinuum Hipotezi veya **KH,** $\aleph_1 = \beth_1$ önermesidir. **Genelleştirilmiş Kontinuum Hipotezi** veya **GKH,** $\forall\xi\ \aleph_\xi = \beth_\xi$ önermesidir. Gödel'in kanıtladığı teoreme göre, ZFC aksiyomlarının bir modelinde, GKH doğrudur. Cohen'in kanıtladığı teoreme göre, ZFC aksiyomlarının bir modelinde, KH yanlıştır. Bu şekilde KH, ZFC'den bağımsızdır.

A. Harfler

Metinde simge olarak kullanılırken harfler aşağıdaki anlamlara gelir.

“Tahta siyahı” harfleri

$\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi

$\mathbb{Q}$ kesirli sayılar kümesi

$\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi

$\mathbb{N}$ $\{1, 2, 3, \ldots\}$ sayma sayılar kümesi

Küçük Latin harfleri

a, b, c, d, e sayılar veya kümeler

f, g, h kümede tanımlanmiş göndermeler

i, j doğal sayı değişkenler

k, ℓ, m, n doğal sayılar

p asal sayı

u, x, y, z sayı veya küme değişkenleri

Dikey küçük Latin harfleri

sup supremum

min minimum (en küçük)

maks maksimum (en büyük)

Büyük Latin harfleri

A, B, C, D kümeler

X, Y, Z küme değişkenleri

Kıvırcık Latin harfleri

$\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ elemanları küme veya gönderme olan kümeler

$\mathscr{P}(A)$ $\{X \colon X \subseteq A\}$

$\mathscr{P}_\omega(A)$ $\{X \in \mathscr{P}(A) \colon \operatorname{kard}(X) < \omega\}$

Büyük siyah Latin harfleri

$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ sınıflar

$\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{H}$ sınıfta tanımlanmış göndermeler

Dikey büyük siyah Latin harfleri

$\mathbf{V}$ evrensel sınıf

$\mathbf{ON}$ ordinaller sınıfı

$\mathbf{KN}$ kardinaller sınıfı

Yunan harfleri

α, β, γ, δ, θ ordinaller

ξ, η, ζ ordinal değişkenler

κ, λ, μ, ν kardinaller

φ, ψ, χ formüller

Dikey Yunan harfi

$\upvarepsilon_0$ $\sup\{\upomega, \upomega^{\upomega}, \upomega^{\upomega^{\upomega}}, \dots\}$

$\upomega$ $\{0, 1, 2, \dots\}$ doğal sayıları kümesi

Harflerden türeyen simgeler

$\in$ eleman olma bağıntısı ("a **ἐστὶ** B" demek "a, bir B'dir")

$\forall$ her . . . için (*for* ***A****ll*)

$\exists$ bazı . . . için (*there* ***E****xists*)

$\cup$, $\bigcup$ bileşim (***U****nion*)

B. Mantık

B.1. Formüller

Formüllerde kullandığımız simgelerin birkaç tane türü vardır:

1) **değişkenler** (*variables*): z, y, x, …; x_0, x_1, x_2, …;
2) **sabitler** (*constants*): a, b, c, …; a_0, a_1, a_2, …;
3) **iki-konumlu bağlayıcılar** (*binary connectives*): $\land$, $\lor$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$;*
4) bir **tek-konumlu bağlayıcı** (*singulary connective*): $\neg$;
5) **niceleyiciler** (*quantifiers*): $\exists$, $\forall$;
6) **ayraçlar** (*parentheses, brackets*): (,);
7) bir **yüklem** (*predicate*): $\in$ (epsilon).

Bir **terim** (*term*), ya değişken ya da sabittir. Eğer t ile u, iki terim ise, o zaman

$$t \in u$$

ifadesi, bir **bölünemeyen formüldür** (*atomic formula*). Genelde **formüllerin** tanımı, özyinelidir:

1. Bölünemeyen bir formül, bir formüldür.
2. Eğer φ bir formül ise, o zaman

   $$\neg\varphi$$

   ifadesi de bir formüldür.

*Bazen $\Rightarrow$ ile $\Leftrightarrow$ okların yerine $\rightarrow$ ile $\leftrightarrow$ işaretleri yazılır.

3. Eğer φ ile ψ iki formül ise, o zaman

$$(\varphi \wedge \psi), \qquad (\varphi \vee \psi), \qquad (\varphi \Rightarrow \psi), \qquad (\varphi \Leftrightarrow \psi)$$

ifadeleri de formüldür.

4. Eğer φ bir formül ise, ve x bir değişken ise, o zaman

$$\exists x\ \varphi, \qquad\qquad \forall x\ \varphi$$

ifadeleri de formüldür.

Formüllerin her türünün adı vardır:

1. $\neg\varphi$ formülü, bir **değillemedir** (*negation*).
2. $(\varphi\wedge\psi)$ formülü, bir **birleşme** veya **tümel evetlemedir** (*conjunction*).
3. $(\varphi \vee \psi)$ formülü, bir **ayrılma** veya **tikel evetlemedir** (*disjunction*).
4. $(\varphi \Rightarrow \psi)$ formülü, bir **gerektirme** (*implication*).
5. $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ formülü, bir **denkliktir** (*equivalence*).
6. $\exists x\ \varphi$ formülü, bir **örneklemedir** (*instantiation*).
7. $\forall x\ \varphi$ formülü, bir **genelleştirmedir** (*generalization*).

Bu türlerin adları, çok önemli değildir. Fakat aşağıdaki teorem çok önemlidir.

Teorem 73. *Her formülün tek bir şekilde tek bir türü vardır.*

Mesela aynı formül, hem gerektirme, hem örnekleme olamaz: $\exists x\ (\varphi \Rightarrow \psi)$ formülü, gerektirme değil, örneklemedir; $(\exists x\ \varphi \Rightarrow \psi)$ formülü, örnekleme değil, gerektirmedir.

Ayrıca $(\varphi \wedge (\psi \wedge \theta))$ formülü, tek bir şekilde birleşmedir. Aslında sadece φ ile $(\psi \wedge \theta)$ formüllerinin birleşmesidir. Eğer A harfi, $\varphi \wedge (\psi$ ifadesini gösterirse ve B harfi, $\theta)$ ifadesini gösterirse, o zaman $(A \wedge B)$ ifadesi, $(\varphi \wedge (\psi \wedge \theta))$ formülünü gösterir; ama tanıma göre bu formül, A ile B ifadelerinin birleşmesi değildir, çünkü A ile B ifadeleri (yani A ile B tarafından gösterilen ifadeler), formül değildir.

Teoremi kanıtlamayacağız. Fakat teoremi kullanarak aşağıdaki özyineli tanımı yapabiliriz. Bir değişkenin bir formülde birkaç tane **geçişi** (*occurrence*) olabilir. Mesela $\forall x\ (x \in y \Leftrightarrow x \in z)$ formülünde x değişkeninin üç tane geçişi vardır (ve y ile z değişkenlerinin birer geçişi vardır).

1. Bölünemeyen bir formülde bir değişkenin her geçişi, **serbest** bir geçiştir.
2. Bir değişkenin φ formülündeki her serbest geçişi, $\neg\varphi$, $(\varphi * \psi)$, ve $(\psi * \varphi)$ formüllerinde de serbesttir. (Burada $*$ işareti, herhangi bir iki-konumlu bağlayıcıdır.)
3. Eğer x ile y, iki *farklı* değişken ise, o zaman x değişkeninin φ formülünde her serbest geçişi, $\exists y\ \varphi$ ile $\forall y\ \varphi$ formüllerinde de serbesttir.
4. $\exists x\ \varphi$ ile $\forall x\ \varphi$ formüllerinde x değişkeninin hiç serbest geçişi yoktur.

Bir formülde bir değişkenin serbest geçişi varsa, bu değişken, formülün bir **serbest değişkenidir.** Serbest değişkeni olmayan bir formül, bir **cümledir.** Cümleler için σ, τ, ve ρ gibi Yunan harflerini kullanacağız.

B.2. Doğruluk ve Yanlışlık

Bir φ formülünün tek serbest değişkeni x ise, o zaman formül

$$\varphi(x)$$

olarak yazılabilir. O halde a bir sabit ise, ve x değişkeninin φ formülündeki her *serbest* geçişinin yerine a konulursa, çıkan cümle

$$\varphi(a)$$

olarak yazılabilir. Şimdi **doğruluğu** (*truth*) ve **yanlışlığı** (*falsehood*) tanımlayabiliriz:

1. Eğer b kümesi, a kümesini içerirse, o zaman $a \in b$ cümlesi doğrudur; içermezse, yanlıştır.
2. Eğer σ cümlesi doğruysa, o zaman $\neg\sigma$ değillemesi yanlıştır; σ yanlış ise, $\neg\sigma$ doğrudur.
3. Eğer hem σ hem τ doğruysa, o zaman $(\sigma \wedge \tau)$ birleşmesi de doğrudur; σ ile τ cümlelerinin biri yanlış ise, birleşmesi de yanlıştır.
4. Eğer bir a kümesi için $\varphi(a)$ cümlesi doğruysa, o zaman $\exists x\ \varphi(x)$ örneklemesi de doğrudur; hiç öyle bir a yoksa, örnekleme yanlıştır.
5. $(\sigma \vee \tau)$ cümlesi, $\neg(\neg\sigma \wedge \neg\tau)$ cümlesinin anlamına gelir, yani bu iki cümle aynı zamanda ya doğrudur, ya da yanlıştır.
6. $(\sigma \Rightarrow \tau)$ cümlesi, $(\neg\sigma \vee \tau)$ cümlesinin anlamına gelir.
7. $(\sigma \Leftrightarrow \tau)$ cümlesi, $\big((\sigma \Rightarrow \tau) \wedge (\tau \Rightarrow \sigma)\big)$ cümlesinin anlamına gelir.
8. $\forall x\ \varphi(x)$ cümlesi, $\neg\exists x\ \neg\varphi(x)$ cümlesinin anlamına gelir.

Özel olarak formüllerde $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, ve $\forall$ simgeleri gerekmez; sadece kolaylık için kullanacağız. Ama $(\sigma \Rightarrow \tau)$ cümlesi doğrudur ancak ve ancak τ doğru veya σ yanlıştır; ve $(\sigma \Leftrightarrow \tau)$ cümlesi doğrudur ancak ve ancak hem σ hem τ ya doğru ya yanlıştır. Ayrıca $\forall x\ \varphi(x)$ doğrudur ancak ve ancak her a kümesi için $\varphi(a)$ doğrudur.

Birkaç tane kısaltma daha kullanırız:

1. $\neg\, t \in u$ formülünün yerine $t \notin u$ ifadesini yazarız;
2. Bir $(\varphi * \psi)$ formülünün en dıştaki ayraçlarını yazmayız.
3. $\Rightarrow$ ile $\Leftrightarrow$ bağlayıcılarına göre $\wedge$ ile $\vee$ bağlayıcılarına önceliği veririz: Mesela $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \chi$ ifadesi, $(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \chi$ formülünün anlamına gelir.
4. $\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi$ ifadesi, $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)$ formülünün anlamına gelir.

Bir φ formülünün serbest değişkenleri x ile y ise, o zaman formül

$$\varphi(x, y)$$

olarak yazılabilir. O halde a ile b, iki sabit ise, ve x değişkeninin φ formülündeki her serbest geçişinin yerine a konulursa, ve benzer şekilde y değişkeninin her serbest geçişinin yerine b konulursa, çıkan cümle

$$\varphi(a, b)$$

olarak yazılabilir.

Genelde φ formülünün serbest değişkenleri, bir $\boldsymbol{x}$ listesini oluştururersa, o zaman formül

$$\varphi(\boldsymbol{x})$$

olarak yazılabilir; ayrıca

$$\forall \boldsymbol{x}\ \varphi(\boldsymbol{x}), \qquad\qquad \exists \boldsymbol{x}\ \varphi(\boldsymbol{x})$$

cümleleri yazılabilir. Eğer $\boldsymbol{a}$, uzunluğun $\boldsymbol{x}$ listesinin uzunluğu olan bir sabit listesiyse, o zaman

$$\varphi(\boldsymbol{a})$$

cümlesi de çıkar. Eğer $\varphi(\boldsymbol{x})$ ile $\psi(\boldsymbol{x})$, iki formül ise, ve *sadece doğruluğun tanımını kullanarak*

$$\forall \boldsymbol{x}\ \big(\varphi(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \psi(\boldsymbol{x})\big)$$

cümlesinin doğruluğu kanıtlanabilirse, o zaman φ ile ψ birbirine **(mantığa göre) denktir** (*logically equivalent*): kısaca

$$\varphi \quad \text{denktir} \quad \psi.$$

Öyleyse φ ile ψ birbirine denktir, ancak ve ancak her $\boldsymbol{a}$ sabit listesi için, *doğruluğun tanımına göre*

$$\varphi(\boldsymbol{a}) \Leftrightarrow \psi(\boldsymbol{a})$$

cümlesi doğrudur. Örneğin, yukarıdaki tanımlara göre

$$\begin{gathered}\varphi \vee \psi \quad \text{denktir} \quad \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi),\\ \varphi \Rightarrow \psi \quad \text{denktir} \quad \neg\varphi \vee \psi,\\ \varphi \Leftrightarrow \psi \quad \text{denktir} \quad (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi),\\ \forall x\ \varphi \quad \text{denktir} \quad \neg\exists x\ \neg\varphi.\end{gathered}$$

Ama $\exists y\ \forall x\ \big(\varphi(x) \Rightarrow x \in y\big)$ ile $\exists y\ \forall x\ \big(\varphi(x) \Leftrightarrow x \in y\big)$, denk değildir.

Teorem 74.

1. *Her formül, kendisine denktir.*
2. *Eğer φ ile ψ denk ise, o zaman ψ ile φ denktir.*
3. *Eğer φ ile ψ denk ise, ve ψ ile χ denk ise, o zaman φ ile χ denktir.*

Kanıt. 1. $\sigma \Leftrightarrow \sigma$ her zaman doğrudur.

2. $\sigma \Leftrightarrow \tau$ doğru olsun. O zaman hem σ hem τ ya doğru ya yanlıştır. Öyleyse hem τ hem σ ya doğru ya yanlıştır; yani $\tau \Leftrightarrow \sigma$ doğrudur.

3. $\sigma \Leftrightarrow \tau$ ve $\tau \Leftrightarrow \rho$ doğru olsun. Eğer σ doğruysa, o zaman τ doğru olmalı, ve sonuç olarak ρ doğru olmalı, dolayısıyla $\sigma \Leftrightarrow \rho$ doğrudur. Benzer şekilde σ yanlış ise $\sigma \Leftrightarrow \rho$ tekrar doğrudur. □

Teorem 75.

1. *$\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi$ ile $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \chi$ denktir.*

2. *Eğer x değişkeni, φ formülünde serbest değilse, o zaman*

$$\forall x\ (\varphi \Rightarrow \psi) \quad \textit{denktir} \quad \varphi \Rightarrow \forall x\ \psi.$$

Kanıt. 1. $\sigma \Rightarrow \tau \Rightarrow \rho$ doğru olsun. Eğer $\sigma \wedge \tau$ cümlesi de doğruysa, o zaman hem σ hem τ doğrudur, ve sonuç olarak $\tau \Rightarrow \rho$ doğrudur, ve ρ doğrudur. Yani $\sigma \wedge \tau \Rightarrow \rho$ doğrudur.
Tersi için $\sigma \wedge \tau \Rightarrow \rho$ doğru olsun. O zaman $\sigma \wedge \tau$ yanlış veya ρ doğrudur. Yani σ yanlış, veya τ yanlış, veya ρ doğrudur. Eğer σ doğruysa, o zaman τ yanlış, veya ρ doğrudur, yani $\tau \Rightarrow \rho$ doğrudur. Sonuç olarak $\sigma \Rightarrow \tau \Rightarrow \rho$ doğrudur.

2. $\forall x\ (\sigma \Rightarrow \varphi(x))$ doğru olsun. O zaman her a için $\sigma \Rightarrow \varphi(a)$ doğrudur. Sonuç olarak σ doğruysa, o zaman her a için $\varphi(a)$ doğrudur. Yani $\sigma \Rightarrow \forall x\ \varphi(x)$ doğrudur.
Benzer şekilde $\sigma \Rightarrow \forall x\ \varphi(x)$ doğruysa $\forall x\ (\sigma \Rightarrow \varphi(x))$ doğrudur. □

C. Kofinallik

C.1. Tanım ve özellikler

Sonsuz bir κ kardinali limit ordinali olduğundan

$$\kappa = \sup\{\xi \colon \xi < \kappa\} = \bigcup_{\xi<\kappa} \xi.$$

Bazen bir kardinal, kendisinden küçük bir altkümenin supremumudur. Örneğin $\omega < \aleph_\omega$, ama

$$\aleph_\omega = \sup\{\aleph_x \colon x \in \omega\}.$$

Genelde α limit, $b \subseteq \alpha$, ve

$$\forall\xi\ \big(\xi < \alpha \Rightarrow \exists\eta\ (\eta \in b \land \xi < \eta)\big)$$

ise, b altkümesi, α ordinalinin **sınırsız** (*unbounded*) altkümesidir. Bu durumda

$$\alpha = \sup(b).$$

Örneğin her limit ordinali, kendisinde sınırsızdır. Ayrıca $\{\aleph_x \colon x \in \omega\}$, $\aleph_\omega$ ordinalinde sınırsızdır. Bir limit ordinalinin sınırsız altkümelerinin en küçük kardinaline, ordinalin **kofinalliği** (*cofinality*) denir, ve bu kardinal, $\mathrm{kf}(\alpha)$ olarak yazılabilir. Yani

$$\mathrm{kf}(\alpha) = \min\{\mathrm{kard}(x) \colon x \subseteq \alpha \land \sup(x) = \alpha\}.$$

Ayrıca, tanıma göre,

$$\mathrm{kf}(0) = 0, \qquad\qquad \mathrm{kf}(\alpha + 1) = 1$$

denebilir, ama bu durumları kullanmayacağız.

Teorem 76. *Her α limit ordinali için, tanım kümesi* $\mathrm{kf}(\alpha)$ *olan, değer kümesi α ordinalinin sınırsız bir altkümesi olan, kesin artan bir gönderme vardır.*

Kanıt. $f\colon \mathrm{kf}(\alpha) \to \alpha$ olsun, ve $f[\alpha]$, α ordinalinin sınırsız bir altkümesi olsun. Özyinelemeyle, tanım kümesi $\mathrm{kf}(\alpha)$ olan,

$$g(\beta) = \mathrm{maks}\Big(f(\beta), \sup\big(g[\beta]\big)\Big)$$

koşulunu sağlayan bir g göndermesi vardır. Eğer $\beta < \mathrm{kf}(\alpha)$ ve $g[\beta] \subseteq \alpha$ ise, o zaman $g[\beta]$, α ordinalinin sınırsız altkümesi değil, dolayısıyla $g(\beta) \in \alpha$; ayrıca $f(\beta) \leqslant g(\beta)$. Öyleyse g, istediğimiz gibidir. □

Teorem 77. *α ve β limit ordinalleri olsun. Eğer $f\colon \alpha \to \beta$ ve kesin artan ise, ve $\beta = \bigcup f[\alpha]$ ise, o zaman*

$$\mathrm{kf}(\alpha) = \mathrm{kf}(\beta).$$

Kanıt. $\mathrm{kf}(\beta) \leqslant \mathrm{kf}(\alpha)$ ve $\mathrm{kf}(\alpha) \leqslant \mathrm{kf}(\beta)$ eşitsizliklerini kanıtlayacağız.

1. $g\colon \mathrm{kf}(\alpha) \to \alpha$ ve $\bigcup g[\mathrm{kf}(\alpha)] = \alpha$ olsun. $\delta < \beta$ ise, hipoteze göre α ordinalinin bir θ elemanı için

$$\delta < f(\theta).$$

O zaman $\mathrm{kf}(\alpha)$ kardinalinin bir ι elemanı için

$$\theta < g(\iota), \qquad\qquad \delta < f(\theta) < f\big(g(\iota)\big).$$

Öyleyse $\bigcup(f \circ g)[\mathrm{kf}(\alpha)] = \beta$, dolayısıyla $\mathrm{kf}(\beta) \leqslant \mathrm{kf}(\alpha)$.

2. $h\colon \operatorname{kf}(\beta) \to \beta$ ve $\bigcup h[\operatorname{kf}(\beta)] = \beta$ olsun. $\delta < \operatorname{kf}(\beta)$ ise

$$k(\delta) = \min\{\xi \in \alpha\colon h(\delta) < f(\xi)\}$$

olsun. O zaman $k\colon \operatorname{kf}(\beta) \to \alpha$. Eğer $\theta \in \alpha$ ise, o zaman $\operatorname{kf}(\beta)$ kardinalinin

$$f(\theta) < h(\delta)$$

koşulunu sağlayan bir δ elemanı vardır. O zaman

$$f(\theta) < h(\delta) < f(k(\delta)),$$

dolayısıyla $\theta < k(\delta)$, çünkü f kesin artandır. Öyleyse $\bigcup k[\operatorname{kf}(\beta)] = \alpha$, dolayısıyla $\operatorname{kf}(\alpha) \leqslant \operatorname{kf}(\beta)$ ve aslında $\operatorname{kf}(\alpha) = \operatorname{kf}(\beta)$. □

Özel durum olarak $\boldsymbol{F}$ normal ve α limit ise

$$\operatorname{kf}(\boldsymbol{F}(\alpha)) = \operatorname{kf}(\alpha).$$

Teorem 78. *α limit ise* $\operatorname{kf}(\aleph_\alpha) = \operatorname{kf}(\alpha)$.

Kanıt. $\xi \mapsto \aleph_\xi$ normaldir. □

Teorem 79. *Cantor normal biçiminde*

$$\alpha = \omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \dots + \omega^{\alpha_n} \cdot a_n$$

ve $\alpha_n > 0$ ise, o zaman

$$\operatorname{kf}(\alpha) = \begin{cases} \omega, & \text{eğer } \alpha_n \text{ bir ardılsa,} \\ \operatorname{kf}(\alpha_n), & \text{eğer } \alpha_n \text{ bir limitse.} \end{cases}$$

Kanıt. Son teoreme göre α limit, $\gamma \geqslant 1$, ve $\delta \geqslant 2$ ise

$$\operatorname{kf}(\alpha) = \operatorname{kf}(\beta + \alpha) = \operatorname{kf}(\gamma \cdot \alpha) = \operatorname{kf}(\delta^\alpha).$$ □

Bazen bu hesaplama bize yardım etmez. Mesela $f(0) = 0$ ve $f(n+1) = \omega^{f(n)}$ ve $\alpha = \sup(f[\omega])$ ise, yani

$$\alpha = \sup\{0, 1, \omega, \omega^{\omega}, \omega^{\omega^{\omega}}, \dots\}$$

ise, o zaman $\operatorname{kf}(\alpha) = \omega$, ama $\alpha = \omega^{\alpha}$.

Teorem 80. *Her α ordinali için*

$$\operatorname{kf}(\aleph_{\alpha+1}) = \aleph_{\alpha+1}.$$

Kanıt. $\beta < \aleph_{\alpha+1}$ ve $f\colon \beta \to \aleph_{\alpha+1}$ olsun. O zaman

$$\sup(f[\beta]) = \bigcup_{\xi<\beta} f(\xi).$$

Bu bileşimden $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ çarpımına giden bir h gömmesini tanımlayacağız. Seçim Aksiyomu sayesinde $\bigcup\{{}^{\xi}\aleph_\alpha \colon \xi < \aleph_{\alpha+1}\}$ kümesi iyisıralanabilir. Bu sıralamaya göre $\delta < \aleph_{\alpha+1}$ ise ${}^{\delta}\aleph_\alpha$ kümesinin en küçük *gömmesi,* g_δ olsun. O zaman $\gamma < \sup(f[\beta])$ ise

$$\delta = \min\{z \in \beta \colon \gamma < f(z)\}, \qquad h(\gamma) = \bigl(g_\beta(\delta), g_\delta(\gamma)\bigr)$$

olsun. Böylece

$$\operatorname{kard}\bigl(\sup(f[\beta])\bigr) \leqslant \operatorname{kard}(\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha) = \aleph_\alpha,$$

dolayısıyla $\sup(f[\beta]) < \aleph_{\alpha+1}$. Sonuç olarak $\operatorname{kf}(\aleph_{\alpha+1}) = \aleph_{\alpha+1}$. □

C.2. Hesaplamalar

Teorem 81. $2 \leqslant \kappa$*,* $1 \leqslant \lambda$*, ve* $\aleph_0 \leqslant \operatorname{maks}\{\kappa, \lambda\}$ *olsun. O zaman*

$$\lambda \geqslant \operatorname{kf}(\kappa) \Rightarrow \kappa < \kappa^{\lambda},$$
$$\mathrm{GKH} \land \lambda < \operatorname{kf}(\kappa) \Rightarrow \kappa = \kappa^{\lambda}.$$

Kanıt. $\mathrm{kf}(\kappa) \leqslant \lambda$ ise ${}^{\lambda}\kappa$ kümesinin

$$\kappa = \bigcup_{\xi<\lambda} f(\xi)$$

koşulunu sağlayan bir f elemanı vardır. Şimdi $\xi \mapsto g_\xi \colon \kappa \to {}^{\lambda}\kappa$ olsun. O zaman ${}^{\lambda}\kappa$ kümesinin $\{g_\xi \colon \xi < \kappa\}$ kümesinde olmayan bir

$$\eta \mapsto \min\Big(\kappa \smallsetminus \big\{g_\xi(\eta) \colon \xi < f(\eta)\big\}\Big)$$

elemanı vardır.

Şimdi $\lambda < \mathrm{kf}(\kappa)$ olsun. O zaman Teorem 80'in kanıtındaki gibi

$$\begin{aligned}{}^{\lambda}\kappa = \bigcup_{\xi<\kappa} {}^{\lambda}\xi = \bigcup_{\lambda\leqslant\xi<\kappa} {}^{\lambda}\xi \\ \preccurlyeq \bigcup_{\lambda\leqslant\xi<\kappa} {}^{\lambda}(\mathrm{kard}(\xi)) = \bigcup_{\substack{\lambda\leqslant\xi<\kappa\\ \xi\in\mathbf{KN}}} {}^{\lambda}\xi \preccurlyeq \bigcup_{\substack{\lambda\leqslant\xi<\kappa\\ \xi\in\mathbf{KN}}} {}^{\xi}2.\end{aligned}$$

Eğer GKH doğruysa $\mu < \kappa \Rightarrow 2^\mu \leqslant \kappa$, dolayısıyla $\kappa^\lambda \leqslant \kappa$. □

Şimdi, gösterdiklerimize göre, eğer $\kappa + \lambda$ sonsuzsa, o zaman

$$\begin{gathered}2 \leqslant \kappa \leqslant 2^\lambda \Rightarrow \kappa^\lambda = 2^\lambda,\\ \mathrm{kf}(\kappa) \leqslant \lambda \leqslant \kappa \Rightarrow \kappa < \kappa^\lambda \leqslant 2^\kappa,\\ 1 \leqslant \lambda < \mathrm{kf}(\kappa) \Rightarrow \kappa \leqslant \kappa^\lambda \leqslant 2^\kappa.\end{gathered}$$

Ayrıca

$$\mathrm{GKH} \Rightarrow \kappa^\lambda = \begin{cases}\lambda^+, & \text{eğer } 2 \leqslant \kappa < \lambda \text{ ise},\\ \kappa^+, & \text{eğer } \mathrm{kf}(\kappa) \leqslant \lambda \leqslant \kappa \text{ ise},\\ \kappa, & \text{eğer } 1 \leqslant \lambda < \mathrm{kf}(\kappa) \text{ ise}.\end{cases}$$

Özel olarak

$$\text{GKH} \Rightarrow {\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta} = \begin{cases} \aleph_{\beta+1}, & \text{eğer } \alpha < \beta \text{ ise,} \\ \aleph_{\alpha+1}, & \text{eğer } \mathrm{kf}(\alpha) \leqslant \aleph_\beta \leqslant \aleph_\alpha \text{ ise,} \\ \aleph_\alpha, & \text{eğer } \aleph_\beta < \mathrm{kf}(\alpha) \text{ ise.} \end{cases}$$