Aksiyomatik Kümeler Kuramı (MAT 340)

David Pierce

11 Nisan 2016

Problem 1. Cantor normal biçimlerini bulun.

(a) $1 + \omega + \omega^2 + \omega + 1$
(b) $\omega^2 + \omega + 1 + \omega + \omega^2$
(c) $(\omega + 1) \cdot (\omega + 2)$
(d) $(\omega^{\omega \cdot 2} + \omega^{\omega+3} \cdot 2 + \omega^{16} \cdot 3 + \omega + 4) \cdot 6$
(e) $(\omega^4 + \omega^3 \cdot 2 + \omega^2 \cdot 3 + \omega + 4) \cdot \omega^5$
(f) $(\omega^5 + 28) \cdot \omega^\omega$

Çözüm.

(a) $\omega^2 + \omega + 1$
(b) $\omega^2 \cdot 2$
(c) $\omega^2 + \omega \cdot 2 + 1$
(d) $\omega^{\omega \cdot 2} \cdot 6 + \omega^{\omega+3} \cdot 2 + \omega^{16} \cdot 3 + \omega + 4$
(e) ω^9
(f) ω^ω

Problem 2. Aşağıdaki ordinal eşitliği doğru ise kanıtlayın, değilse bir karşıt örnek verin.

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

Çözüm. i) $\alpha \cdot (\beta + 0) = \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta + 0 = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot 0.$

ii) Bir γ için

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

olsun. O zaman

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot (\beta + \gamma') &= \alpha \cdot (\beta + \gamma)' \\
&= \alpha \cdot (\beta + \gamma) + \alpha \\
&= (\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma) + \alpha \\
&= \alpha \cdot \beta + (\alpha \cdot \gamma + \alpha) \\
&= \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma'.
\end{aligned}$$

iii) δ limit olsun ve $\gamma < \delta$ ise

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

olsun. $\alpha > 0$ varsayılabilir. O zaman

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot (\beta + \delta) &= \alpha \cdot \sup_{\xi<\delta}(\beta + \xi) && [\text{tanım}] \\
&= \sup_{\xi<\delta}\big(\alpha \cdot (\beta + \xi)\big) && [\xi \mapsto \alpha \cdot \xi \text{ normal}] \\
&= \sup_{\xi<\delta}(\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \xi) && [\text{hipotez}] \\
&= \alpha \cdot \beta + \sup_{\xi<\delta}(\alpha \cdot \xi) && [\xi \mapsto \alpha \cdot \beta + \xi \text{ normal}] \\
&= \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta. && [\text{tanım}]
\end{aligned}$$

Problem 3. Aşağıdaki ordinal eşitliği doğru ise kanıtlayın, değilse bir karşıt örnek verin.

$$(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$$

Çözüm. $(1+1) \cdot \omega = 2 \cdot \omega = \omega$

$$1 \cdot \omega + 1 \cdot \omega = \omega + \omega = \omega \cdot 2 > \omega$$

Problem 4. Aşağıdaki kanıt nerede yanlıştır? Anlatın.

I. İlk olarak

$$0' = 1 \tag{1}$$
$$= 1 + 0. \tag{2}$$

II. Şimdi

$$\beta' = 1 + \beta \tag{3}$$

olsun. O zaman

$$\beta' + 1 = (1 + \beta) + 1 \tag{4}$$
$$= 1 + (\beta + 1) \tag{5}$$
$$= 1 + \beta'. \tag{6}$$

III. Son olarak γ limit olsun, ve $\alpha < \gamma$ durumunda

$$\alpha' = 1 + \alpha \tag{7}$$

olsun. O zaman

$$\gamma' = \sup_{\xi<\gamma}(\xi') \tag{8}$$
$$= \sup_{\xi<\gamma}(1 + \xi) \tag{9}$$
$$= 1 + \gamma. \tag{10}$$

Sonuç olarak her α için

$$\alpha' = 1 + \alpha. \tag{11}$$

Çözüm. Satır (8) yanlıştır, çünkü $\xi \mapsto \xi'$ işlemi normal değildir, ama $\sup_{\xi<\gamma}(\xi') = \gamma$.