Egzersizler
MATH 111

29 Aralık, 1998

Ali Nesin

1. x ve y iki küme olsun. $x = y$ ancak ve ancak $\forall z\ (x \in z \rightarrow y \in z)$ olduğunu gösterin.

2. Eğer X aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X'e $\leq$ ilişkisi tarafından **yarısıralı** denildiğini hatırlayın;

a. Her $x \in X$ için, $x \leq x$.

b. Her $x, y, z \in X$ için, eğer $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise, o zaman $x \leq z$.

$\leq$ ilişkisi X 'i yarı sıralasın.

2i. X üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanan $\equiv$ ilişkisinin X üzerinde denklik ilişkisi olduğunu gösterin.

$$x \equiv y \Leftrightarrow x \leq y \text{ and } y \leq x$$

$[x]$, $\equiv$ ilişkisine göre denklik sınıflarını temsil etsin.

2ii.

$$[x] \angle [y] \Leftrightarrow x \leq y$$

Olarak tanımlanmış ikili ilişkinin $X/\equiv$ üzerinde iyi tanımlı bir ilişki olduğunu gösterin.

2iii. $\angle$ nın $X/\equiv$ kümesini iyisıraladığını gösterin.

2iv. $\angle$ yarısıralamasının aşağıdaki özelliği sağladığını gösterin.

$$[x] = [y] \Leftrightarrow [x] \angle [y] \text{ and } [y] \angle [x]$$

Math 111

Vize 2

Şubat 1999

Ali Nesin

İpucu: Soruların görünümünden korkmayın.

I. Kombinatronik.

Verilen bir n doğal sayısı için, $n!$ sayısını tümevarımla aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$0! = 1$$
$$(n+1)! = n!(n+1)$$

$0 \leq k \leq n$ doğal sayıları için , $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ tanımını yapalım.

I.1. $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ eşitliğini gösterin.

I.2. $\binom{n}{k}$ sayısının bir doğal sayı olduğunu kanıtlayın.

I.3. Bütün n doğal sayıları ve x ve y kesirli sayıları için,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Eşitliğini kanıtlayın.

II. Logaritmik Sabit *e*

II.1. Üstten sınırlı artan bir dizinin Cauchy dizisi olduğunu gösterin.

II.2. Yeterince büyük n ler için $n! > 2^n$ olduğunu gösterin.

II.3. I.3 ve II.2'den yola çıkarak $a_n = (1+1/n)^n$ dizisinin üstten sınırlı olduğunu gösterin. (Üstsınır: 2 + 19/24).

II.4. $a_n = (1+1/n)^n$ dizisinin $n > 1$ için artan bir dizi olduğunu gösterin. (**İpucu:** İlk olarak $(x-1)^n \geq x^n - nx^{n-1}$ eşitsizliğinin $x \geq 1$ için doğru olduğunu gösterin. Daha sonra $a_{n-1} \leq a_n$ olduğunu gösterin).

II.5. $a_n = (1+1/n)^n$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu sonucuna varın.

III. Sonluluk

Sonlu olmanın 4 farklı tanımını vereceğiz.

Eğer X kümesiyle bir doğal sayı arasında birebir bir eşleme varsa bu X kümesine **1–sonlu** denir.

Eğer elemanları X kümesinin altkümelerinden oluşan boş olmayan her kümenin (altküme olma ilişkisine göre) maksimal elemanı varsa, X'e **2–sonlu** denir.

Eğer elemanları X kümesinin altkümelerinden oluşan boş olmayan her kümenin (altküme olma ilişkisine göre) minimal elemanı varsa, X'e **3–sonlu** denir.

X kümesiyle X'in özalt kümelerinden herhangi biriyle arasında birebir bir eşleme yoksa X'e **4–sonlu** denir.

III.1. 2-sonlu olmakla 3-sonlu olmak arasında fark olmadığını gösterin.

III.2. Bir doğal sayının 2-sonlu olduğunu gösterin.

III.3. 1-sonlu kümelerin 2 ve 3-sonlu olduğunu gösterin.

III.4. 2 veya 3-sonlu bir kümenin 4-sonlu olduğunu gösterin.

III.5. Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'nin hiçbir $i = 1, 2, 3, 4$ için i-sonlu olmadığını gösterin.

III.6. Her doğal sayının $i = 1, 2, 3, 4$ için i-sonlu olduğunu gösterin.

Math 111

Midterm 3

April 1999

Özlem Beyarslan - Ali Nesin

1. Eğer X kümesinin her elemanı X'in bir altkümesi ise X kümesine **tam** denir.

1a. Sonsuz sayıda tam küme örneği veriniz.

1b. A tam bir küme ise $\cap A$ ve $\cup A$ kümelernin de tam kümeler olduğunu gösteriniz.

1c. X tam bir küme ise $X \cup \{X\}$ kümesinin de tam olduğunu gösteriniz.

1d. X bir küme olsun. $X_o = X$ ve $X_{n+1} = X_n \cup (\cup X_n)$ olarak tanımlansın. $X_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ olsun. X_ω topluluğunun bir küme olduğunu varsayarak, X_ω kümesinin X kümesini eleman olarak içeren en küçük küme olduğunu gösterin.

1f. Diyelim ki $\{x\}$ tam bir küme, x hakkında ne söyleyebiliriz ?

2. $X \cup \{X\} = X$ ise X hakkında ne söyleyebiliriz?

3. Eğer her farklı iki x, y elemanı için ya $x \in y$ ya da $y \in x$ oluyorsa X kümesine **$\in$-bağlantılı** denir.

3a. Sonsuz sayıda $\in$-bağlantılı küme örneği verin.

3b. $\in$-bağlantılı bir kümenin altkümelerinin de $\in$-bağlantılı olduğunu gösterin.

3c. X $\in$-bağlantılı ise $X \cup \{X\}$ 'nın da $\in$-bağlantılı olduğunu gösteriniz.

3d. $\{x\}$ $\in$-bağlantılı olsun, x hakkında ne söyleyebiliriz?

4. Düzenlilik postulatı, boş olmayan her A kümesinde, $A \cap x = \emptyset$ eşitliğini sağlayan bir x elemanının varlığını söyler.

4a. Düzenlilik postulatını kullanarak hiçbir kümenin kendi kendisinin elemanı olamayacağını gösterin.

4b. Düzenlilik postulatını kullanarak $x \in y$ ve $y \in x$ koşulunu sağlayan iki küme olamayacağını gösterin.

4c. $A \subseteq A \times A$ ise $A = \emptyset$ olduğunu düzenlilik postulatı kullanarak gösterin.

Sınav

Kümeler Kuramı (Math 111)
Mayıs 5,1999
Ali Nesin – Özlem Beyarslan

Genel İpucu: Resim çizin.

X kümesi üzerine tanımlanmış $<$ ikili ilişkisi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa X'e daha doğrusu (iXi, <) çiftine **iyisıralı** küme denir:

i) Her $x, y, z \in X$ için, eğer $x < y$ ve $y < z$ ise o zaman $x < z$.
ii) Her $x \in X$ için, $\neg(x < x)$.
iii) Her $x, y \in X$ için, ya $x < y$ ya da $x = y$ ya da $y < x$ doğrudur.
iv) X in boş olmayan her altkümesinin bir en küçük elemanı vardır.

X i iyi sıralayan bir $<$ ikili ilişkisi varsa X'e **iyisıralanabilir** küme denir.

I. X, $<$ ikili ilişkisiyle iyisıralanmış bir küme olsun. $x \in X$ olsun ve $[0, x)$ kümesini X'in $\{y \in X: y < x\}$ altkümesi olarak tanımlayın. $Y \subset X$ olsun. Şu iki koşulun eşdeğer olduğunu kanıtlayın:
a) Bir $x \in X$ için $Y = [0, x)$.
b) Her $a \in Y$ için, eğer $b < a$ ise o zaman $b \in Y$.

II. X iyi sıralanabilir bir küme olsun. Y, X 'in herhangi bir altkümesi olsun. Y 'nin de iyisıralanabilir olduğunu gösterin.

III. X iyisıralanabilir bir küme olsun. Y herhangi bir küme olsun. Eğer Y'den X'e giden birebir bir fonksiyon varsa Y'nin de iyisıralanabilir olduğunu gösterin.

IV. İyisıralanmış bir kümenin boş olmayan herhangi bir altkümesinin en büyük elemanı olduğu doğru mudur?

V. X, $<$ ilişkisiyle iyisıralanmış bir küme olsun. $y \notin X$ ve $Y = X \cup \{y\}$ olsun. Y üzerine $<'$ ikili ilişkisini aşağıdaki şekilde tanımlayın:

$$a <' b \text{ ancak ve ancak } a \in X \wedge ((b \in X \wedge a < b) \vee b = y).$$

Va. $<'$ ilişkisinin Y'yi iyisıraladığını gösterin.
Vb. Y 'nin en büyük elemanı olduğunu gösterin.

VI. $<$ ikili ilişkisi X 'i iyi sıralasın. π: $X \to X$ **sıralamayı-koruyan** bir fonksiyon olsun, yani her $x, y \in X$ için, $x < y$ ancak ve ancak $\pi(x) < \pi(y)$ özelliğini sağlasın. Her $x \in X$ için, $x \leq \pi(x)$ olduğunu gösterin. (yani ya $x < \pi(x)$ ya da $x = \pi(x)$ olmalıdır.).

VII. Sıralamayı koruyan bir fonksiyon birebir olmak zorunda mıdır?

VIII. $<$ ikili ilişkisi X'i iyisıralasın ve $x \in X$ olsun. $Z = [0, x)$ olsun. X'ten Z'ye giden ve sıralamayı koruyan bir fonksiyon olmadığını gösterin.

IX. $<$ ikili ilişkisi X'i iyi sıralasın. $\varphi(x)$ bir formül olsun. Her $x \in X$ için, eğer her $y < x$ için $\varphi(y)$ doğruysa, o zaman $\varphi(x)$ önermesinin de doğru olduğunu varsayın. Her $x \in X$ için, $\varphi(x)$ olduğunu gösterin.

Ordinaller

Yaz Vizesi II

15Haziran, 1999

Ali Nesin

Giriş: X bir küme ve $<$ ilişkisi X üzerinde bir tamsıralama olsun. X'in boş olmayan her altkümesinin bu sıralamaya göre bir en küçük elemanı varsa $(X, <)$ sıralamasına **iyi-sıralı** denir. Yani X'in boş olmayan her A altkümesi için A'daki her a için $m \leq a$ özelliğini sağlayan bir $m \in A$ varsa X iyisıralıdır. Doğal olarak, verilen bir A için böyle bir m tektir.

İyisıralı bir kümenin altkümelerini X'in sıralamasıyla iyisıralayabiliriz.

Eğer $(X, <)$ sıralı bir kümeyse ve $x \in X$ ise,

$$s(x) = \{y \in X : y < x\}$$

tanımını yapalım. (x in başlangıç dilimi)

X bir kümeyse, $X^+ = X \cup \{X\}$ olarak tanımlanır. Temellendirme Beliti'ne göre X, X^+ kümesinin özaltkümesidir.

1. X'in iyisıralı bir küme olduğunu varsayın. X^+'yı X'in sıralamasını genişleterek sıralayın ve X'in kendi elemanlarından daha büyük olduğunu varsayın (yani X'i X'in en sonuna koyun). X^+'nın da iyisıralı bir küme olduğunu gösterin. (3 pts.)

2. (İyisıralı Kümelerde Tümevarım) $(X, <)$ iyisıralı bir küme ve her $x \in X$ için, eğer $s(x) \subseteq A$ ise, o zaman $x \in A$ özelliğini sağlayan bir $A \subseteq X$ olsun. $A = X$ eşitliğini gösterin. (5 pts.)

3. X ve Y iki iyi sıralı küme olsun.
$A = (X \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\})$ olsun.
A'yı aşağıdaki gibi sıralayalım:

X teki her x_1 ve x_2 için ve $x_1 < x_2$ ise $(x_1, 0) < (x_2, 0)$
Y deki her y_1 ve y_2 için ve $y_1 < y_2$ ise $(y_1, 1) < (y_2, 1)$
her $x \in X$ ve $y \in Y$ için $(x, 0) < (y, 1)$

Yukarıdaki ilişkinin A'yı iyi sıraladığını gösterin. (4 pts.)

Bir ordinal, her x elemanı için $x = s(x)$ eşitiğini sağlayan bir iyisıralamadır. Demek ki bir ordinal $\in$ ilişkisiyle iyisıralanmış bir kümedir:

$$\text{Her } \beta, \gamma \in \alpha \text{ için, } \gamma < \beta \text{ ancak ve ancak } \gamma \in \beta.$$

4. $\varnothing$'nin bir ordinal olduğunu gösterin. (2 pts.)

5.Eğer $\alpha \neq \varnothing$ bir ordinalse, o zaman $\varnothing \in \alpha$ ve $\varnothing$ nin α nın en küçük elemanı olduğunu gösterin . (7 pts.)

6. Eğer α bir ordinalse ve $\beta \in \alpha$ ise, o zaman $\beta \subset \alpha$. (2 pts.)

7. Bir ordinalin her elemanının bir ordinal olduğunu gösterin. (2pts.)

8. Eğer α bir ordinalse, o zaman α^+ da bir ordinaldir. (2 pts.)

9. α bir ordinal ve $\beta \in \alpha$ olsun. Ya $\beta^+ \in \alpha$ ya da $\beta^+ = \alpha$ olduğunu gösterin. (8 pts.)

10. 3'üncü soruda $X = \omega$ ve $Y = 1 = \{0\}$ olarak alın. A iyisıralı kümesinin ω^+ ordinaliyle izomorfik olduğunu gösterin yani A'dan ω^+'ya sıralamayı koruyan birebir ve örten bir eşleme olduğunu gösterin. (4 pts.)

11. 3'üncü soruda $X = 1 = \{0\}$ ve $Y = \omega$ olarak alın. A iyisıralı kümesiyle ω'nın **izomorf** olduğunu gösterin; yani A'dan ω'ya giden sıralamaya saygı duyan birebir ve örten bir eşleme olduğunu gösterin. (4 pts.)

12. α, β ordinal olsun. $\alpha < \beta$ ya da $\alpha = \beta$ ya da $\beta < \alpha$ olduğunu gösterin (18 pts.)

13. Bir ordinallerin kümesinin birleşiminin bir ordinal olduğunu gösterin. (3 pts.)

14. α ve β iki ordinal olsun. $f : \alpha \to \beta$ artan bir fonksiyon olsun. Eğer f örtense, o zaman $\alpha = \beta$ ve f'nin birim fonksiyon olduğunu gösterin. (18 pts.)

15. Her iyisıralı kümenin bir ordinale izomorf olduğunu gösterin. (18 pts.)

Kümeler Kuramı

Yaz Ödevi
18 Haziran, 1999
Ali Nesin

1. α ve β iki ordinal olsun. Eğer α ve β iyisıralı kümeler olarak izomorfiklerse, o zaman $\alpha = \beta$.

2. Her ordinal kümesinin elemanı olma ilişkisiyle iyisıralı olduğunu gösterin.

3. X ve Y iki küme olsun. X'ten Y'ye ya da Y'den X'e giden birebir bir fonksiyon olduğunu gösterin. (**İpucu:** Seçim Aksiyomu olmadan bu sonuç yanlıştır , bu yüzden kanıtınızda Seçim Aksiyomu'nu açıkça ve kesin olarak kullanmanız gerekir.).

4. Kendisinden bir önceki ordinal olmayan ve 0 olmayan bir α ordinaline **limit ordinal** denir. Yani $\beta^+ = \alpha$ eşitliğini sağlayan bir β yoksa α limit ordinaldir. ω'nın en küçük limit ordinal olduğunu gösterin. Ondan sonraki en küçük limit ordinal nedir?

5. X ve Y iki küme olsun ve $f : X \to Y$ örten bir fonksiyon olsun. $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ eşitliğini sağlayan bir $g : Y \to X$ birebir fonksiyonunun olduğunu gösterin.

6. Eğer λ bir limit ordinalse, o zaman her α ordinali için $\alpha + \lambda$'nın limit ordinal olduğunu gösterin.

7. Her α ordinali için, $\alpha < \beta$ ve α'dan β'ya hiçbir örten fonksiyon yoktur özelliğini sağlayan β ordinalinin olduğunu gösterin.

Ordinal Aritmetiği

Yaz Vizesi III
18 Haziran, 1999
Ali Nesin

α ve β iki ordinal olsun. α'nın sonuna β'nın elemanlarını koyarak $(\alpha \times \{0\}) \cup (\beta \times \{1\})$ kümesini iyisıralayın. Her kümede olduğu gibi, bu yeni iyisıralı küme bir ve tek ordinale izomorftur bu ordinale $\alpha + \beta$ diyeceğiz.

Aşağıda α, β, γ rastgele ordinaller olarak seçilmiştir.

1. $0 + \alpha = \alpha + 0 = \alpha$ ve $\alpha + 1 = \alpha^+$ olduğunu gösterin.

2. Eğer $\alpha > \omega$ ve $n \in \omega$ ise $n + \alpha = \alpha$ olduğunu gösterin.

3. Eğer $\beta < \alpha$ ise o zaman $\beta + \gamma = \alpha$ eşitliğini sağlayan γ ların olduğunu gösterin.

4. Eğer $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$ eşitliğini sağlayan bir α varsa, o zaman $\beta = \gamma$ olduğunu gösterin.

5. Kesin bir kanıt vermeden neden $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ eşitliğinin doğru olduğunu söyleyin.

α ve β iki ordinal olsun. $\alpha \times \beta$ kümesini aşağıdaki gibi sıralayın:

$(a, b) < (a', b')$ ancak ve ancak $b < b'$ veya ($b = b'$ ve $a < a'$).

Bu ters alfabetik sıralamadır. Bu bir iyisıralamadır ve bu yüzden tek bir ordinale $(\alpha\beta)$ izomorfiktir.

Aşağıda, α, β, γ rastgele ordinaller olarak seçilmiştir.

6. $\alpha 0 = 0\alpha = 0$ ve $1\alpha = \alpha 1 = \alpha$ eşitliklerini gösterin.

7. $2\omega = \omega$ olduğunu gösterin.

8. $\omega\omega \neq \omega$ olduğunu gösterin.

8. $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ ve $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$ eşitliklerinin doğru olduğunu gösterin. $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\beta + \beta\gamma$ eşitliğinin her zaman doğru olmadığını gösterin.

9. α, β ve λ ordinalleri için

$$\alpha^0 = 1$$
$$\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \alpha$$
$$\alpha^\lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} \alpha^\beta \quad \text{eğer } \lambda \text{ limit ordinalse}$$

olarak tanımlayın.

$0^\alpha = 0$ ve $1^\alpha = 1$ olduğunu gösterin.

10. $2^\omega = \omega$ olduğunu gösterin.

11. $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \alpha^\gamma$ ve $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$ eşitliklerinin her zaman doğru olduğunu gösterin. $(\alpha\beta)^\gamma = \alpha^\gamma \beta^\gamma$ eşitliğinin her zaman doğru olmadığını gösterin.

Math 111 (Kümeler teorisi)

Final sınavı (Sıralı kümeler üzerine)

Haziran 2001

Ali Nesin

Üzerinde $<$ ikili ilişkisi tanımlanan bir küme eğer

$$\forall x\, \neg(x < x)$$

$$\forall x\, \forall y\, \forall z\, ((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z)$$

koşullarını sağlıyorsa o kümeye ikili ilişkiyle birlikte bir **sıralı küme** denir.

Reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ ve onun ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}^{>0}$, $\mathbb{R}^{>0}$ gibi) altkümeleri (doğal sıralamayla sıralanmış) sıralı kümeler olarak incelenecek.

S herhangi bir küme ise onun tüm altkümeleri kümesi $\wp(S)$ ile gösterilecek. $\wp(S)$ kümesini içindelik ilişkisiyle sıralanmış olarak ele alacağız.

$(X, <)$ sıralı bir küme olsun. A, X in bir altkümesi olsun. Eğer X'in her $x < y$ elemanları için $x < a < y$ olacak şekilde bir $a \in A$ varsa, A'ya X'te **yoğun** denir.

1. "Yoğun olmak" sıralı kümeler arasında geçişken bir ilişki midir? Başka bir deyişle, eğer $A \subseteq B \subseteq C \subseteq X$ ise ve A, B'de yoğunsa ve B de C'de yoğunsa A, C'de yoğun mudur?

2. $\{x/y \in \mathbb{Q} : x, y \in \mathbb{Z}$ aralarında asal ve y tek sayı$\}$ kümesi $\mathbb{Q}$'da yoğun mudur?

3. Bir sıralı kümenin iki yoğun alt kümesinin kesişiminin de yoğun olduğu her zaman doğru mudur?

Sıralı $(X, <)$ kümesinden sıralı $(Y, \prec)$ kümesine giden f **morfizması** tüm $a, b \in X$ için $a < b \Leftrightarrow f(a) \prec f(b)$ koşulunu sağlayan, X den Y ye giden bir fonksiyondur.

$X = Y$ durumunda, birebir ve örten bir morfizmaya **otomorfizma** denir. Örneğin, birim fonksiyon her zaman bir otomorfizmadır.

3. Bir otomorfizmanın tersi yine bir otomorfizmadır, gösterin.

4. İki morfizmanın bileşkesinin de bir morfizma olduğunu gösterin.

5. a ve $b \in \mathbb{Q}$ olsun. $\varphi_{a,b}(x) = ax + b$ şeklinde tanımlanan $\varphi_{a,b} : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ fonksiyonunun morfizma olabilmesi için a ve b üzerine konulacak gerek ve yeter koşullar nelerdir? $\varphi_{a,b} \circ \varphi_{c,d}$ fonksiyonu hesaplayın: Öyle e ve f rasyonel sayıları bulun ki $\varphi_{a,b} \circ \varphi_{c,d}. = \varphi_{e,f}$ olsun.

11. $f : \mathbb{Q}^{>0} \rightarrow \mathbb{Q}$ fonksiyonunu

$$f(q) = \begin{cases} -1/q, & 0 < q < 1 \\ q - 2, & 1 > q \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. f 'nin birebir bir morfizma olduğunu gösterin.

12. f , X sıralı kümesinin bir otomorfizması olsun. X'in bir minimal elemanı olduğunu varsayalım, bu elemana a diyelim. O zaman $f(a)$ da X'in bir minimal elemanı olduğunu gösterin.

13. f, X in bir otomorfizması olsun. X'te $\{x \in X : a < x\}$ kümesi tek bir elemandan oluşacak şekilde bir a elemanı olduğunu varsayalım. $f(a)$'nın da aynı özelliğe sahip olduğunu gösterin.

14. $\wp(2)$'nin tüm otomorfizmalarını bulun.(Burada $2 = \{0, 1\}$ dir.)

15. $\wp(3)$'ün tüm otomorfizmalarını bulun.

16. S bir küme ve f de S'den S'ye giden birebir ve örten bir fonksiyon olsun. $\varphi_f : \wp(S) \to \wp(S)$ fonksiyonunu $\varphi_f(A) = f(A)$ ile tanımlayalım. φ_f , $\wp(S)$'nin bir otomorfizmasıdır, gösterin. $\varphi_f \circ \varphi_g$ nedir? Tersine, $\wp(S)$ nin herhangi bir otomorfizmasının S nin birebir, örten bir fonksiyonu için φ_f formunda olduğunu gösterin.

17. $(X, <)$ iyi sıralanmış bir küme olsun. Herhangi $f : X \to X$ morfizması her $x \in X$ için $f(x) \geq x$ eşitsizliğini sağlar, gösterin.

18. $\mathbb{N}$'nin tüm otomorfizmalarını bulun.

19. $\mathbb{Z}$'nin tüm otomorfizmalarını bulun.

20. $\mathbb{Z}$'den $\mathbb{Z}$'ye tanımlanmış otomorfizma olmayan bir morfizma bulun.

Örten bir morfizmaya **izomorfizma** denir. Eğer iki sıralı küme arasında bir izomorfizma varsa bu iki küme **izomorfiktir**, denir.

21. $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ izomorfik midir?

22. $\mathbb{R}^{\geq 0}$ ve $\mathbb{R}$ izomorfik midir?

23. $\mathbb{R}^{>0}$ ve $\mathbb{R}$ izomorfik midir?

24. $(0, 1)$ açık aralığı ile $\mathbb{R}$ izomorfik midir?

25. $\mathbb{Q}$'nun sayılamaz sonsuzlukta otomorfizması olduğunu gösterin.

26. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesini şu şekilde sıralayalım: $(x, y) \leq (z, t) \Leftrightarrow (x \leq z$ ve $y \leq t)$ (O zaman, $<$ eşitsizliği $(x, y) < (z, t) \Leftrightarrow (x, y) \leq (z, t)$ ve $(x, y) \neq (z, t)$ olarak tanımlanır). $\alpha(x, y) = (y, x)$ ile tanımlanan $\alpha : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ fonksiyonu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nin bir otomorfizmasıdır. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nin otomorfizmalarının sadece $\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ ve α olduğunu gösterin.

27. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$'yi yukarıdaki gibi sıralayalım. $a, b \in \mathbb{Z}$ olsun. $\tau_{a,b}(x, y) = (x + a, y + b)$ ile tanımlanan $\tau_{a,b}$ fonsiyonunun $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nin bir otomorfizmasını tanımladığınıgösterin. $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nin otomorfizmalarının kümesi olsun. α yukarıdaki gibi tanımlanmış iken

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = \{\tau_{a,b} : a, b \in \mathbf{Z}\} \cup \{\alpha \circ \tau_{a,b} : a, b \in \mathbb{Z}\}$$

olduğunu gösterin.

Math 111
Telafi Sınavı

Ali Nesin

Ocak 2004

Önemli not. Ya türkçe ya İngilizce yazın ama her iki durumda da tam cümleler kurun. Noktalamaya dikkat edin. $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$, $\exists$, $\forall$ gibi semboller kullanmayın. Bu sembollerin her kullanımı için 1 puan kıracağım. Cevaplarınızı açıklayın ama gereksi metinler yüzünden not kıracağım. Açıklanmamış bir cevap doğru olsa bile 0 puan alacaktır.

I. Geçişken ilişkiler. X bir küme olsun. X üzerinde bir **ikili ilişki** sadece $X \times X$'in bir altkümesidir.

X üzerindeki bir R ilişkisine eğer her x, y, $z \in X$ için $(x, y) \in R$ ve $(y, z) \in R$ olduğunda $(x, z) \in R$ oluyorsa **geçişken** denir. .

i. Aşağıdakilerden hangileri herhangi bir X kümesi üzerinde geçişken bir ilişki tanımalr? Açıklayın. (0 ya da 4 puan)

  i. $X \times X$.

  ii. $\emptyset$.

  iii. $\{(x, x) : x \in X\}$.

  iv. $\{(x, y) \in X^2 : x \neq y\}$.

ii. Aşağıdakilerden hangileri $\mathbb{N}$ üzerinde geçişken bir ilişki tanımlar? Açıklayın. (0 ya da 4 puan)

  i. $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : 5 \text{ böler } x - y\}$.

  ii. $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : 5 \text{ böler } x + y\}$.

  iii. $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : 5 > x - y\}$.

  iv. $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : 12 < x - y\}$.

iii. X üzerinde geçişken ilişkilerden oluşan bir kümenin kesişiminin de geçişken olduğunu gösterin. (4 puan)

iv. X üzerinde herhangi bir R ilişkisini içeren tüm geçişken ilişkilerin kesişimi R^t'nin R'yi içeren en küçük geçişken ilişki olduğunu gösterin. (10 puan)

v. R ve S iki ikili ilişkiyse $(R \cap S)^t \subseteq R^t \cap S^t$ olduğunu gösterin. (8 puan)

vi. R ikili bir ilişki olsun. Bu kümenin

$$\{S := (x, y) \in X^2 : \exists x = y_1,\, y_2, \ldots, y_n = y \in X \text{ öyle ki}$$
$$(y_i, y_i + 1) \in R \text{ for all } i = 1, \ldots, n-1\}$$

R'yi içeren geçişken bir ilişki olduğunu gösterin. Buradan $R^t = S$ sonucuna ulaşın. (10 puan)

vii. Genel olarak $(R \cap S)^t \neq R^t \cap S^t$ olduğunu kanıtlayın. (5 puan)

II. Kısmi Sıralamalar. X üzerindeki bir $<$ ilişkine eğer şu koşulları sağlıyorsa bir **kısmi sıralama** denir: ($(x, y) \in <$ yerine $x < y$ yazıyoruz),

PO1. Antiyansıma. Her $x \in X$ için $x \not< x$.

ve

PO2. Geçişkenlik. Her x, y, $z \in X$ için eğer $x < y$ ve $y < z$ ise $x < z$.

Eğer $x < y$ or $x = y$ ise $x \leq y$ yazacağız.

$(X, <)$ kısmi sıralı bir küme ve $A \subseteq X$ olsun. Bir $u \in X$ elemanına eğer her $a \in A$ için $a \leq u$ koşulunu sağlıyorsa A'nın bir üst sınırı denir. Bir $v \in X$ elemanına eğer i) v, A'nın bir üst sınırıysa ve ii) A'nın her üst sınırı u için eğer $u \leq v$ ise $u = v$ koşulu sağlanıyorsa A'nın bir **en küçük üst sınırı** denir.

dhaSru24koşulları sağlayan birer $(X, <)$ kısmi sıralaması ve A kümesi bulun.

i. A'nın bir en küçük üst sınırı var ve A'da değil.

ii. A'nın tam iki en küçük üst sınırı var.

iii. A'nın en küçük üst sınırı yok.

iv. A'nın A'da olan bir en küçük üst sınırı var. (4 puan)

ii. $(X, <)$ bir kısmi sıralı küme olsun ve A da X'in bir altkümesi olsun. A'nın gene A'da olan bir en küçük üst sınırı olduğunu varsayalım. Bu durumda A'nın sadece bir en küçük üst sınırı olduğunu gösterin. (2 puan)

iii. $(X, <)$ bir kısmi sıralı küme olsun. X'in herhangi bir elemanının $\emptyset$'ın bir üst sınırı olduğunu gösterin. (2 puan)

iv. $(X, <)$ bir kısmi sıralı küme olsun. $\emptyset$'nin bir en küçük üst sınırı varsa $(X, <)$ hakkında ne söyleyebilirsiniz? (2 puan)

v. U bir küme ve $X = \wp(U)$ olsun. X'i kapsamayla sıralayalım. Bunun X üzerinde bir kısmi sıralama olduğunu gösterin. (2 puan) X'in her altkümesinin bir en küçük üst sınırı olduğunu gösterin. (5 puan)

vi. $(X,<)$ bir kısmi sıralı küme olsun. Diyelim ki her a, $b \in X$ için $\{a,b\}$ kümesinin bir tek en küçük üst sınırı var. $a \vee b$ bu en küçük üst sınırı göstersin.

i. Bu özelliği sağlayan sonsuz bir kısmi sıralı küme örneği verin. (2 puan)

ii. KAnıtlayın ya da tersini kanıtlayın: $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ her a, b, $c \in X$ için. (10 puan)

III. Doğrusal sıralamalar. Bir kısmi sıralamaya eğer PO1 ve PO2'den başka

PO3 Her x, $y \in X$ için ya $x < y$ ya $x = y$ ya da $y < x$ doğrudur

özelliğini sağlıyorsa **doğrusal sıralama** denir.

i. Eğer $(X,<)$ doğrusal sıralamaysa ve A, X'in en küçük üst sınırı olan bir altkümesiyse, bu altkümenin tek olduğunu kanıtlayın. (4 puan)

IV. İyi sıralı kümeler. Eğer bir doğrusal $(X,<)$ sıralamasının her boş olmayan altkümesinin bir minimal elemanı varsa $(X,<)$ sıralamasına **iyi sıralama** denir.

i. Sonlu ve sonsuz iyi sıralı küme örnekleri verin. (2 puan)

ii. $X = \mathbb{N} \times \{0\} \cup \mathbb{N} \times \{1\}$ olsun. X üzerinde $<$ ilişkisini şöyle tanımlayalım: her x, $y \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{array}{lll} (x,0) < (y,0) & \text{ancak ve ancak} & x < y \\ (x,1) < (y,1) & \text{ancak ve ancak} & x < y \\ (x,0) < (y,1) & \text{hep doğru} & \end{array}$$

i. $(X,<)$ doğrusal sıralı mı? (2 puan)

ii. $(X,<)$ iyi sıralı mı? (2 puan)

iii. $\{1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ doğal sıralamasıyla iyi sıralı mı? (2 puan)

iv. $\{1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cup \{0\}$ doğal sıralamasıyla iyi sıralı mı? (2 puan)

v. Maksimal elemanlı sonsuz bir iyi sıralama bulun. (4 puan)

vi. İyi sıralı bir X kümesinde boş olmayan altkümelerin minimal elemanlarını tek olduğunu gösterin. (2 puan)

vii. Her boş olmayan iyi sıralı kümenin tek bir minimal elemanı olduğunu gösterin. (2 puan)

viii. $(X,<)$ iyi sıralı bir küme olsun. X'in en fazla bir elemanı dışında tüm x elemanlarının şu özelliği sağladığını gösterin: "Öyle bir y var ki $x < y$ ve her z için eğer $x < z$ ise $y < z$". (5 puan) Böyle bir y'nin varsa tek olduğunu gösterin. (3 puan)

Math 111
Final
2006 Fall

1. X bir küme ve R de X üzerine tanımlanmış ikili bir ilişki olsun. Her $x, y \in X$ için
$xRy \Rightarrow x \equiv y$
önermesini sağlayan X üzerinde en küçük bir denklik $\equiv$ bağıntısı olduğunu kanıtlayın.

2. $(X_n)_n$, X kümesinin altkümelerinden oluşan bir dizi olsun. liminf X_n ve limsup X_n kümelerini şöyle tanımlayalım: $a \in X$ için

$a \in$ liminf $X_n \Leftrightarrow$ öyle bir n_0 doğal sayısı vardır ki her $n > n_0$ için $a \in X_n$ olur.

$a \in$ limsup $X_n \Leftrightarrow$ her n_0 doğal sayısı için öyle bir $n > n_0$ var ki $a \in X_n$ olur.

2i. limsup X_n kümesinin sonsuz sayıda n için X_n'de olan elemanlardan oluştuğunu gösterin. liminf X_n kümesinin sonlu tanesi hariç bütün n'ler için X_n'de olan elemanlardan oluştuğunu gösterin.

2ii.

$$\operatorname{liminf} X_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} X_m\right)$$

ve

$$\operatorname{limsup} X_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} X_m\right).$$

eşitliklerini gösterin.

2iii. $X_n = \{n, n+1, .., 2n\}$ olsun. liminf X_n ve limsup X_n kümelerini bulun.

2iv. Her n için $X_{n+1} \subseteq X_n$ olsun. liminf X_n ve limsup X_n kümelerini bulun.

2v. liminf $X_n \neq$ limsup X_n eşitsizliğini sağlayan bir örnek verin.

3. R değişmeli bir halka olsun. $\leq$ da R üzerinde bir tamsıralama olsun öyle ki her $x, y, z \in R$ için,

a) $x \leq y$ ise $x + z \leq y + z$.

b) $0 < x$ ve $0 < y$ ise $0 < xy$.

Her $x, y, z \in R$ için aşağıdakideri kanıtlayın.

3i. $x < y$ ise $-y < -x$.

3ii. $x < y$ ise $x + z < y + z$.

3iii. $x \leq y$ ve $0 \leq z$ ise $xz \leq yz$.

3iv. $x \leq y$ ve $0 \geq z$ ise $xz \geq yz$.

3v. $-1 < 0 < 1$.

3vi. $x \neq 0$ ve $y \neq 0$ ise $xy \neq 0$.

3vii. $x^2 \geq 0$.

3viii. $x < 0$ ise x, R'de karelerin toplamı olarak yazılamaz..

3ix. -1, R'de karelerin toplamı olarak yazılamaz.

3x. $x \geq 0$ ve x in R'de çarpımsal tersi var ise $x^{-1} > 0$.

$|x|$ şöyle tanımlansın: $|x| = x$ eğer $x \geq 0$ ve $|x| = -x$ eğer $x \leq 0$.

3xi. $|x| \geq 0$.

3xii. $xy| = |x|\,|y|$.

3xiii. $|x + y| \leq |x| + |y|$.

3xiv. $|x - y| \geq \big||x| - |y|\big|$.

$d(x, y) = |x - y|$ olarak tanımlansın.

3xv. $d(x, y) = 0$ ancak ve ancak $x = y$.

3*x*vi. $d(x, y) = d(y, x)$.
3*x*vii. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Math 111 / Math 113 Set Theory
Midterm
November 2007
Ali Nesin

Tanımlar:
$0 = \emptyset$.
x bir küme ise, $S(x) = x \cup \{x\}$.
0'ı içeren ve içerdiği her x elemanı için $S(x)$'i de içeren bir kümeye ***tümevarımsal*** denir.
ω en küçük tümevarımsal kümedir, i.e. Bütün tümevarımsal kümelerin kesişimidir.

1. *x ve y küme ise $\{\{x\}, \{x, y\}\}$'nin de küme olduğunu gösterin.* (7 pts.)

Proof: x ve y küme ise $\{x, y\}$'nin küme olduğunu söyleyen bir aksiyom vardır. $x = y$ alırsak $\{x\}$'in de bir küme olduğu çıkar.Aynı aksiyomdan $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ bir kümedir.

2. *x ve y iki küme olmak üzere, (x, y) ikilisini $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ kümesi olarak tanımlayalım. x, y, z, t herhangi dört küme ise $(x, y) = (z, t)$* ancak ve ancak *$x = z$* ve *$y = t$ olduğunu gösterin.* (7 pts.)

Proof: $x = z$ ve $y = t$ ise $(x, y) = (z, t)$ olduğu barizdir.
Diğer taraftan, $(x, y) = (z, t)$ olsun. Tanım gereği
$$\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{z\}, \{z, t\}\}.$$
Dolayısıyla $\{x\}$ hem $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ hem de $\{\{z\}, \{z, t\}\}$ kümelerinin elemanı. Yani ya $\{x\} = \{z\}$ ya da $\{x\} = \{z, t\}$. İlk durumda $x = z$ ve ikinci durumda $z = t = x$.Yani her iki durumda $x = z$ dir. Geriye $y = t$ olduğunu göstermek kalıyor.
$$\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{z\}, \{z, t\}\}$$
ve $\{x\} = \{z\}$olduğundan, $\{x, y\} = \{z, t\}$ olmalı. Sonuç olarak $x = z$ eşitliği $y = t$ eşitliğini için yeterlidir.

3. *X ve Y iki küme olsun ve $Z = \wp(\wp(X \cup Y))$ olsun.* $(x, y) \in Z$ *for all $x \in X$ and $y \in Y$ olduğunu gösterin.* (7 pts.)

Proof: $\wp(\wp(X \cup Y))$ kümeler kuramındaki iki aksiyomdan dolayı bir kümedir. $x \in X$ ve $X \subseteq X \cup Y$ ise, $x \in X \cup Y$ dir. Aynı şekilde $y \in X \cup Y$.
$$\{x\} \subseteq X \cup Y \text{ ve} \{x, y\} \subseteq X \cup Y.$$
Dolayısıyla
$$\{x\} \in \wp(X \cup Y) \text{ ve } \{x, y\} \in \wp(X \cup Y).$$
bundan dolayı
$$\{\{x\}, \{x, y\}\} \subseteq \wp(X \cup Y).$$
Bu da bize
$$\{\{x\}, \{x, y\}\} \in \wp(\wp(X \cup Y)) = Z. \text{ verir.}$$

4. *$x \in X$ ve $y \in Y$ olacak şekilde bütün x, y ikililerin bir küme oluşturduğunu gösteriniz. Bu kümeyi $X \times Y$ ile gösteriyoruz.* (7 pts.)

Proof: Bu topluluk $\{(x, y) \in \wp(\wp(X \cup Y)) : x \in X, y \in Y\}$ ile ifade edilebilir. Bu topluluğun küme olduğunu göstermek için sınıfta verdiğimiz 3. aksiyomu kullanacagız: "Z bir küme ve $\varphi(z)$ bir formülse $\{z \in Z : \varphi(z)\}$ topluluğu bir kümedir".
$\alpha(x, u)$ önermesi
$$x \in u \wedge \forall t\, (t \in u \rightarrow t = x)$$
olsun. O zaman $\alpha(x, u)$ ancak ve ancak $u = \{x\}$ olduğunda sağlanır.

$\beta(x, y, v)$ önermesi,

$$x \in v \wedge y \in v \wedge \forall t\,(t \in u \to (t = x \vee t = y))$$

olsun. O zaman da $\beta(x, y, v)$ ancak ve ancak $v = \{x, y\}$ olduğunda sağlanır.

$\gamma(x, y, z)$ önermesi,

$$\exists u\, \exists v\, (\alpha(x, u) \wedge \beta(x, y, v) \wedge \beta(u, v, z))$$

olsun bu durumda da $\gamma(x, y, z)$ ancak ve ancak $z = \{\{x\}, \{x, y\}\} = (x, y)$ olduğunda sağlanır.

$\varphi(z)$ önermesi,

$$\exists x\, \exists y\, (x \in X \wedge y \in Y \wedge \gamma(x, y, z))$$

olsun. $\varphi(z)$ ancak ve ancak bir $x \in X$ ve $y \in Y$ için $z = (x, y)$ ise sağlanır.

Dolayısı ile $\{(x, y) \in \wp(\wp(X \cup Y)) : x \in X, y \in Y\}$ topluluğu

$$\{z \in \wp(\wp(X \cup Y)) : \varphi(z)\}$$

ile ifade edilebilir. Bu sayede yukarıda ifade edilen aksiyomdan dolayı bu topluluk yani $X \times Y$ bir kümedir.

5. *Bir $x \in \omega$ için $y = S(x)$ koşulunu sağlayan bütün (x, y) ikililerinin topluluğu $\omega \times \omega$'nin bir altkümesidir.* (7 pts.)

Proof: Sadece $\{(x, y) \in \omega \times \omega : y = S(x)\}$ topluluğunun bir küme olduğunu göstermemiz gerekiyor. $\omega \times \omega$'nin bir küme olduğunu bildiğimiz için $y = S(x)$'i bir $\varphi(z)$ formülüyle ifade etmemiz yeterli olacaktır.

$\varepsilon(x, y, z)$ önermesi,

$$\forall t\, (t \in z \leftrightarrow t \in x \vee t \in y)$$

olsun. $\varepsilon(x, y, z)$ ancak ve ancak $z = x \cup y$ iken sağlanır.

$\psi(x, y)$ önermesi,

$$\exists t\, (\alpha(x, t) \wedge \varepsilon(x, t, y))$$

olsun. (burada α önceki sorudaki gibi) Bu durumda $\psi(x, y)$ ancak ve ancak $y = x \cup \{x\} = S(x)$ ise sağlanır.

Demek ki $\{(x, y) \in \omega \times \omega : y = S(x)\}$ topluluğu aynı zamanda

$$\{z \in \omega \times \omega : \exists x\, \exists y\, (\gamma(x, y, z) \wedge \psi(x, y)\}$$

ile ifade edilebilir, (burada γ önceki sorudaki formül gibidir) ve dolayısıyla da 3'üncü aksiyomdan dolayı topluluk bir kümedir.

6. *Her $n, m \in \omega$ için eğer $n \in m$ ise $n \subseteq m$.* (7 pts.)

Proof: m üzerine tümevarım yapalım. Eğer $m = 0$ ise önermenin doğru olduğu barizdir. Önermenin m.için doğru olduğunu kabul edelim. $n \in S(m) = m \cup \{m\}$ olsun. Ya $n \in m$ ya da $n \in \{m\}$ olmalıdır. Birinci durumda tümevarım hipotezinden $n \subseteq m$ dir çünkü $m \subseteq m \cup \{m\} = S(m)$ dir ve bu durumda da $n \subseteq S(m)$ elde ederiz. İkinci durumda da $m = n$ ve yine $n = m \subseteq m \cup \{m\} = S(m)$ elde edilir.

7. *Her $n, m \in \omega$ için eğer $S(n) = S(m)$ ise ya $n \in m$ ya da $n = m$ olur.* (7 pts.)

Proof: $S(n) = S(m)$ olduğunu kabul edelim. Tanım gereği, $n \cup \{n\} = m \cup \{m\}$ olur. n, $n \cup \{n\}$ kümesinin bir elemanı olduğu için $n \in m \cup \{m\}$ olmalıdır. Dolayısıyla ya $n \in m$ ya da $n \in \{m\}$ olur. İkinci durumda $n = m$ elde edilir.

8. *$S : \omega \to \omega$ birebir bir fonksiyon olduğunu gösterin.* (7 pts.)

Proof: $n, m \in \omega$ olsun. $S(n) = S(m)$ ama $n \neq m$ olduğunu kabul edelim. 7. sorudan ya $n \in m$ ya da $n = m$ olmalıdır. Ayrıca $n \in m$ dir ve 6. sorudan, $n \subseteq m$ çıkar. Simetriden dolayı $m \subseteq n$ de gösterilmiş olur. Yani $n = m$ dir.

9. $S(\omega) = \omega \setminus \{0\}$ olduğunu gösteriniz. (7 pts. **Note:** Burada $S(\omega)$, ω'nun fonksiyon altındaki görüntüsüdür.)

Proof: $S(n) = n \cup \{n\}$ olduğu için $S(n)$ asla boş olamaz. Diğer taraftan her $n \in \omega$, ya $n = 0$ ya da bir $m \in \omega$ için $n = S(m)$ olduğunu göstereceğiz. Tümevarım yapıyoruz. Eğer $n = 0$ ise önermenin doğru olduğu barizdir. n için kabul edelim ve $S(n)$ için gösterelim. Yani S(n) in bir m için S-imgesinde olduğunu söylemek istiyoruz. Fakat tabiki $S(n)$ birseyin S altındaki görüntüsü ki o da n...

10. *Her $n \in \omega$ için $n \notin n$.* (7 pts.)

Proof: n üzerine tümevarım yapacağız. Eğer $n = 0$ ise $n = \emptyset$ ve tabii ki $n \notin n$. Şimdi $n \notin n$ olduğunu varsayalım ve $S(n) \notin S(n)$ olduğunu gösterelim.$S(n) \in S(n) = n \cup \{n\}$ olduğunu farzedelim. Bu durumda ya $S(n) \in n$ ya da $S(n) = n$ olmalıdır. Fakat 6. sorudan dolayı her iki durumda da $S(n) \subseteq n$ olur. Fakat, $n \in n \cup \{n\} = S(n)$, olduğu için bu $n \in n$ olmasını gerektirir, çelişki.

11. *Her $n, m \in \omega$ için $n < m$ ilişkisini $n \in m$ olarak tanımlanan ikili ilişkinin ω üzerinde bir sıralama tanımladığını gösterin* (7 pts.)

Proof: Her $n, m, k \in \omega$ için

a) $n \notin n$

ve

b) $n \in m$ ve $m \in k$ ise $n \in k$.

Birincisini 10. sorudan çıkartabiliyoruz. Şimdi $n \in m \in k$ olsun. 6. sorudan, $n \in m \subseteq k$ *dir*. Dolayısı ile $n \in k$ *olmalıdır*.

12. Bu sıralamanın $<$ *bir tamsıralama olduğunu gösterin*. (7 pts.)

Proof: Aşağıdaki önsava ihtiyacımız var.

Önsav: *Her $n, m \in \omega$ için $n \in m$ ise ya $S(n) \in m$ ya da $S(n) = m$ dir.*

Proof: m üzerine tümevarım yapalım. $m = 0$ ise ispatlanacak birsey yok. Şu andan sonra m'nin aşağıdaki önermeyle verilmiş olduğunu düşünelim.

$$\text{Her } n \in \omega \text{ için eğer } n \in m \text{ ise ya } S(n) \in m \text{ ya da } S(n) = m \text{ olmalıdır.}$$

$$\text{Her } n \in \omega \text{ için } n \in S(m) \text{ ise ya } S(n) \in S(m) \text{ ya da } S(n) = S(m) \text{ olmalıdır.}$$

$n \in S(m)$ herhangi bir eleman olsun. Ya $S(n) \in S(m)$ ya da $S(n) = S(m)$ olduğunu göstereceğiz. $n \in S(m) = m \cup \{m\}$ olduğu için ya $n \in m$ ya da $n = m$ olmalıdır. İkinci durumda da $S(n) = S(m)$ dir. Birinci durumda ise, tümevarım hipotezinden, ya $S(n) \in m$ ya da $S(n) = m$ ve her iki durumda da $S(n) \in S(m)$ dir. Bu, önsavın ispatını tamamlar.

Şimdi

$$\text{her } m \in \omega \text{ için ya } n \in m \text{ ya } n = m \text{ ya da } m \in n$$

önermesini n üzerine tümevarımdan gösteriyoruz. Önce $n = 0$ olduğunu düşünelim ve bir $m \in \omega$ seçelim. $m \in 0$ durumu imkansız olduğundan aslında göstermemiz gereken şey

$$\text{ya } 0 = m \text{ ya da } 0 \in m.$$

Bunu m üzerine tümevarım ile ispat edeceğiz. $m = 0$ ise ispat edecek bir şey yok. Diyelim ki bu m için sağlandı, $S(m)$ için göstermeliyiz. Eğer $m = 0$, $0 = m \in S(m)$. Eğer $m \neq 0$, ise $0 \in m \subseteq S(m)$. Dolayısı ile ifade $n = 0$ için doğrulanmş oldu.

Şimdi farzedelim ki

$$\text{her } m \text{ için ya } n \in m \text{ ya } n = m \text{ ya da } m \in n.$$

Aynı önermenin $S(n)$ için de doğru olduğunu göstermek istiyoruz. Yani her m için ya $S(n) \in m$ ya $S(n) = m$ ya da $m \in S(n)$.

$m \in \omega$ herhangi bir eleman olsun.Tümevarım hipotezine göre üç ihtimal var.

$$n \in m \text{ ya } n = m \text{ ya da } m \in n.$$

İkinci durumda, $m = n \in S(n)$ ve işimiz bitti.

Üçüncü durumda, $m \in n \subseteq S(n)$ ve işimiz yine bitti.

Sadece $n \in m$ olan birinci durum kaldı. Fakat bu durumu da zaten lemma ile halletmiştik.

13. *Bu sıralamada* ω*'nın boş olmayan her altkümesinin bir en küçük elemanı vardır*. (8 pts.)

Proof: X, ω'nın boş olmayan bir altkümesi olsun. X'in bir en küçük elemanının olmadığını farzedelim. Öncelikle n üzerine tümevarım ile

$$\text{her } m < n \text{ için } m \notin X \text{ için.}$$

$n = 0$ için bariz bir şekilde doğru. Diyelim ki önerme n için doğru. $m < S(n)$ olsun. $m \in S(n) = n \cup \{n\}$ ve ya $m \in n$ ya da $m = n$. Birinci durumda $m < n$ ve tümevarımla m X'in bir elemanı olamaz. İkinci durumda eğer n, X'in bir elemanı olmuş olsaydı o zaman n, X'in en küçük elemanı olurdu. Tümevarım hipotezinden dolayı $n \notin X$ de olmak zorundadır.. Dolayısı ile önerme ispatlanmış oldu. Şimdi $X = \varnothing$ ve $n \in X$ olsun. Simdi de $n < S(n)$ ise az önce ispat ettiğimiz önerme $S(n)$ için yanlıştır, çelişki. Dolayısı ile $X = \varnothing$.

14. ω*'nın boş olmayan her altkümesi X için öyle bir* $x \in X$ *vardır ki* $x \cap X = \varnothing$. (8 pts.)

Proof: x, X'in en küçük elemanı olsun. Eğer $y \in x \cap X$ ise y de X'in bir elemanı olur ve x,'den küçüktür, çelişki. Dolayısı ile $x \cap X = \varnothing$.

Ordinaller Üzerine Sınav

Mart 7, 2010

Yunan harfleri Ordinalleri temsil etmektedir.

1. Eğer $\alpha < \beta$ ordinallerse, o zaman $\omega^\alpha + \omega^\beta = \omega^\beta$ olduğunu gösterin. Bundan yola çıkarak eğer $\omega^\beta \leq \gamma$ ise o zaman $\omega^\alpha + \gamma = \gamma$ olduğunu gösterin.
2. $2^\omega = \omega$ eşitliğini gösterin.
3. Eğer $1 < \alpha$ ve $\beta < \gamma$ ise o zaman $\alpha^\beta < \alpha^\gamma$.
4. $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \alpha^\gamma$ olduğunu gösterin.
5. λ bir ordinal olsun. Eğer her $\alpha \in \gamma$ için öyle bir $\beta \in B$ var ki $\alpha \leq \beta$ özelliğini sağlayan λ nın B altkümesine λ da ***kofinal*** *denir.* Eğer B λ da kofinalse o zaman $\{\alpha^\beta : \beta \in B\}$ in α^λ da kofinal olduğunu ve $\alpha^\lambda = \cup_{\beta \in B} \alpha^\beta$ eşitliğini gösterin.
6. Aşağıdaki ordinalleri sadeleştirilmiş şekilde yazın. İfadelerinizi kanıtlayın.
   $(\omega+1)^2$,
   $(\omega+1)^3$,
   $(\omega+1)^4$,
   $(\omega+1)^\omega$,
   $(\omega+1)^{\omega+1}$,
   $(\omega+1)^{\omega 2}$,
   $(\omega^2 + \omega + 1)^\omega$.