Kümeler kuramı

David Pierce

18 Nisan 2013, saat 17:35

Matematik Bölümü
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi
İstanbul
dpierce@msgsu.edu.tr
http://mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/

Önsöz

Bu notları, MAT 340 kodlu Aksiyomatik Kümeler Kuramı dersi için yazıyorum. Lütfen hataları bana bildirin.

İçindekiler

1 Giriş **1**
1.1 Sayma ve ordinaller . . . 1
1.2 Ordinaller Hesapları . . . 5
1.3 Kümeler ve Sınıflar . . . 7
1.4 Kardinaller . . . 9

2 Mantık **16**
2.1 Formüller . . . 16
2.2 Doğruluk ve Yanlışlık . . . 18
2.3 Eşitlik . . . 21
2.4 Sınıflar . . . 24
2.5 İşlemler . . . 26

3 Doğal Sayılar **29**
3.1 Doğal sayılar kümesi . . . 29
3.2 Bağıntılar . . . 34
3.3 Sıralamalar . . . 37
3.4 Ordinaller . . . 39
3.5 Özyineleme . . . 41

4 Ordinaller **46**
4.1 Özyineleme . . . 46
4.2 Toplama . . . 50
4.3 Çarpma . . . 54

5 Kardinaller **57**
5.1 Eşleniklik . . . 57
5.2 Büyüklük . . . 59

Kaynakça **63**

1 Giriş

1.1 Sayma ve ordinaller

Bir torbada birkaç tane satranç taşımız var, onları teker teker çekiyoruz, ve aynı zamanda sayılar diyoruz:

1. piyade (*pawn*)	3. at (*knight*)	5. vezir (*queen*)
2. kale (*rook*)	4. fil (*bishop*)	6. şah (*king*)

Bu şekilde taşları *saymış olduk.* Sonuç olarak 6 tane taşımız var deriz.

Ama taşları belli bir *sırada* çektik. Başka bir sıra mümkündü. Taşları tekrar çantaya koyup çekiyoruz:

1. piyade	3. vezir	5. fil
2. at	4. kale	6. şah

Son taşı çekince yine 6 numarasını diyoruz. Her zaman öyle olacak: her zaman taşları sayınca 6'ya kadar sayacağız. Ama nasıl biliyoruz?

Saymak nedir? Saymanın nesnesi, bir **topluluktur** (*collection*).* Bir topluluğu sayınca aslında onu **sıralıyoruz** (*order*).

A bir topluluk olsun, ve R, onun bir **sıralaması** (*ordering*) olsun. O zaman A topluluğunun **elemanları** (*elements*) veya **öğeleri** (*members*) vardır; ve bu topluluğun tüm b, c, ve d elemanları için

1) $b\ R\ b$ değil, yani
$$\neg\, b\ R\ b;$$

2) $b\ R\ c$ ve $c\ R\ d$ ise $b\ R\ d$ olur, yani
$$b\ R\ c\ \ \&\ \ c\ R\ d \implies b\ R\ d;$$

3) b ve c birbirinden farklıysa ya $b\ R\ c$ ya da $c\ R\ b$ olur, yani
$$b = c\ \vee\ b\ R\ c\ \vee\ c\ R\ b.$$

*****Kümeler** (*sets*), özel topluluk olacak.

Yani R,

(1) **yansımasız** veya **dönüşsüz** (*irreflexive*),[†]
(2) **geçişli** veya **geçişken** (*transitive*),[‡] ve
(3) **doğrusal** (*linear*) veya **tam** (*total*)

bir bağıntıdır. O zaman (A, R) ikilisi (aslında *sıralı* ikilisi), bir **sıradır.** Bu sıra, A **topluluğunun bir sırasıdır.**

Şimdi A, satranç taşları torbamız olsun. O zaman A topluluğunun tüm sıraları, birbiriyle **izomorftur** (*isomorphic*). Yani R ile S, A topluluğunun sıralamalarıysa, o zaman A topluluğundan kendisine giden öyle bir birebir ve örten f göndermesi vardır—yani A topluluğunun öyle bir f **permütasyonu** (*permutation*) veya **eşleşmesi** vardır—ki A topluluğunun tüm b ile c elemanları için

$$b \mathrel{R} c \iff f(b) \mathrel{S} f(c)$$

denkliği doğrudur. Ama bunu nasıl biliyoruz?

Şimdi A, pozitif *tamsayılar* topluluğu olsun. Yani $A = \mathbb{N}$ olsun. Bu topluluğun alışılmış *doğal* $<$ sıralaması vardır. Ama başka sıralamaları da vardır. Mesela $\mathbb{N}$ topluluğunun öyle bir R **bağıntısı** (veya **ilişkisi:** *relation*) vardır ki topluluğun tüm k ile m elemanları için

$$k \mathrel{R} m \iff 1 < k < m \lor 1 = m < k$$

denkliği doğrudur. Öyleyse R bağıntısı, $\mathbb{N}$ topluluğunu sıralıyor; aslında R sıralaması, $<$ sırası ile hemen hemen aynıdır, ancak R sırasına göre 1 elemanı, $\mathbb{N}$ topluluğunun *son* elemanıdır. O zaman $(\mathbb{N}, <)$ ile $(\mathbb{N}, R)$, birbirine izomorf değildir:

$<$	1,	2,	3,	$\dots$;	?
R	2,	3,	4,	$\dots$;	1

Şimdi

$$k \mathrel{S} m \iff (2 \mid k + m \;\&\; k < m) \lor (2 \nmid k \;\&\; 2 \mid m)$$

olsun. O zaman $k \mathrel{S} m$ ancak ve ancak

[†] Işık, bir aynadan yansır; ses, bir kayalıktan yansır. *Yıkanmak* fiili, *kendi kendini yıkamak* öbeğinin anlamına gelirse, dönüşlüdür; *yıkanılma* fiilinin anlamına gelirse, edilgendir [10, 14].

[‡] *Kaynatmak* fiili geçişlidir, çünkü bir nesne ister; *kaynamak* geçişsizdir.

1) hem k hem m ya tek ya çift, ve $k < m$, veya
2) k tek ve m çift.

O zaman S bağıntısı da, $\mathbb{N}$ topluluğunu sıralıyor, ama $(\mathbb{N}, <)$ ile $(\mathbb{N}, S)$ sıraları, birbirine izomorf değildir:

$<$	1,	2,	3,	...;	?	?	?	...
S	1,	3,	5,	...;	2,	4,	6,	...

$\mathbb{N}$ topluluğu sayılabilir mi? Normalde, sayarken, sayılar diyoruz. R sıralamasına göre $\mathbb{N}$ topluluğunu sayınca 1 için hangi sayıyı diyebiliriz? Yani yukarıdaki ilk tablonun alt satırındaki 1 numarasının üstünde, soru işaretinin yerine hangi sayıyı koyabiliriz? Bu sayı $\omega + 1$ olacak. Ondan sonra $\omega + 2$, $\omega + 3$, vesaire sayıları olacak; bunlardan sonra, $\omega + \omega$, yani $\omega \cdot 2$, $\omega \cdot 2 + 1$, vesaire sayıları olacak. Ama $\mathbb{N}$ topluluğunun sadece ω tane elemanı olacak.

Aslında kümeler kuramcıları olarak sayarken, 0'dan başlayacağız:

	0,	1,	2,	...;	ω,	$\omega + 1$,	$\omega + 2$,	...
S	1,	3,	5,	...;	2,	4,	6,	...

Burada 0, 1, 2, 3, ...; ω, $\omega+1$, $\omega+2$, ...; $\omega \cdot 2$, $\omega \cdot 2+1$, ... numaraları, **ordinal sayılar** veya **ordinallerdir.** (Her ordinal, bu sırada bulunacak.) Ayrıca 0, 1, 2, 3, ..., ω numaraları, **kardinal** (*cardinal*) **sayılar** veya **kardinaldirler** (başka kardinaller olacak); ama $\omega + 1$, bir kardinal değildir.

Her kardinal, bir ordinal olacak, ama her ordinal, bir kardinal olmayacak.

Her ordinal, bir **küme** olacak; ama bazı kümeler, ordinal olmayacak.

Her **küme,** bir topluluk olacak; ve her kümenin her elemanı, bir küme olacak. O zaman a ile b kümeyse, ya a kümesi, b kümesinin elemanıdır, ya da elemanı değildir. İlk durumda b kümesi, a kümesini **içerir** (*contains*), yani a kümesi, b kümesi tarafından **içerilir,** ve

$$a \in b$$

ifadesini yazarız;[§] ikinci durumda b kümesi, a kümesini **içermez,** ve

$$a \notin b$$

yazarız. Genelde C bir topluluk ise, ya $a \in C$ ya da $a \notin C$ olur.

Bize göre **boş bir topluluk**—elemanları olmayan bir topluluk—vardır, ve bu topluluk, bir kümedir. Bu varsayım, **Boş Küme Aksiyomudur** (*Empty Set Axiom* [21]). Boş kümenin işareti,

$$\varnothing$$

olur. Ayrıca a ile b kümeyse, o zaman öyle bir küme vardır ki her elemanı, ya a kümesinin bir elemanı, ya da b kümesinin kendisidir. Bu yeni kümenin ifadesi,

$$a \cup \{b\}$$

olur. Bu topluluğun küme olduğu, **Bitiştirme Aksiyomudur** (*Adjunction Axiom*).[¶] Burada a boş ise, yeni $a \cup \{b\}$ kümesi,

$$\{b\}$$

olarak yazılır. O zaman aşağıdaki gibi kümelerimiz vardır:

$$\varnothing, \quad \{\varnothing\}, \quad \{\varnothing\} \cup \big\{\{\varnothing\}\big\}, \quad \Big(\{\varnothing\} \cup \big\{\{\varnothing\}\big\}\Big) \cup \Big\{\{\varnothing\} \cup \big\{\{\varnothing\}\big\}\Big\}.$$

Bu ifadelerin yerine

$$\varnothing, \quad \{\varnothing\}, \quad \big\{\varnothing, \{\varnothing\}\big\}, \qquad \Big\{\varnothing, \{\varnothing\}, \big\{\varnothing, \{\varnothing\}\big\}\Big\}$$

ifadelerini yazabiliriz. Aslında 0 sayısını $\varnothing$ olarak tanımlarız, yani

$$0 = \varnothing$$

[§] Buradaki $\in$ işareti, Yunan ε (epsilon) harfinden türer. Bu harf, ἐστί kelimesinin ilk harfidir, ve A ἐστί B cümlesi, "A, B'dir" (A *is* B) anlamına gelir. Epsilonun bu kullanışını, Peano [12] ortaya koymuştur.

[¶] Bu aksiyom, Tarski ve Givant [17, p. 223, QIII] kaynağında bulunur; İngilizce adı, Boolos [1, p. 100] kaynağında bulunur.

olur. Bu sayı, **ilk ordinaldir.** Her α ordinali için bir sonraki ordinal olacak, ve bu ordinal, $\alpha \cup \{\alpha\}$ olacak. Mesela 0'dan bir sonraki ordinal $\{0\}$ olacak; yani

$$1 = \{0\}$$

olacak. Ayrıca her α ordinal için

$$\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$$

olacak. Ama bildiğimiz gibi

$$1 + 1 = 2, \qquad 2 + 1 = 3, \qquad 3 + 1 = 4,$$

vesaire. O zaman

$$\begin{aligned} 2 &= 1 \cup \{1\} = \{0, 1\}, \\ 3 &= 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}, \\ 4 &= 3 \cup \{3\} = \{0, 1, 2, 3\}, \end{aligned}$$

vesaire. Böyle tanımlanmış sayılar, **von Neumann doğal sayıları** (*natural numbers* [19]) olur. Bu sayılar, bir topluluğu oluşturacak, ve bu topluluk, ω olacak. Yani ω, öyle bir topluluktur ki

1) $0 \in \omega$ olur,
2) $\alpha \in \omega$ ise $\alpha + 1 \in \omega$ olur, ve
3) ω topluluğunun başka elemanı yoktur.

Öyleyse ω topluluğunun tanımı, **rekürsif** veya **özyinelidir** (*recursive*).

1.2 Ordinaller Hesapları

Sonsuzluk Aksiyomuna‖ (*Axiom of Infinity* [21]) göre ω topluluğu, bir küme olacak. O zaman ω bir ordinal olacak, ve bu ordinalin her k elemanı için $\omega + k$ kümesi, bir ordinal olacak.

Aslında tüm α ile β ordinaller için

$$\alpha + \beta \text{ toplamını}, \qquad \alpha \cdot \beta \text{ çarpımını, ve} \qquad \alpha^{\beta} \text{ kuvvetini}$$

‖Veya **Sonsuz Küme Aksiyomu** [11].

tanımlayacağız. O zaman

$$\begin{gathered}
1+\omega=\omega<\omega+1, \\
2\cdot\omega=\omega<\omega\cdot 2, \\
(\omega+1)^{\omega}=\omega^{\omega}<\omega^{\omega+1}
\end{gathered}$$

olacak. Aslında:

- $1+\omega$ toplamı,

$$(0,0,1,2,3,\dots)$$

sırasının ordinalidir, ama $\omega+1$,

$$(0,1,2,3,\dots,0)$$

sırasının ordinalidir.

- $2\cdot\omega$ çarpımı,

$$(0,1,0,1,0,1,\dots)$$

sırasının ordinalidir, ama $\omega\cdot 2$,

$$(0,1,2,3,\dots,0,1,2,3,\dots)$$

sırasının ordinalidir; ayrıca

$$\begin{gathered}
2\cdot\omega=2+2+2+\cdots, \\
\omega\cdot 2=\omega+\omega=\omega+1+1+1+\cdots
\end{gathered}$$

olur.

- $(\omega+1)^{\omega}$ kuvveti,

$$((\omega+1)^2,(\omega+1)^3,(\omega+1)^4,\dots)$$

dizisinin **limitidir,** ve

$$\begin{aligned}
(\omega+1)^2 &= (\omega+1)\cdot(\omega+1) \\
&= (\omega+1)\cdot\omega+(\omega+1)\cdot 1 \\
&= (\omega+1+\omega+1+\omega+1+\cdots)+\omega+1 \\
&= (\omega+\omega+\omega+\cdots)+\omega+1 \\
&= \omega^2+\omega+1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\omega+1)^3 &= (\omega+1)^2\cdot(\omega+1)\\ &= (\omega^2+\omega+1)\cdot(\omega+1)\\ &= (\omega^2+\omega+1)\cdot\omega+\omega^2+\omega+1\\ &= (\omega^2+\omega+1+\omega^2+\omega+1+\omega^2+\cdots)+\omega^2+\omega+1\\ &= (\omega^2+\omega^2+\cdots)+\omega^2+\omega+1\\ &= \omega^3+\omega^2+\omega+1,\end{aligned}$$

ve genelde

$$(\omega+1)^n = \omega^n+\omega^{n-1}+\cdots+\omega+1$$

olur.

Ayrıca her pozitif α ordinali için öyle bir ℓ doğal sayısı, ve α_0, …, α_ℓ ordinalleri, ve a_0, …, a_ℓ pozitif doğal sayıları vardır ki

$$\alpha_0 > \cdots > \alpha_\ell, \qquad \alpha = \omega^{\alpha_0}\cdot a_0+\cdots+\omega^{\alpha_\ell}\cdot a_\ell$$

olur. Burada $\omega^{\alpha_0}\cdot a_0+\cdots+\omega^{\alpha_\ell}\cdot a_\ell$ ifadesi, α ordinalinin **Cantor normal biçimidir** (*Cantor normal form*). Her pozitif ordinalin tek bir Cantor normal biçimi vardır. Bundan hesaplama kuralları türeyebilir.

1.3 Kümeler ve Sınıflar

Her topluluk, bir küme değildir. Örneğin öyle bir R topluluğu vardır ki her elemanı bir küme, ama bu küme, kendisinin elemanı değildir. Yani

$$R = \{x\colon x\notin x\}$$

olur. Burada x değişkeni her zaman bir küme olacak. Şimdi a bir küme olsun. Eğer $a\in a$ ise, o zaman $a\notin R$, dolayısıyla $a\neq R$. Eğer $a\notin a$ ise, o zaman $a\in R$ olmalı, dolayısıyla $a\neq R$. Her durumda R topluluğu, a kümesi değildir. Yani R, bir küme değildir. Bu teoreme **Russell Paradoksu** denir.

Uygunluğumuz için her topluluğun her elemanı, bir küme olacak. Bazı topluluklar, **sınıf** olacak. Her küme, bir sınıftır, ancak bazı sınıflar, küme değildir. Mesela yukarıdaki gibi $\{x\colon x \notin x\}$ topluluğu, bir sınıftır, ama gösterdiğimiz gibi küme değildir. Tanıma göre her sınıf,

$$\{x\colon \varphi(x)\}$$

biçiminde yazılabilir. Burada $\varphi(x)$, kümeler kuramının mantığında bir **formüldür.** Eğer a bir kümeyse, o zaman $\varphi(a)$ ifadesi, bir **cümledir.** Her cümle, ya doğru ya yanlıştır. Bir $\{x\colon \varphi(x)\}$ sınıfının elemanları, öyle a kümeleridir ki $\varphi(a)$ cümlesi doğrudur. Bu sınıf, $\varphi(x)$ formülü tarafından **tanımlanır.**

Bir $\varphi(x)$ formülünün bir tek **serbest değişkeni** vardır, ve bu değişken, x olur. Ancak bir formülün birden fazla serbest değişkeni olabilir. Örneğin

$$\forall z\ (z \in x \Leftrightarrow z \in y)$$

ifadesi, bir formüldür, ve serbest değişkenleri, x ile y olur. Bu formülde z, **bağlantılı değişkendir.** Formül, kümelerin **eşitlik** bağıntısını tanımlar. Yani a ile b kümeleri birbirine eşittir, ancak ve ancak

$$\forall z\ (z \in a \Leftrightarrow z \in b)$$

olur, yani elemanları aynıdır. Küme olmayan bir sınıfın olduğunu kanıtlarken, bu kuralı kullandık. Yukarıdaki $\forall z\ (z \in x \Leftrightarrow z \in y)$ formülünün yerine

$$x = y$$

ifadesini yazarız. O halde bir $\{x\colon x = x\}$ sınıfı vardır, ve bu sınıf, tüm kümelerin sınıfıdır. Bu sınıf, **evrensel sınıftır,** (*universal class*) ve işareti,

$$\mathbf{V}$$

olacak. Ayrıca a bir kümeyse, o zaman bir $\{x\colon x \in a\}$ sınıfı vardır, ama bu sınıf, a kümenin kendisidir, yani

$$a = \{x\colon x \in a\}$$

olur. Öyleyse, dediğimiz gibi, her küme, bir sınıftır.

Sonsuzluk Aksiyomunu kullanmadan ω topluluğunun sınıf olduğu açık (apaçık, aşikâr) değildir, ama sınıf olacak.

Fakat bazı (kümelerden oluşturulmuş) topluluklar, sınıf değildir. Bu sonuç, **Gödel'in Eksiklik Teoremi** (*Gödel's Incompleteness Theorem* [7]) veya **Tarski'nin Doğruluğun Tanımlanamaması Teoremi** (*Tarski's Theorem on the Indefinability of Truth* [16]) gibidir. Bu teoremlerin asıl biçimleri, $\mathbb{N}$ topluluğu hakkındadır, ve bu biçimde teoremlerini kanıtlamak zordur. Fakat bu teoremler, $\mathbf{V}$ hakkında yazılabilir; ve bu biçimde onları kanıtlamak daha kolay olur.

Tüm ordinallerin topluluğu, bir sınıf olacak, ve bu sınıfın işareti

$$\mathbf{ON}$$

olacak. Aslında bu sınıf, bir a kümesiyse, o zaman $a \in \mathbf{ON}$ olurdu, yani $a \in a$ olurdu; ama bu içerme imkânsızdır. Sonuç olarak **ON**, bir küme değildir. Bu teorem, **Burali-Forti Paradoksu** [2] olarak bilinir.

1.4 Kardinaller

ON sınıfının bir sıralaması vardır, ve bu sıralama, *içerilmedir,* yani $\in$ ile gösterilen sıralamadır. **Seçim Aksiyomuna** (*Axiom of Choice* [21]) göre, her a kümesinden bir β ordinaline giden bir **eşleme** (yani bir birebir örten gönderme) vardır. O halde

$$a \approx \beta$$

ifadesini yazalım, ve a ile β kümelerine **eşlenik** densin [11, s. 82]. Eğer a verilirse, ve $a \approx \beta$ koşulunu sağlayan β ordinallerinin en küçüğü κ ise, o zaman κ, a kümesinin **kardinalidir.** Tüm kardinallerden oluşturulmuş topluluk, bir sınıf olacak, ve bu sınıfın işareti

$$\mathbf{CN}$$

olacak. En küçük *sonsuz* kardinal, ω olur. **ON** sınıfından **CN** sınıfına giden bir

$$\alpha \mapsto \aleph_\alpha$$

göndermesi vardır. Burada

$$\aleph_0 = \omega$$

olur, ve

$$\alpha < \beta \iff \aleph_\alpha < \aleph_\beta$$

olur, ve her sonsuz kardinal, bir α ordinali için, $\aleph_\alpha$ biçimindedir. İki kardinalin *kardinal* toplamı ve *kardinal* çarpımı vardır, ve

$$\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \aleph_{\max(\alpha,\beta)}$$

(daha kesinlikle $\aleph_\alpha +_{\mathrm{card}} \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot_{\mathrm{card}} \aleph_\beta = \aleph_{\max(\alpha,\beta)}$) olur. Ayrıca $1 \leqslant k < \omega$ ise

$$k + \aleph_\alpha = k \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$$

olur.

Genelde siyah harfler, sınıfları gösterecek. Şimdi $\boldsymbol{A}$ ile $\boldsymbol{B}$, sınıf olsun. Eğer $\boldsymbol{A}$ sınıfının her elemanı, $\boldsymbol{B}$ sınıfının elemanıysa, o zaman A sınıfına **$\boldsymbol{B}$ sınıfının altsınıfı** denir, ve

$$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$$

ifadesi yazılır. Bu durumda $\boldsymbol{B}$ sınıfı, $\boldsymbol{A}$ sınıfını **kapsar. Ayırma Aksiyomuna** (*Separation Axiom* [21]) göre, her *kümenin* her alt sınıfı, bir kümedir. Şimdi, eğer $\varphi(x)$ bir formül ise, ve a bir kümeyse, o zaman öyle bir sınıf vardır ki her elemanı, hem a kümesinin elemanıdır, hem de $\varphi(x)$ formülünü sağlar. Bu sınıf,

$$\{x \in a \colon \varphi(x)\}$$

olarak yazılır. Ayırma Aksiyomuna göre, bu sınıf, bir kümedir. O zaman bu küme, a kümesinin bir **altkümesidir.**

Bir a kümesinin tüm altkümeleri, bir sınıf oluşturur. Bu sınıf, a kümesinin **kuvvet sınıfıdır** (*power class*), ve

$$\mathscr{P}(a)$$

olarak yazılır. **Kuvvet Kümesi Aksiyomuna** (*Power Set Axiom* [21]) göre, bu sınıf, her zaman bir kümedir. **Cantor'un Teoremine**** göre, her kümenin kuvvet kümesi, kümeden kesinlikle daha büyüktür, yani kardinali daha büyüktür. Bu teorem,

$$a \prec \mathscr{P}(a)$$

**Levy'e [9] göre Cantor, bu teoremi 1892 yılında yayımladı.

ifadesiyle söylenir.

Eğer a ile b, iki kümeyse, o zaman a kümesinden b kümesine giden göndermeler topluluğu, bir kümedir, ve bu küme

$$^{a}b$$

olarak yazılabilir. O zaman

$$^{a}2 \approx \mathscr{P}(a)$$

olur. Eğer κ ile λ, iki kardinal ise, tanıma göre

$$\kappa^{\lambda}$$

kuvveti, $^{\lambda}\kappa$ kümesinin kardinalidir. Eğer $2 \leqslant \kappa \leqslant \lambda$ ise, o zaman

$$2^{\lambda} \leqslant \kappa^{\lambda} \leqslant (2^{\kappa})^{\lambda} = 2^{\kappa\cdot\lambda} = 2^{\lambda}$$

olur; özel olarak

$$\kappa^{\lambda} = 2^{\lambda}$$

olur.

Şimdi $\mathbb{Z}$, **tamsayılar** topluluğu olsun. O zaman

$$\mathbb{Z} \approx \omega$$

olur, çünkü tamsayılar, sonsuz bir

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, \dots$$

listede yazılabilir. Ayrıca her tamsayı, ω kümesinin elemanları gibi, bir küme olarak düşünülebilir. Bunu göstermek için, eğer a ile b, herhangi iki kümeyse, o zaman

$$(a, b)$$

sıralı ikilisi (*ordered pair*),

$$\bigl\{\{a\}, \{a, b\}\bigr\}$$

kümesi olarak tanımlanır.[††] O zaman $n \in \omega$ ve $n > 0$ ise, o zaman $-n$ tamsayısı, $(0, n)$ olarak tanımlanabilir.

[††]Bu tanım, Kuratowski'nin [8]. Daha önce, Wiener [20] daha karmaşık bir tanım verdi.

Başka yöntemle $\mathbb{Z}$ topluluğunun her r elemanını, $\{(x,y) \in \omega \times \omega \colon x = y + r\}$ olarak tanımlanabiliriz. Bu tanıma göre $\mathbb{Z}$ topluluğunun her elemanı, bir **denklik sınıfıdır.** Aslında $\omega \times \omega$ çarpımında öyle bir E **denklik bağıntısı** vardır ki

$$(a,b)\ E\ (c,d) \iff a + d = b + c$$

olur, ve $\mathbb{Z}$ topluluğu, $\omega \times \omega / E$ bölümü olarak tanımlanabilir.

Öyleyse $\mathbb{Z}$ topluluğu, bir sınıftır. O zaman **Yerleştirme Aksiyomuna** (*Replacement Axiom*[‡‡]) göre $\mathbb{Z}$, bir küme olmalı, çünkü $\mathbb{Z} \approx \omega$.

Benzer şekilde $\mathbb{Q}$ **kesirli sayılar** topluluğu, öyle bir $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/F$ bölümüdür ki

$$(a,b)\ F\ (c,d) \iff ad = bc$$

olur. Aslında

$$\mathbb{Q} \approx \omega$$

olur, çünkü pozitif tamsayılar, 1.1 numaralı figürdeki ağaç olarak, ve ondan sonra bir liste olarak, yazılabilir.

Şimdi $\mathbb{R}$, **gerçel sayılar** topluluğu olsun. Her kesirli sayı, gerçel sayı olarak düşünülebilir. Ayrıca her iki farklı gerçel sayının arasında bir kesirli sayı vardır. O zaman $\mathbb{R}$ topluluğundan $\mathscr{P}(\mathbb{Q})$ kuvvet kümesine giden öyle bir f göndermesi vardır ki her a gerçel sayısı için

$$f(a) = \{x \in \mathbb{Q} \colon x < a\}$$

olur, ve bu gönderme, birebirdir. Öyleyse a sayısı, $f(a)$ kümesi olarak düşünebilir, ve $\mathbb{R}$, bir küme olur. Ayrıca

$$\mathbb{R} \preccurlyeq \mathscr{P}(\mathbb{Q}) \approx \mathscr{P}(\omega)$$

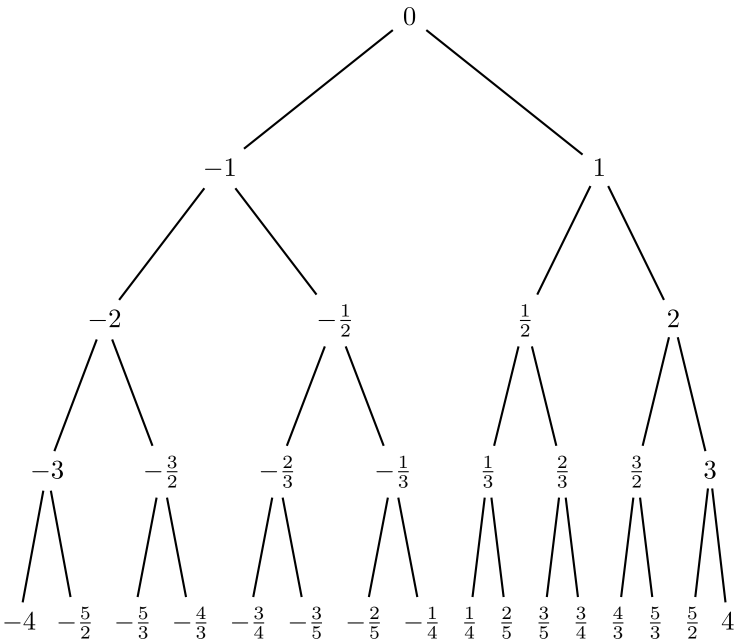
olur. Aslında

$$\mathscr{P}(\omega) \preccurlyeq \mathbb{R}$$

de olur. Örneğin

$$\mathscr{P}(\omega) \approx {}^{\omega}2$$

[‡‡]Skolem [15], 1922 yılında bu aksiyomu tavsiye etti; aynı yılda Fraenkel, benzer bir aksiyomu tavsiye etmiş. Ayrıca Cantor'a [3, p. 114] bakınız.



Şekil 1.1 Stern–Brocot Ağacı

çünkü ${}^{\omega}2$ kümesinden $\mathscr{P}(\omega)$ kümesine giden bir

$$f \mapsto \{x \colon x \in \omega \wedge f(x) = 1\}$$

eşlemesi vardır, ve ayrıca ${}^{\omega}2$ kümesinden $\mathbb{R}$ kümesine giden bir birebir

$$f \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 \cdot f(k)}{3^{k+1}}$$

göndermesi vardır. Öyleyse

$$\mathbb{R} \preccurlyeq \mathscr{P}(\omega) \preccurlyeq \mathbb{R}$$

olur. Sonuç olarak, **Schröder–Bernstein Teoremine** göre

$$\mathbb{R} \approx \mathscr{P}(\omega)$$

olur, çünkü o teoreme göre tüm a ile b kümeleri için

$$a \preccurlyeq b \preccurlyeq a \implies a \approx b$$

olur.

Şimdi Cantor'un Teoreminden

$$\omega \prec \mathbb{R}$$

olur. Özel olarak öyle bir α olacak ki $\alpha > 0$ ve

$$\mathbb{R} \approx \aleph_\alpha$$

olur. Ama α ordinalinin 1 olup olmadığını bilmiyoruz. **Kontinü Hipotezi** (*Continuum Hypothesis*), $\mathbb{R} \approx \aleph_1$ denkliğinin doğru olmasıdır.

Seçim Aksiyomu hariç kümeler kuramının kullanacağımız aksiyomları, **Zermelo–Fraenkel Aksiyomlarıdır.** Aslında Zermelo'nun verdiği aksiyomlar [21], aşağıdadır.

I. *Uzama* (23 numaralı sayfada).
II. **Temel Kümeler** (*Elementary Sets*): $\varnothing$, $\{a\}$, ve $\{a, b\}$ toplulukları, kümedir.
III. Ayırma (10 numaralı sayfada).
IV. Kuvvet Kümesi (10 numaralı sayfada).
V. **Bileşim** (*Union*): her a kümesi için, $\bigcup a$ bileşimi de bir kümedir (27 numaralı sayfaya bakınız).
VI. Seçim (9 numaralı sayfada).
VII. Sonsuzluk (5 numaralı sayfada).

(4 numaralı sayfadaki Bitiştirme Aksiyomumuz, Zermelo'nun II. ve V. aksiyomları tarafından gerektirilir. Ters olarak Bitiştirme ve Boş Küme Aksiyomlarımız, Zermelo'nun II. aksiyomunu gerektirir.) Sonra iki aksiyom daha verildi:

VIII. Yerleştirme (12 numaralı sayfada).
IX. **Temellendirme** (*Foundation* [15]): Her boş olmayan a kümesinin öyle bir b elemanı vardır ki $a \cap b = \varnothing$ olur (26 numaralı sayfaya bakınız).

I–V ile VII–IX numaralı aksiyomlar, Zermelo–Fraenkel Aksiyomlarıdır.

Seçim Aksiyomu, Zermelo–Fraenkel Aksiyomları, Zermelo–Fraenkel Aksiyomlarıyla Seçim Aksiyomu, ve Kontinü Hipotezi sırasıyla

$$\mathrm{AC}, \qquad \mathrm{ZF}, \qquad \mathrm{ZFC}, \qquad \mathrm{CH}$$

olarak yazılır. Özel olarak

$$\mathrm{ZFC} = \mathrm{ZF} + \mathrm{AC}$$

olur. Gödel'in kanıtladığı teoreme göre ZF **tutarlıysa** (yani ondan bir çelişki çıkmazsa), o zaman ZFC aksiyomları da tutarlıdır, ve ayrıca ZFC aksiyomlarıyla CH tutarlıdır. Cohen'in kanıtladığı teoreme göre ZF tutarlıysa, $\mathrm{ZF}+\neg\mathrm{AC}$ aksiyomları da tutarlıdır, ve ayrıca $\mathrm{ZFC}+\neg\mathrm{CH}$ tutarlıdır. (Gödel'in ve Cohen'in teoremlerini kanıtlamayacağız.)

2 Mantık

2.1 Formüller

Formüllerde kullanacağımız simgelerin birkaç tane türü vardır:

1) **değişkenler** (*variables*): z, y, x, $\dots$; x_0, x_1, x_2, $\dots$;
2) **sabitler** (*constants*): a, b, c, $\dots$; a_0, a_1, a_2, $\dots$;*
3) **ikili bağlayıcılar** (*binary connectives*): $\land$, $\lor$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$;†
4) bir **birli bağlayıcı** (*singulary connective*): $\neg$;
5) **niceleyiciler** (*quantifiers*): $\exists$, $\forall$;
6) **ayraçlar** (*parentheses, brackets*): (,);
7) bir **yüklem** (*predicate*): $\in$ (epsilon).‡

Bir **terim** (*term*), ya değişken ya da sabittir. Eğer t ile u, iki terim ise, o zaman

$$t \in u$$

ifadesi, bir **bölünemeyen formüldür** (*atomic formula*). Genelde **formüllerin** tanımı, rekürsiftir:

1. Bölünemeyen bir formül, bir formüldür.
2. Eğer φ, bir formül ise, o zaman

$$\neg\varphi$$

   ifadesi de bir formüldür.

---

*Bilinen değerler için Latin alfabesinin başlangıcından harflerin kullanılışı, ve bilinmeyen değerler için Latin alfabesinin sonundan harflerin kullanılışı, Descartes'te [5] görünür.

†Bazen $\Rightarrow$ ile $\Leftrightarrow$ oklarının yerine $\to$ ile $\leftrightarrow$ işaretleri yazılır. Bunları kalemle yazmak daha kolaydır. Ama bu notlarda, $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ ifadesi, $\boldsymbol{F}$ göndermesinin $\boldsymbol{A}$ sınıfından $\boldsymbol{B}$ sınıfına gittiğinin anlamına gelecek. Aşağıdaki 37 numaralı sayfaya bakınız.

‡Yukarıdaki 4 numaralı sayfadaki dipnota bakınız.

3. Eğer φ ile ψ, iki formül ise, o zaman

$$(\varphi \wedge \psi), \qquad (\varphi \vee \psi), \qquad (\varphi \Rightarrow \psi), \qquad (\varphi \Leftrightarrow \psi)$$

ifadeleri de, formüldür.
4. Eğer φ bir formül ise, ve x bir değişken ise, o zaman

$$\exists x\ \varphi, \qquad \forall x\ \varphi$$

ifadeleri de formüldür.

Formüllerin her türünün adı vardır:

1. $\neg\varphi$ formülü, bir **değillemedir** (*negation*).
2. $(\varphi \wedge \psi)$ formülü, bir **birleşme** veya **tümel evetlemedir** (*conjunction*).
3. $(\varphi \vee \psi)$ formülü, bir **ayrılma** veya **tikel evetlemedir** (*disjunction*).
4. $(\varphi \Rightarrow \psi)$ formülü, bir **karıştırmadır** (*implication*).
5. $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ formülü, bir **denkliktir** (*equivalence*).
6. $\exists x\ \varphi$ formülü, bir **örneklemedir** (*instantiation*).
7. $\forall x\ \varphi$ formülü, bir **genelleştirmedir** (*generalization*).

Bu türlerin adları, çok önemli değildir. Fakat aşağıdaki teorem çok önemlidir.

Teorem 1. *Her formülün tek bir şekilde tek bir türü vardır.*

Mesela aynı formül, hem karıştırma, hem örnekleme olamaz: $\exists x\ (\varphi \Rightarrow \psi)$ formülü, karıştırma değil, örneklemedir; $(\exists x\ \varphi \Rightarrow \psi)$ formülü, örnekleme değil, karıştırmadır.

Ayrıca $(\varphi \wedge (\psi \wedge \theta))$ formülü, tek bakımdan birleşmedir. Aslında sadece φ ile $(\psi \wedge \theta)$ formüllerinin birleşmesidir. Eğer A harfi, $\varphi \wedge (\psi$ ifadesini gösterirse ve B harfi, $\theta)$ ifadesini gösterirse, o zaman $(A \wedge B)$ ifadesi, $(\varphi \wedge (\psi \wedge \theta))$ formülünü gösterir; ama tanıma göre bu formül, A ile B ifadelerinin birleşmesi değildir, çünkü A ile B ifadeleri (yani A ile B tarafından gösterilen ifadeler), formül değildir.

Teoremi kanıtlamayacağız. Fakat teoremi kullanarak aşağıdaki rekürsif tanımı yapabiliriz. Bir değişkenin bir formülde birkaç tane **geçişi** (*occurrence*) olabilir. Mesela $\forall x\ (x \in y \Leftrightarrow x \in z)$ formülünde x değişkeninin üç tane geçişi vardır (ve y ile z değişkenlerinin birer geçişi vardır).

1. Bölünemeyen bir formülde bir değişkenin her geçişi, **serbest** bir geçiştir.
2. Bir değişkenin φ formülündeki her serbest geçişi, $\neg\varphi$, $(\varphi * \psi)$, ve $(\psi * \varphi)$ formüllerinde de serbesttir. (Burada $*$ işareti, herhangi bir ikili bağlayıcıdır.)
3. Eğer x ile y, iki *farklı* değişken ise, o zaman x değişkeninin φ formülünde her serbest geçişi, $\exists y\ \varphi$ ile $\forall y\ \varphi$ formüllerinde de serbesttir.
4. $\exists x\ \varphi$ ile $\forall x\ \varphi$ formüllerinde x değişkeninin hiç serbest geçişi yoktur.

Bir formülde bir değişkenin serbest geçişi varsa, bu değişken, formülün bir **serbest değişkenidir.** Serbest değişkeni olmayan bir formül, bir **cümledir.** Cümleler için σ, τ, ve ρ gibi Yunan harflerini kullanacağız.

2.2 Doğruluk ve Yanlışlık

Bir φ formülünün tek serbest değişkeni x ise, o zaman formül

$$\varphi(x)$$

olarak yazılabilir. O halde a bir sabit ise, ve x değişkeninin φ formülündeki her serbest geçişinin yerine a konulursa, çıkan cümle

$$\varphi(a)$$

olarak yazılabilir. Şimdi **doğruluğu** (*truth*) ve **yanlışlığı** (*falsehood*) tanımlayabiliriz:

1. Eğer b kümesi, a kümesini içerirse, o zaman $a \in b$ cümlesi doğrudur; içermezse, yanlıştır.
2. Eğer σ cümlesi doğruysa, o zaman $\neg\sigma$ değillemesi yanlıştır; σ yanlış ise, $\neg\sigma$ doğrudur.
3. Eğer hem σ hem τ doğruysa, o zaman $(\sigma \wedge \tau)$ birleşmesi de doğrudur; σ ile τ cümlelerinin biri yanlış ise, birleşmesi de yanlıştır.
4. Eğer bir a kümesi için $\varphi(a)$ cümlesi doğruysa, o zaman $\exists x\ \varphi(x)$ örneklemesi de doğrudur; hiç öyle bir a yoksa, örnekleme yanlıştır.
5. $(\sigma \vee \tau)$ cümlesi, $\neg(\neg\sigma \wedge \neg\tau)$ cümlesinin anlamına gelir, yani bu iki cümle aynı zamanda ya doğrudur, ya da yanlıştır.
6. $(\sigma \Rightarrow \tau)$ cümlesi, $(\neg\sigma \vee \tau)$ cümlesinin anlamına gelir.

7. $(\sigma \Leftrightarrow \tau)$ cümlesi, $\big((\sigma \Rightarrow \tau) \wedge (\tau \Rightarrow \sigma)\big)$ cümlesinin anlamına gelir.
8. $\forall x\ \varphi(x)$ cümlesi, $\neg\exists x\ \neg\varphi(x)$ cümlesinin anlamına gelir.

Özel olarak formüllerde $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, ve $\forall$ simgeleri gerekmez; sadece kolaylık için kullanacağız. Ama $(\sigma \Rightarrow \tau)$ cümlesi doğrudur ancak ve ancak τ doğru veya σ yanlıştır; ve $(\sigma \Leftrightarrow \tau)$ cümlesi doğrudur ancak ve ancak hem σ hem τ ya doğru ya yanlıştır. Ayrıca $\forall x\ \varphi(x)$ doğrudur ancak ve ancak her a için $\varphi(a)$ doğrudur.

Birkaç tane daha kısaltma kullanırız:

1. $\neg\ t \in u$ formülünün yerine $t \notin u$ ifadesini yazarız;
2. Bir $(\varphi * \psi)$ formülünün en dıştaki ayraçlarını yazmayız.
3. $\Rightarrow$ ile $\Leftrightarrow$ bağlayıcılarına göre $\wedge$ ile $\vee$ bağlayıcılarına önceliği veririz: Mesela $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \chi$ ifadesi, $(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \chi$ formülünün anlamına gelir.
4. $\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi$ ifadesi, $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)$ formülünün anlamına gelir.

Bir φ formülünün serbest değişkenleri x ile y ise, o zaman formül

$$\varphi(x, y)$$

olarak yazılabilir. O halde a ile b, iki sabit ise, ve x değişkeninin φ formülündeki her serbest geçişinin yerine a konulursa, ve benzer şekilde y değişkeninin her serbest geçişinin yerine b konulursa, çıkan cümle

$$\varphi(a, b)$$

olarak yazılabilir.

Genelde φ formülünün serbest değişkenleri, bir $\vec{x}$ listesini oluşturursa, o zaman formül

$$\varphi(\vec{x})$$

olarak yazılabilir; ayrıca

$$\forall\vec{x}\ \varphi(\vec{x}), \qquad\qquad \exists\vec{x}\ \varphi(\vec{x})$$

cümleleri yazılabilir. Eğer $\vec{a}$, uzunluğun $\vec{x}$ listesinin uzunluğu olan bir sabit listesiyse, o zaman

$$\varphi(\vec{a})$$

cümlesi de çıkar. Eğer $\varphi(\vec{x})$ ile $\psi(\vec{x})$, iki formül ise, ve sadece doğruluğun tanımını kullanarak

$$\forall\vec{x}\ \big(\varphi(\vec{x}) \Leftrightarrow \psi(\vec{x})\big)$$

cümlesinin doğruluğu kanıtlanabilirse, o zaman φ ile ψ birbirine **(mantığa göre) denktir** (*logically equivalent*). Öyleyse φ ile ψ birbirine denktir, ancak ve ancak her $\vec{a}$ sabit listesi için, doğruluğun tanımına göre

$$\varphi(\vec{a}) \Leftrightarrow \psi(\vec{a})$$

cümlesi doğrudur. Örneğin, yukarıdaki tanımlara göre

$$\begin{gathered}\varphi \lor \psi \text{ denktir } \neg(\neg\varphi \land \neg\psi),\\ \varphi \Rightarrow \psi \text{ denktir } \neg\varphi \lor \psi,\\ \varphi \Leftrightarrow \psi \text{ denktir } (\varphi \Rightarrow \psi) \land (\psi \Rightarrow \varphi),\\ \forall x\ \varphi \text{ denktir } \neg\exists x\ \neg\varphi.\end{gathered}$$

Teorem 2. 1. *Her formül, kendisine denktir.*
2. *Eğer φ ile ψ denk ise, o zaman ψ ile φ denktir.*
3. *Eğer φ ile ψ denk ise, ve ψ ile χ denk ise, o zaman φ ile χ denktir.*

Yani

$$\begin{gathered}\varphi \textit{ denktir } \varphi,\\ \varphi \textit{ denktir } \psi \implies \psi \textit{ denktir } \varphi,\\ \varphi \textit{ denktir } \psi \ \&\ \psi \textit{ denktir } \chi \implies \varphi \textit{ denktir } \chi.\end{gathered}$$

Kanıt. 1. $\sigma \Leftrightarrow \sigma$ her zaman doğrudur.

2. $\sigma \Leftrightarrow \tau$ doğru olsun. O zaman hem σ hem τ ya doğru ya yanlıştır. Öyleyse hem τ hem σ ya doğru ya yanlıştır; yani $\tau \Leftrightarrow \sigma$ doğrudur.

3. $\sigma \Leftrightarrow \tau$ ve $\tau \Leftrightarrow \rho$ doğru olsun. Eğer σ doğruysa, o zaman τ doğru olmalı, ve sonuç olarak ρ doğru olmalı, dolayısıyla $\sigma \Leftrightarrow \rho$ doğrudur. Benzer şekilde σ yanlış ise $\sigma \Leftrightarrow \rho$ tekrar doğrudur. □

Teorem 3.

1. *$\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi$ ile $\varphi \land \psi \Rightarrow \chi$ denktir.*

2. *Eğer x değişkeni, φ formülünde serbest değilse, o zaman $\forall x\ (\varphi \Rightarrow \psi)$ ile $\varphi \Rightarrow \forall x\ \psi$ denktir.*

Kanıt. 1. $\sigma \Rightarrow \tau \Rightarrow \rho$ doğru olsun. Eğer $\sigma \wedge \tau$ cümlesi de doğruysa, o zaman hem σ hem τ doğrudur, ve sonuç olarak $\tau \Rightarrow \rho$ doğrudur, ve ρ doğrudur. Yani $\sigma \wedge \tau \Rightarrow \rho$ doğrudur.

Tersi için $\sigma \wedge \tau \Rightarrow \rho$ doğru olsun. O zaman $\sigma \wedge \tau$ yanlış veya ρ doğrudur. Yani σ yanlış, veya τ yanlış, veya ρ doğrudur. Eğer σ doğruysa, o zaman τ yanlış, veya ρ doğrudur, yani $\tau \Rightarrow \rho$ doğrudur. Sonuç olarak $\sigma \Rightarrow \tau \Rightarrow \rho$ doğrudur.

2. $\forall x\ (\sigma \Rightarrow \varphi(x))$ doğru olsun. O zaman her a için $\sigma \Rightarrow \varphi(a)$ doğrudur. Sonuç olarak σ doğruysa, o zaman her a için $\varphi(a)$ doğrudur. Yani $\sigma \Rightarrow \forall x\ \varphi(x)$ doğrudur.

Benzer şekilde $\sigma \Rightarrow \forall x\ \varphi(x)$ doğruysa $\forall x\ (\sigma \Rightarrow \varphi(x))$ doğrudur. □

2.3 Eşitlik

Yukarıdaki 8 numaralı sayfada dediğimiz gibi $t = u$ ifadesi, $\forall x\ (x \in t \Leftrightarrow x \in u)$ formülünün kısaltması olarak kullanılabilir. Burada x, herhangi bir değişken olabilir, ama t ile u terimlerinden farklı olmalıdır. Bu tanıma göre

$$t = u \text{ denktir } \forall x\ (x \in t \Leftrightarrow x \in u).$$

O zaman

$$\forall x\ \forall y\ (x = y \Leftrightarrow \forall z\ (z \in x \Leftrightarrow z \in y)) \tag{$*$}$$

cümlesi doğrudur. Yani tüm a ile b kümeleri için

$$a = b \Leftrightarrow \forall x\ (x \in a \Leftrightarrow x \in b)$$

cümlesi doğrudur. Bu cümle, $\Leftrightarrow$ simgesinin tanımına göre, iki cümlenin birleşmesidir, ve bu cümleler,

$$a = b \Rightarrow \forall x\ (x \in a \Leftrightarrow x \in b), \qquad \forall x\ (x \in a \Leftrightarrow x \in b) \Rightarrow a = b$$

olur. O zaman tüm a ile b kümeleri için, hem

$$\forall x\ (x \in a \Leftrightarrow x \in b) \Rightarrow a = b$$

doğrudur, hem de, 3 numaralı teoreme göre, her c kümesi için,

$$a = b \wedge c \in a \Rightarrow c \in b$$

doğrudur.

Bizim için, $(*)$ cümlesinin doğruluğu, bir tanımdır. Yani, simgesi $\in$ olan **içerilme** bağıntısı, temel bir bağıntıdır, ama **eşitlik** bağıntısı, yukarıdaki $(*)$ cümlesini sağlayan bir $=$ bağıntısıdır.

Teorem 4. *Tüm a, b, ve c kümeleri için*

$$a = a, \qquad a = b \Rightarrow b = a, \qquad a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$$

cümleleri doğrudur.

Bu teoreme göre eşitlik bağıntısı, **dönüşlü** (*reflexive*), **simetrik** (*symmetric*), ve **geçişli** (*transitive*) bir bağıntıdır, yani bir **denklik bağıntısıdır** (*equivalence relation*).

Alıştırma 1. Teoremi kanıtlayınız.

Teoremin dolayısıyla $a = b \wedge b = c$ cümlesinin kısaltması olarak $a = b = c$ ifadesi yazılır; yani

$$a = b = c \text{ denktir } a = b \wedge b = c.$$

İlk resmi aksiyomumuz şu:

AKSİYOM 1 (Eşitlik)**.** *Tüm a, b, ve c kümeleri için*

$$a = b \wedge a \in c \Rightarrow b \in c$$

cümlesi doğrudur.

Bu aksiyomun başka biçimleri vardır, mesela:

1. Tüm a, b, ve c kümeleri için $a = b \Rightarrow a \in c \Rightarrow b \in c$ olur.
2. Tüm a ile b kümeleri için $\forall x\ (a = b \Rightarrow a \in x \Rightarrow b \in x)$ olur.
3. Tüm a ile b kümeleri için $\forall x\ (a = b \wedge a \in x \Rightarrow b \in x)$ olur.
4. Tüm a ile b kümeleri için $a = b \Rightarrow \forall x\ (a \in x \Rightarrow b \in x)$ olur.

5. $\forall x\, \forall y\, (x = y \Rightarrow \forall z\, (x \in z \Rightarrow y \in z))$ olur.
6. $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x = y \Rightarrow x \in z \Rightarrow y \in z)$ olur.
7. $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x = y \wedge x \in z \Rightarrow y \in z)$ olur.

Alıştırma 2. $a = b \wedge \forall x\, (a \in x \Rightarrow b \in x)$ cümlesi, Eşitlik Aksiyomundan kanıtlanabilir mi?

Teorem 5. *Her $\varphi(x)$ tek serbest değişkenli formülü için*

$$a = b \wedge \varphi(a) \Rightarrow \varphi(b) \tag{†}$$

cümlesi doğrudur.

Kanıt. Formüllerin rekürsif tanımı nedeni ile, *tümevarım* kullanabiliriz.

1. İlk olarak φ bölünemesin. Yani $\varphi(x)$, ya $c \in x$ veya $x \in c$ biçiminde olsun. O zaman (†) cümlesi, ya eşitliğin tanımından, ya da Eşitlik Aksiyomundan, doğrudur.

2. Eğer φ, ya ψ ya da χ ise, (†) doğru olsun. Şimdi $a = b \wedge (\psi(a) \wedge \chi(a))$ doğru olsun. O zaman hem $a = b \wedge \psi(a)$ ve $a = b \wedge \chi(a)$ doğru olmalı. Sonuç olarak varsayımımızdan hem $\psi(b)$ hem $\chi(b)$ doğru olmalı, yani $\psi(b) \wedge \chi(b)$ doğru olmalı. Öyleyse φ, $\psi \wedge \chi$ ise (†) doğrudur.

3. Son olarak, tüm c için $\varphi(x)$, $\psi(x, c)$ ise, (†) doğru olsun. Şimdi $a = b \wedge \exists y\ \varphi(a, y)$ doğru olsun. O zaman bir c için $a = b \wedge \varphi(a, c)$ doğru olmalı, dolayısıyla $\varphi(b, c)$ doğru olmalı. Sonuç olarak $\exists y\ \varphi(b, y)$ doğrudur. Öyleyse $\varphi(x)$, $\exists y\ \varphi(x, y)$ ise (†) doğrudur. □

Kitapların çoğunda hem $\in$ hem $=$, temel bağıntıdır, ve yukarıdaki 21 numaralı sayfadaki $(*)$ cümlesi, tanım değil, **Uzama Aksiyomudur**[§] (*Axiom of Extensionality* [21]). Bu kitaplarda her $\varphi(x)$ tek serbest değişkenli formülü için (†) cümlesi, bir **mantıksal aksiyomdır.**

[§] Veya **Küme Eşitliği Aksiyomu** [11].

2.4 Sınıflar

Bir $\varphi(x)$ formülü ve bir a kümesi için $\varphi(a)$ cümlesi doğruysa a kümesi, $\varphi(x)$ formülünü **sağlar** (*satisfies*). O zaman φ formülünü sağlayan kümeler topluluğu vardır. Bu topluluk

$$\{x\colon \varphi(x)\}$$

olarak yazılır, ve ona φ **tarafından tanımlanmış sınıf** (*class defined by* φ) denir.

Yukarıdaki 16 numaralı sayfadaki tanıma göre bir değişken veya sabit, bir *terimdir.* Daha kesinlikle bir **küme terimidir** (*set term*). Şimdi, eğer x değişkeni, φ formülünün serbest bir değişkeniyse, φ formülünü

$$\varphi(\dots x \dots)$$

olarak yazarız. O zaman

$$\{x\colon \varphi(\dots x \dots)\}$$

ifadesi, bir **sınıf terimi** (*class term*) olacak. Sınıf terimlerini formüllerde kullanabiliriz, ama şimdilik, sadece $\in$ işaretinin sağında. Bir x değişkeninin bir $\varphi(\dots y \dots)$ formülündeki serbest geçişi, bir

$$t \in \{y\colon \varphi(\dots y \dots)\}$$

formülünde (hâlâ) serbesttir. Eğer x değişkeninin $\varphi(\dots x \dots)$ formülünündeki her serbest geçişinin yerine a sabitini koyarsak $\varphi(\dots a \dots)$ formülü çıkar. Şimdi tanıma göre

$$a \in \{x\colon \varphi(\dots x \dots)\} \text{ denktir } \varphi(\dots a \dots).$$

Bir sabit veya bir $\{x\colon \varphi(x)\}$ sınıf terimi, **kapalı** (*closed*) bir terimdir. Kapalı bir terim, bir kümenin veya bir sınıfın adıdır. $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ gibi büyük siyah harfleri kapalı sınıf terimleri olarak kullanacağız. O zaman 21 numaralı sayfadaki tanıma göre

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \text{ denktir } \forall x\ (x \in \boldsymbol{A} \Leftrightarrow x \in \boldsymbol{B}),$$
$$a = \boldsymbol{B} \text{ denktir } a = \forall x\ (x \in a \Leftrightarrow x \in \boldsymbol{B}).$$

Sonuç olarak

$$a = \{x \colon x \in a\}$$

olur. Yani her küme, bir sınıfa eşittır. Ama tersi yanlıştır; bildiğimiz gibi bazı sınıflar hiçbir kümeye eşit değildir:

Teorem 6 (Russell Paradoksu)**.** *$\{x \colon x \notin x\}$ sınıfı, hiçbir kümeye eşit değildir.*

Kanıt. Bu teoremi zaten 7 numaralı sayfada kanıtladık. Şimdi bir kanıt daha vereceğiz. $x \notin x$ formülü tarafından tanımlanmış sınıf, $\boldsymbol{A}$ olsun. O zaman her b kümesi için

$$b \in \boldsymbol{A} \Leftrightarrow b \notin b$$

doğrudur. O zaman $\forall x\ (x \in \boldsymbol{A} \Leftrightarrow x \in b)$ cümlesi yanlıştır. Eşitliğin tanımına göre $b \neq \boldsymbol{A}$ olur. □

Şimdi sınıf terimlerini $\in$ işaretinin solunda kullanabiliriz, ama çıkan cümle doğru olacağı için sınıf terimi bir kümeyi adlandırmalı:

$$\boldsymbol{A} \in b \text{ denktir } \exists x\ (x = \boldsymbol{A} \wedge x \in b).$$

Eğer $\forall x\ (x \in \boldsymbol{A} \Rightarrow x \in \boldsymbol{B})$ doğruysa, o zaman $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ sınıfının **altsınıfıdır** (*subclass*), ve $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$ ifadesini yazarız. Yani

$$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \text{ denktir } \forall x\ (x \in \boldsymbol{A} \Rightarrow x \in \boldsymbol{B}).$$

Teorem 7.

1. *Tüm $\boldsymbol{A}$ ile $\boldsymbol{B}$ sınıfları için*

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \textit{ denktir } \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A}.$$

2. *Tüm $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, ve $\boldsymbol{C}$ sınıfları için*

$$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{C} \Rightarrow \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{C}$$

cümlesi (mantığa göre) doğrudur.

Alıştırma 3. Teoremi kanıtlayınız.

2.5 İşlemler

Sınıflarla birkaç tane ikili işlem vardır:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} &= \{x\colon x \in \boldsymbol{A} \land x \in \boldsymbol{B}\},\\
\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} &= \{x\colon x \in \boldsymbol{A} \lor x \in \boldsymbol{B}\},\\
\boldsymbol{A} \vartriangle \boldsymbol{B} &= \{x\colon (x \in \boldsymbol{A} \land x \notin \boldsymbol{B}) \lor (x \notin \boldsymbol{A} \land x \in \boldsymbol{B})\}\\
&= \{x\colon \neg(x \in \boldsymbol{A} \Leftrightarrow x \in \boldsymbol{B})\}.
\end{aligned}$$

Bunlar sırasıyla $\boldsymbol{A}$ ile $\boldsymbol{B}$ sınıflarının **kesişimi** (*intersection*), **bileşimi** (*union*), ve **simetrik farkıdır** (*symmetric difference*). Ayrıca

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} \smallsetminus \boldsymbol{B} &= \{x\colon x \in \boldsymbol{A} \land x \notin \boldsymbol{B}\}\\
&= \{x\colon \neg(x \in \boldsymbol{A} \Rightarrow x \in \boldsymbol{B})\};
\end{aligned}$$

bu sınıf, $\boldsymbol{A}$ sınıfının $\boldsymbol{B}$ sınıfından **farkıdır** (*difference*).

Teorem 8. *Tüm* $\boldsymbol{A}$ *ile* $\boldsymbol{B}$ *sınıfları için*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} \vartriangle \boldsymbol{B} &= (\boldsymbol{A} \smallsetminus \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{B} \smallsetminus \boldsymbol{A})\\
&= (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \smallsetminus (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}).
\end{aligned}$$

Alıştırma 4. Teoremi kanıtlayınız.

7 numaralı teorem sayesinde bir $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \land \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{C}$ cümlesinin yerine

$$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{C}$$

ifadesini yazabiliriz.

Teorem 9. *Tüm* $\boldsymbol{A}$ *ile* $\boldsymbol{B}$ *sınıfları için*

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}.$$

Alıştırma 5. Teoremi kanıtlayınız.

Sınıflarda bir *birli* işlem vardır:

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{c}} = \{x\colon x \notin \boldsymbol{A}\};$$

bu sınıf, $\boldsymbol{A}$ sınıfının **tümleyenidir** (*complement*).

Teorem 10 (De Morgan Kuralları)**.** *Tüm $\boldsymbol{A}$ ile $\boldsymbol{B}$ sınıfları için*

$$(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})^{\mathrm{c}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{c}} \cup \boldsymbol{B}^{\mathrm{c}}, \qquad (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})^{\mathrm{c}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{c}} \cap \boldsymbol{B}^{\mathrm{c}}.$$

Alıştırma 6. Teoremi kanıtlayınız.

İçerilme bağıntısını kullanarak birkaç tane birli işlemi daha tanımlayabiliriz:

$$\begin{aligned} \bigcap \boldsymbol{A} &= \{x \colon \forall y\ (y \in \boldsymbol{A} \Rightarrow x \in y)\}, \\ \bigcup \boldsymbol{A} &= \{x \colon \exists y\ (x \in y \wedge y \in \boldsymbol{A})\}, \\ \mathscr{P}(\boldsymbol{A}) &= \{x \colon \forall y\ (y \in x \Rightarrow y \in \boldsymbol{A})\} \\ &= \{x \colon x \subseteq \boldsymbol{A}\}; \end{aligned}$$

bunlar sırasıyla $\boldsymbol{A}$ sınıfının **kesişimi** (*intersection*), **bileşimi** (*union*), ve **kuvvet sınıfıdır** (*power class*).

Teorem 11. *Eğer $a \in \boldsymbol{B}$ ise*

$$\bigcap \boldsymbol{B} \subseteq a \subseteq \bigcup \boldsymbol{B}$$

doğrudur.

Alıştırma 7. Teoremi kanıtlayınız.

Son olarak 8 numaralı sayfadaki gibi

$$\mathbf{V} = \{x \colon x = x\},$$

ve

$$\begin{aligned} \varnothing &= \{x \colon x \neq x\}, \\ \{a\} &= \{x \colon x = a\}, \\ \{a, b\} &= \{x \colon x = a \vee x = b\}, \\ \{a, b, c\} &= \{x \colon x = a \vee x = b \vee x = c\}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Buradaki $\varnothing$ sınıfı, **boş sınıftır.**

Bu altbölümün

$$\begin{array}{cccc} \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}, & \boldsymbol{A}^{\mathrm{c}}, & & \varnothing, \\ \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}, & \bigcap \boldsymbol{A}, & \mathbf{V}, & \{a\}, \\ \boldsymbol{A} \vartriangle \boldsymbol{B}, & \bigcup \boldsymbol{A}, & & \{a, b\}, \\ \boldsymbol{A} \smallsetminus \boldsymbol{B}, & \mathscr{P}(\boldsymbol{A}), & & \{a, b, c\} \end{array}$$

ifadeleri, *sınıf* terimidir. Her $\boldsymbol{A}$ veya $\boldsymbol{B}$ teriminin yerine başka bir terimi koyabiliriz. Zaten bu şekilde $(\boldsymbol{A} \smallsetminus \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{B} \smallsetminus \boldsymbol{A})$ gibi ifadeleri yazdık. Fakat şimdilik küçük harfler hariç, küme terimlerimiz yoktur. Bu durum hemen değişecek.

3 Doğal Sayılar

3.1 Doğal sayılar kümesi

18 numaralı sayfadaki tanıma göre $\exists x\ x = a$ cümlesi doğru mudur? Yani $\exists x\ \forall y\ (y \in x \Leftrightarrow y \in a)$ cümlesi doğru mudur? Eğer bir b kümesi için $b = a$ cümlesi, yani $\forall y\ (y \in b \Leftrightarrow y \in a)$ cümlesi, doğruysa, o zaman $\exists x\ x = a$ cümlesi de doğrudur. Aslında 4 numaralı teoreme göre $a = a$ cümlesi doğru, değil mi? O halde $\exists x\ x = a$ cümlesi doğru olmalı.

Ama bu iddia pek doğru değildir. Bir a kümesi varsa, o zaman $\exists x\ x = a$ cümlesi doğrudur. Bir küme varsa, bu kümeye a denilebilir, ve sonuç olarak $\exists x\ x = a$ cümlesi doğru oluyor. Bu ana kadar hiç kesin bir kümemiz olmadı. Ama kümeler olmalı, ve birini zaten biliyoruz:

AKSİYOM 2 (Boş Küme)**.** *$\varnothing$ boş sınıf, bir kümedir:*

$$\exists x\ \forall y\ (y \notin x)$$

cümlesi doğrudur.

Bu aksiyom sayesinde $\varnothing$ işareti, bir küme terimidir. Bu yüzden $\{\varnothing\}$ ve $\{\varnothing, a\}$ gibi sınıf terimlerini yazabiliriz. Bu terimler, küme terimi olacak. Boş küme gibi bilinen kümelerden yeni kümeler oluşturulabilir:

AKSİYOM 3 (Bitiştirme)**.** *Tüm a ile b kümeleri için $a \cup \{b\}$ sınıfı, bir kümedir:*

$$\forall x\ \forall y\ \exists z\ \forall w\ (w \in z \Leftrightarrow w \in x \lor w = y)$$

cümlesi doğrudur.

Teorem 12 (Temel Kümeler)**.** *Tüm a ile b kümeleri için $\{a\}$ ile $\{a, b\}$ sınıfları, kümedir:*

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \in y \Leftrightarrow z = x),$$
$$\forall x\ \forall y\ \exists z\ \forall w\ (w \in z \Leftrightarrow w = x \lor w = y)$$

cümleleri doğrudur.

Kanıt. Boş Küme ile Bitiştirme Aksiyomlarına göre $\{a\}$ sınıfı, $\varnothing \cup \{a\}$ kümesine eşittir, ve $\{a, b\}$ sınıfı, $\{a\} \cup \{b\}$ kümesine eşittir. □

Özel olarak her a kümesi için $a \cup \{a\}$ bir kümedir. Bu son küme, a' olsun. Yani her a kümesi için

$$a' = a \cup \{a\}$$

olsun. a' kümesi, a kümesinin **ardılıdır** (*successor*). Sık sık ardılları alarak

$$\varnothing, \quad \varnothing', \quad \varnothing'', \quad \varnothing''', \quad \dots$$

küme dizisini oluşturabiliriz. Bu dizi,

$$\varnothing, \quad \{\varnothing\}, \quad \big\{\varnothing, \{\varnothing\}\big\}, \quad \Big\{\varnothing, \{\varnothing\}, \big\{\varnothing, \{\varnothing\}\big\}\Big\}, \quad \dots$$

olur. Yukarıdaki 5 numaralı sayfadaki gibi bu kümeler,

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad \dots$$

doğal sayıları olacak. Elemanları *tüm* doğal sayılar olan bir sınıf var mıdır?

Doğal sayıların *topluluğunun* iki özelliği vardır:

1. 0, bu topluluktadır.
2. Eğer a, bu topluluktaysa, $a \cup \{a\}$ kümesi de, bu topluluktadır.

Bu özellikleri olan *kümeler,* bir sınıf oluşturur. Yani

$$\mathbf{\Omega} = \{x \colon 0 \in x \land \forall y\ (y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x)\}$$

eşitliğini sağlayan bir $\mathbf{\Omega}$ sınıfı vardır.

Teorem 13.

1. $0 \in \bigcap \mathbf{\Omega}$.
2. *Eğer* $a \in \bigcap \mathbf{\Omega}$ *ise, o zaman* $a \cup \{a\} \in \bigcap \mathbf{\Omega}$ *olur.*

3. *Eğer $a \subseteq \bigcap \mathbf{\Omega}$ ise, ve a,*

$$0 \in a, \qquad \forall x\ (x \in a \Rightarrow x \cup \{x\} \in a)$$

özelliklerini sağlarsa, o zaman $a = \bigcap \mathbf{\Omega}$ olur.

Kanıt. 1. Eğer $a \in \mathbf{\Omega}$ ise, o zaman $0 \in a$. Sonuç olarak $0 \in \bigcap \mathbf{\Omega}$.

2. $a \in \bigcap \mathbf{\Omega}$ olsun. O zaman $\mathbf{\Omega}$ sınıfının her b elemanı için $a \in b$. Ayrıca $b \in \mathbf{\Omega}$ yüzünden $\forall y\ (y \in b \Rightarrow y \cup \{y\} \in b)$ cümlesi doğrudur. O zaman $a \cup \{a\} \in b$ olmalı. Sonuç olarak $a \cup \{a\} \in \bigcap \mathbf{\Omega}$.

3. $0 \in a$ ve $\forall x\ (x \in a \Rightarrow x \cup \{x\} \in a)$ doğru olsun. O zaman $a \in \mathbf{\Omega}$. Bu yüzden 11 numaralı teoreme göre $\bigcap \mathbf{\Omega} \subseteq a$ olmalı. Eğer ayrıca $a \subseteq \bigcap \mathbf{\Omega}$ ise, o zaman 7 numaralı teoreme göre $a = \bigcap \mathbf{\Omega}$. □

Bu teoreme rağmen eğer

$$\boldsymbol{A} \subseteq \bigcap \mathbf{\Omega}, \qquad 0 \in \boldsymbol{A}, \qquad \forall x\ (x \in \boldsymbol{A} \Rightarrow x \cup \{x\} \in \boldsymbol{A}) \tag{$*$}$$

ise $\boldsymbol{A} = \bigcap \mathbf{\Omega}$ cümlesini sonuçlandıramıyoruz. Neden? Tanımımıza göre*

$$\bigcap 0 = \mathbf{V}$$

(yani $\bigcap \varnothing = \mathbf{V}$) olur, ve $\mathbf{\Omega}$ sınıfının boş olmadığını şimdilik bilmiyoruz. Bu durumu hemen değiştirebiliriz:

AKSİYOM 4 (Sonsuzluk)**.** $\mathbf{\Omega} \neq 0$, *yani*

$$\exists x\ \big(0 \in x \wedge \forall y\ (y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x)\big)$$

cümlesi doğrudur.

Hâlâ yukarıdaki $(*)$ satırındaki varsayılarından $\boldsymbol{A} = \bigcap \mathbf{\Omega}$ cümlesini sonuçlandıramıyoruz. Neden? Bir tane aksiyomu daha kullanarak bunu sonuçlandırabiliriz:

*Bazı kitaplarda $\boldsymbol{A}$ boş ise $\bigcap \boldsymbol{A}$ kesişimi tanımlanmaz. Örneğin [11, s. 51 & 285] kaynağına bakınız.

AKSİYOM 5 (Ayırma). *Bir kümenin her altsınıfı, bir kümedir, yani her $\varphi(x)$ formülü için*

$$\forall x\, \exists y\, \forall z\, \big(z \in y \Leftrightarrow z \in x \land \varphi(z)\big)$$

cümlesi doğrudur.

Şimdi her a kümesi ve $\varphi(x)$ formülü için $\{x \colon x \in a \land \varphi(x)\}$ sınıfı, bir kümedir, ve bu küme

$$\{x \in a \colon \varphi(x)\}$$

olarak yazılır.

Teorem 14. *Bir sınıf boş değilse, kesişimi bir kümedir.*

Kanıt. $a \in \boldsymbol{B}$ olsun. 11 numaralı teoreme göre $\bigcap \boldsymbol{B} \subseteq a$. Ayırma Aksiyomuna göre $\bigcap \boldsymbol{B}$ kesişimi, bir küme olmalı. □

Özel olarak

$$\omega = \bigcap \boldsymbol{\Omega}$$

eşitliğini sağlayan bir ω kümesi vardır. Bu kümenin elemanları, **von Neumann doğal sayılarıdır.** ω işareti, yeni bir küme terimidir. Bundan sonra $\boldsymbol{\Omega}$ sınıf terimini kullanmayacağız.

Şimdi 13 numaralı teoremi aşağıdaki biçimde yazabiliriz:

1. $0 \in \omega$.
2. Eğer $a \in \omega$ ise, o zaman $a' \in \omega$ olur.
3. Eğer $a \subseteq \omega$ ise, ve a,

$$0 \in a, \qquad \forall x\, (x \in a \Rightarrow x' \in a)$$

   özelliklerini sağlarsa, o zaman $a = \omega$ olur.

Ayrıca her kümeninki gibi ω kümesinin de her altsınıfı, bir kümedir. Sonuç olarak ω kümesinin bazı özelliklerini **tümevarım** (*induction*) yöntemiyle kanıtlayabileceğiz.

Aslında bazen ω kümesinin iki özelliğininin daha kullanılması gerekecek. $\forall x\; x' \neq 0$ apaçıktır. Ama k ile m, doğal sayılar ise, ve $k' = m'$ ise, $k = m$ eşitliğini elde etmek, biraz daha zor olacak.

Mümkünse $k' = m'$ ama $k \neq m$ olsun. O zaman $k \in m$ ve $m \in k$ olmalı. Bundan $k \in k$ cümlesini sonuçlandırmak istiyoruz.

Eğer bir $\boldsymbol{A}$ sınıfı,

$$\forall x\, \forall y\; (x \in \boldsymbol{A} \land y \in x \Rightarrow y \in \boldsymbol{A})$$

cümlesini sağlarsa, o zaman $\boldsymbol{A}$ sınıfına **geçişli** (*transitive*) denir. Öyleyse her geçişli sınıfın her elemanı, sınıfın bir altkümesidir de.

Teorem 15. *ω kümesinin her elemanı, geçişlidir.*

Kanıt. a, ω kümesinin geçişli elemanları kümesi olsun. Yani

$$\begin{aligned} a &= \{x \in \omega \colon \forall y\, \forall z\; (y \in x \land z \in y \Rightarrow z \in x)\} \\ &= \{x \in \omega \colon \forall y\; (y \in x \Rightarrow y \subseteq x)\} \end{aligned}$$

olsun. O zaman $0 \in a$ olur. *Tümevarım hipotezi* olarak $b \in a$ olsun. $b' \in a$ cümlesinin doğruluğunu göstereceğiz. $c \in b'$ olsun. Ya $c \in b$ ya da $c = b$ olur. Eğer $c \in b$ ise, o zaman hipotezimize göre $c \subseteq b$ olur. Her durumda $b \subseteq b'$. Öyleyse $c \subseteq b'$. Ama c, b' kümesinin herhangi bir elemanıdır. Sonuç olarak $b' \in a$ olur. Tümevarımdan (yani 13 numaralı teoremin 32 numaralı sayfadaki biçiminden) $a = \omega$ olur. □

Teorem 16. *ω kümesi, geçişlidir.*

Alıştırma 8. Teoremi kanıtlayınız.

Alıştırma 9. $\{0, 1, \{1\}\}$ kümesinin geçişli olduğunu kanıtlayınız.

Teorem 17. *ω kümesinin hiçbir elemanı, kendisini içermez.*

Kanıt. Tekrar tümevarımı kullanacağız. Çünkü boş kümenin hiçbir elemanı yok, $0 \notin 0$ olur. Şimdi $a \in \omega$ ve $a \notin a$ olsun. Eğer $a' \in a'$ ise, ya $a' \in a$ ya da $a' = a$ olur. Her durumda, geçen teoreme göre, $a' \subseteq a$ olur, dolayısıyla $a \in a$ olur (çünkü $a \in a'$). Bu sonuç, varsayımımızla çelişir. O zaman $a' \notin a'$ olmalı. Tümevarımdan kanıtımız bitti. □

Teorem 18. *ω kümesinin tüm k ile m elemanları için $k' = m'$ ise $k = m$ olur.*

Kanıt. Mümkünse $k' = m'$ ama $k \neq m$ olsun. Dediğimiz gibi $k \in m$ ve $m \in k$ olmalı. 15 ile 17 numaralı teoremlere göre $k \in k$ ve $k \notin k$ olur, bir çelişkidir. □

Şimdi, 13 numaralı teoremdekiler dahil, ω kümesinin beş tane özelliği vardır:

1. $0 \in \omega$.
2. $\forall x\ (x \in \omega \Rightarrow x' \in \omega)$.
3. $\forall x\ \bigl(x \subseteq \omega \land 0 \in x \land \forall y\ (y \in x \Rightarrow y' \in x) \Rightarrow x = \omega\bigr)$.
4. $\forall x\ (x \in \omega \Rightarrow x' \neq 0)$.
5. $\forall x\ \forall y\ (x \in \omega \land y \in \omega \land x' = y' \Rightarrow x = y)$.

Bu özelliklerin önemi, 1887 yılında Dedekind [4, II, ¶71] tarafından, ve 1889 yılında Peano [12] tarafından, fark edilmiştir. Sık sık **Peano Aksiyomları,** bu özelliklere denir, ama **Dedekind–Peano Aksiyomları** de kullanılabilir. Aslında bizim için aksiyomlar değil, teoremdirler.

Peano Aksiyomlarından doğal sayıların tüm özellikleri elde edilebilir. Mesela *iyi sıralama* özelliği elde edilebilir. Aslında ω, içerilme ($\in$) bağıntısı tarafından iyi sıralanır. Ama bir bağıntı nedir?

3.2 Bağıntılar

Herhangi a ile b kümeleri için $\bigl\{\{a\}, \{a, b\}\bigr\}$ kümesi (a, b) **sıralı ikilisi** (*ordered pair*) olarak yazılır. Yani

$$(a, b) = \bigl\{\{a\}, \{a, b\}\bigr\}$$

olur.†

Teorem 19. *Tüm a, b, c, ve d kümeleri için*

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \land b = d$$

cümlesi doğrudur.

† †† numaralı sayfadaki notta dediğimiz gibi bu tanım, Kuratowski'nin [8] 1921 yılında verdiği tanımdır.

Alıştırma 10. Teoremi kanıtlayınız.

Alıştırma 11. $\big\{\{a,1\},\{b,2\}\big\} = \big\{\{c,1\},\{d,2\}\big\} \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$ cümlesini kanıtlayınız.‡

Alıştırma 12. $\Big\{\big\{\{a\},0\big\},\big\{\{b\}\big\}\Big\} = \Big\{\big\{\{c\},0\big\},\big\{\{d\}\big\}\Big\} \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$ cümlesini kanıtlayınız.§

Şimdi her ikili $\varphi(x,y)$ formülü için

$$\big\{z\colon \exists x\ \exists y\ \big(z = (x,y) \wedge \varphi(x,y)\big)\big\}$$

sınıfı,

$$\{(x,y)\colon \varphi(x,y)\}$$

olarak yazılabilir. Öyle bir sınıf, bir **ikili bağıntıdır** (*binary relation*).

Örneğin:

1. İçerilme bağıntısı, $\{(x,y)\colon x \in y\}$ sınıfıdır.
2. Eşitlik bağıntısı, $\{(x,y)\colon x = y\}$ sınıfıdır.

Aynı şekilde, eğer $\boldsymbol{R}$, bir ikili bağıntıysa, o zaman $(x,y) \in \boldsymbol{R}$ formülünün kısaltması olarak $x\ \boldsymbol{R}\ y$ ifadesini yazarız, yani

$$x\ \boldsymbol{R}\ y \text{ denktir } (x,y) \in \boldsymbol{R}.$$

$\boldsymbol{R}$ bağıntısının **ters bağıntısı** veya **tersi** (*converse*),

$$\{(y,x)\colon x\ \boldsymbol{R}\ y\}$$

bağıntısıdır. Bu bağıntı, $\breve{\boldsymbol{R}}$ olarak yazılır; yani

$$x\ \breve{\boldsymbol{R}}\ y \text{ denktir } y\ \boldsymbol{R}\ x.$$

$\boldsymbol{A}$ ile $\boldsymbol{B}$, iki sınıf ise, o zaman tanıma göre

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \{(x,y)\colon x \in \boldsymbol{A} \wedge y \in \boldsymbol{B}\}$$

‡Heijenoort'a [18, s. 224] göre bu cümlede, Hausdorff'un 1914 yılında verdiği sıralı ikili tanımı bulmuştur.

§Bu cümlede, Wiener'in [20] 1914 yılında verdiği sıralı ikili tanımı bulmuştur.

olur; bu bağıntı, $\boldsymbol{A}$ ile $\boldsymbol{B}$ sınıflarının **çarpımıdır** (*product*). Eğer $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$, o zaman $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{A}$ sınıfından $\boldsymbol{B}$ sınıfına giden bir bağıntıdır.

Sınıflar arasındaki bir bağıntının kendisi, bir sınıftır. Sıralı ikililerin tanımı, sınıflarla bağıntıları birleştirir. Benzer şekilde Newton'un Ağırlık Kanunu, Ay'ın Yerin etrafında dönüşü ile nesnelerin yere düşüşünü birleştirir.

Eğer $\boldsymbol{F}$,

$$\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x\ \boldsymbol{F}\ y \land x\ \boldsymbol{F}\ z \Rightarrow y = z) \tag{$\dagger$}$$

cümlesini sağlayan bir ikili bağıntıysa, o zaman

(1) $\boldsymbol{F}$ bağıntısına **gönderme** denir;
(2) $\{x\colon \exists y\ x\ \boldsymbol{F}\ y\}$ sınıfına $\boldsymbol{F}$ göndermesinin **tanım sınıfı** (*domain*) denir;
(3) $\{y\colon \exists x\ x\ \boldsymbol{F}\ y\}$ sınıfına $\boldsymbol{F}$ göndermesinin **değer sınıfı** (*range*) denir.[¶]

Bu durumda $x\ \boldsymbol{F}\ y$ formülünün yerine

$$y = \boldsymbol{F}(x)$$

ifadesini yazarız, çünkü $a\ \boldsymbol{F}\ b$ doğruysa, o zaman b kümesi, a kümesi tarafından belirtilir. Buradaki $\boldsymbol{F}(x)$ ifadesi, yeni bir küme terimidir. O zaman $\boldsymbol{F}$,

$$x \mapsto \boldsymbol{F}(x)$$

olarak yazılabilir; yani

$$(x \mapsto \boldsymbol{F}(x)) = \{(x, y)\colon y = \boldsymbol{F}(x)\}.$$

Örneğin:

[¶] Bu notlarda bir gönderme, sadece (†) cümlesini sağlayan bir $\boldsymbol{F}$ ikili bağıntısıdır. Fakat bazı kaynaklarda (örneğin [11, s. 70] kaynağında) bir gönderme veya fonksiyon, (1) (†) cümlesini sağlayan bir $\boldsymbol{F}$ ikili bağıntısı, (2) $\{y\colon \exists x\ x\ \boldsymbol{F}\ y\}$ sınıfına eşit bir $\boldsymbol{A}$ sınıfı, ve (3) $\{y\colon \exists x\ x\ \boldsymbol{F}\ y\}$ sınıfını *kapsayan* bir $\boldsymbol{B}$ sınıfı tarafından oluşturulmuş bir üçlüdür. O halde (aşağıdaki 37 numaralı sayfadaki gibi) $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ ifadesi yazılır. Ayrıca, $\boldsymbol{B}$ sınıfına *göndermenin değer sınıfı* (veya *varış sınıfı*) denilebilir. İngilizcede *codomain* kullanılır. Ama buradaki $\boldsymbol{B}$ sınıfı, sadece $\boldsymbol{F}$ sınıfı tarafından belirtilmez, ve buna hiçbir ad vermiyoruz.

1. Her a kümesi için, $x \mapsto a$ **sabit gönderme** (*constant function*) vardır, özel olarak $x \mapsto 0$, $x \mapsto 1$, …, $x \mapsto \omega$, …

2. $x \mapsto x$, **özdeşlik göndermesidir** (*identity function*).

3. $x \mapsto x'$, **ardıl göndermesi** (*successor function*) veya **ardıllamadır** (*succession*).

Eğer $\boldsymbol{F}$ göndermesinin tanım sınıfı $\boldsymbol{A}$ ise, ve değer sınıfını, bir $\boldsymbol{B}$ sınıfı tarafından kapsanırsa, o zaman

$$\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$$

ifadesini yazarız. Yani bu ifade,

$$\begin{aligned}\forall x\ \forall y\ (x\ \boldsymbol{F}\ y \Rightarrow x \in \boldsymbol{A} \land y \in \boldsymbol{B})&\\ \land \forall x\ \big(x \in \boldsymbol{A} \Rightarrow \exists y\ (x\ \boldsymbol{F}\ y)\big)&\\ \land \forall x\ \forall y\ \forall z\ (x\ \boldsymbol{F}\ y \land x\ \boldsymbol{F}\ z \Rightarrow y = z)&\end{aligned}$$

cümlesinin kısaltmasıdır.

3.3 Sıralamalar

Sıralama (*ordering*),

$$\forall x\ \neg\ x\ \boldsymbol{R}\ x, \qquad \forall x\ \forall y\ \forall z\ (x\ \boldsymbol{R}\ y \land y\ \boldsymbol{R}\ z \Rightarrow x\ \boldsymbol{R}\ z)$$

cümlelerini sağlayan bir $\boldsymbol{R}$ ikili bağıntısıdır. Örneğin yukaradaki 13 numaralı sayfada bahsedildiği ve aşağıdaki 60 numaralı sayfada kanıtlanacak Schröder–Bernstein Teoremine göre $\prec$ bağıntısı, bir sıralama olacaktır. Ayrıca

$$\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B} \text{ denktir } \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \land \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B}$$

olsun; o zaman $\subset$ bağıntısı da, bir sıralamadır.

Belki bir $\boldsymbol{R}$ bağıntısı, bir sıralama değildir, ama bir $\boldsymbol{A}$ sınıfı için

$$\boldsymbol{R} \cap (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A})$$

kesişimi, bir sıralama olabilir. O zaman $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{R}$ tarafından sıralanır. Örneğin $\in$, sıralama değil; ama 15 ile 17 numaralı teoremlere göre $\in$ bağıntısı ω kümesini sıralar.

Eğer $\boldsymbol{A}$ sınıfı, $\boldsymbol{R}$ tarafından sıralanırsa, ve üstelik

$$\forall x\ \forall y\ (x \in \boldsymbol{A} \wedge y \in \boldsymbol{A} \wedge x \neq y \Rightarrow x\ \boldsymbol{R}\ y \vee y\ \boldsymbol{R}\ x)$$

doğruysa, o zaman $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{A}$ sınıfının bir **doğrusal** (*linear*) sıralamasıdır.

Teorem 20. *$\in$ bağıntısı, her doğal sayının doğrusal sıralamasıdır.*

Alıştırma 13. Teoremi kanıtlayınız.

Eğer $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{A}$ sınıfının doğrusal sıralamasıysa, ve üstelik $\boldsymbol{A}$ sınıfının her boş olmayan b altkümesinin $\boldsymbol{R}$ sıralamasına göre **en küçük** (*least*) elemanı varsa, yani

$$\forall x\ \Big(x \subseteq \boldsymbol{A} \wedge x \neq 0 \Rightarrow \exists y\ \big(y \in x \wedge \forall z\ (z \in x \smallsetminus \{y\} \Rightarrow y\ \boldsymbol{R}\ z)\big)\Big)$$

doğruysa, o zaman $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{R}$ tarafından **iyi sıralanır** (*well-ordered*).

Teorem 21. *$\in$ bağıntısı, her doğal sayının iyi sıralamasıdır.*

Alıştırma 14. Teoremi kanıtlayınız.

Teorem 22. *ω kümesinde $\in$ ile $\subset$, aynı bağıntıdır, yani*

$$\forall x\ \forall y\ \big(x \in \omega \wedge y \in \omega \Rightarrow (x \in y \Leftrightarrow x \subset y)\big)$$

doğrudur.

Kanıt. k ile m, doğal sayılar olsun. 15 ile 17 numaralı teoremlere göre $k \in m$ ise $k \subset m$ olur.

Şimdi $k \subset m$ olsun. Önceki teoreme göre $m \smallsetminus k$ farkının en küçük ℓ elemanı vardır. O zaman $\ell \in m$, dolayısıyla $\ell \subseteq m$. Ayrıca $a \in \ell$ ise $a \in k$ olmalı (çünkü $a \in m$, ama içerilmeye göre ℓ, $m \smallsetminus k$ farkının en küçük elemanıdır). Öyleyse $\ell \subseteq k$ olur. Ama $b \in k$ ise $b \in m$, dolayısıyla $\ell \in b$ veya $\ell = b$ veya $b \in \ell$ olur. Ancak $\ell \notin b$ ve $\ell \neq b$ (çünkü $b \subseteq k$ ve $\ell \notin k$). Öyleyse $b \in \ell$. Sonuç olarak $k \subseteq \ell$. Fakat $\ell \subseteq k$. O zaman $k = \ell$, dolayısıyla $k \in m$. □

Teorem 23. ω, *içerilme tarafından iyi sıralanır.*

Kanıt. ω kümesinde $m \notin k$ ve $m \neq k$ olsun. Yani (önceki teoremi kullanarak) $m \not\subseteq k$ olsun. O zaman $m \smallsetminus k$ farkının en küçük ℓ elemanı vardır. Geçen kanıttaki gibi $\ell \subseteq k$, yani $\ell \in k$ veya $\ell = k$. Fakat $\ell \notin k$. Sonuç olarak $\ell = k$, dolayısıyla $k \in m$. Öyleyse içerilme, ω kümesinin bir doğrusal sıralamasıdır.

Ayrıca $a \subseteq \omega$ ve $n \in a$ ise, ya n a kümesinin en küçük elemanıdır, ya da $n \cap a$ kesişimi boş değildir. Son durumda bu kesişimin en küçük elemanı vardır, ve bu eleman, a kümesinin en küçük elemanıdır. □

3.4 Ordinaller

Önceki iki teoremin kanıtları, doğal sayıların sadece geçişlilik ve iyi sıralama özelliklerini kullanmaktadır. Bir **ordinal,**

1) geçişli ve
2) $\in$ tarafından iyi sıralanmış

bir kümedir. Ordinaller,

$$\mathbf{ON}$$

sınıfını oluşturur. O zaman 15 ve 21 numaralı teoremlere göre

$$\omega \subseteq \mathbf{ON}.$$

Üstelik 16 ve 23 numaralı teoremlere göre

$$\omega \in \mathbf{ON}.$$

Dolayısıyla $\omega' \in \mathbf{ON}$.

Teorem 24. *Her ordinalin ardılı, bir ordinaldir.*

Alıştırma 15. Teoremi kanıtlayınız.

Teorem 25. **ON** *sınıfında* $\in$ *ve* $\subset$, *aynı bağıntıdır.*

Alıştırma 16. 22 numaralı teoremin kanıtını kullanarak bu teoremi kanıtlayınız.

Teorem 26 (Burali-Forti Paradoksu [2]). **ON** *geçişlidir, ve* $\in$ *tarafından iyi sıralanır.*

Kanıt. α bir ordinal olsun, ve $\beta \in \alpha$ olsun. O zaman $\beta \subseteq \alpha$ olur. Bu durumda β, $\in$ tarafından iyi sıralanır. Şimdi $\gamma \in \beta$ olsun. O zaman $\gamma \in \alpha$, dolayısıyla $\gamma \subseteq \alpha$ olur. O zaman $\delta \in \gamma$ ise $\delta \in \alpha$ olur. α, $\in$ tarafından iyi sıralandığından, $\delta \in \beta$ olur, çünkü β, γ, ve δ, hepsi α kümesindedir, ve $\delta \in \gamma$, ve $\gamma \in \beta$. Kısaca $\delta \in \gamma \Rightarrow \delta \in \beta$, yani $\gamma \subseteq \beta$. Ama γ, β kümesinin herhangi bir elemanıdır. Öyleyse β, geçişlidir. Sonuç olarak β, bir ordinaldir. Ama β, α ordinalinin herhangi bir elemanıdır. O zaman $\alpha \subseteq \mathbf{ON}$. Ve α, herhangi bir ordinaldir. Öyleyse **ON** geçişlidir.

Ordinaller sınıfının $\in$ tarafından iyi sıralandığı kanıt, 23 numaralı teoremin kanıtı ile aynıdır. □

9 numaralı sayfada dediğimiz gibi **ON** bir küme olsaydı, $\mathbf{ON} \in \mathbf{ON}$ olur, ki bu saçmadır (çünkü **ON** sınıfında $\in$ dönüşsüzdür).

α, β, γ, ve δ gibi küçük Yunanca harfleri, her zaman ordinaller olacaktır. Ayrıca 25 numaralı teorem sayesinde $\alpha \in \beta$ veya $\alpha \subset \beta$ formülünün yerine

$$\alpha < \beta$$

ifadesini yazabiliriz.

Teorem 27. $\alpha' = \min\{\beta \colon \alpha < \beta\}$, *yani her ordinal için daha büyük ordinaller sınıfının en küçük elemanı, ordinalin ardılıdır.*[‖]

Alıştırma 17. Teoremi kanıtlayınız.

Eğer α boş veya ardıl değilse, ve $\beta \in \alpha$, o zaman $\alpha' < \beta$ olmalıdır. Bu durumda, β ordinaline **limit** denir. Örneğin ω, bir limittir.

Teorem 28. ω, *hem limit olmayan hem limit içermeyen ordinaller sınıfıdır. Yani*

$$\begin{aligned}\omega = \{x \colon x \in \mathbf{ON} \wedge (x = 0 \vee \exists y\ y' = x)&\\ \wedge \forall z\ (z \in x \Rightarrow z = 0 \vee \exists y\ y' = z)\}&\end{aligned} \quad (\ddagger)$$

[‖] $\{\beta \colon \alpha < \beta\}$ ifadesinde β, sabit değil, değişken olarak kullanılmaktadır; ama bu değişkenin değerleri, sadece ordinaldir. Yani $\{\beta \colon \alpha < \beta\} = \{x \colon x \in \mathbf{ON} \wedge \alpha \in x\}$.

olur.

Kanıt. Tümevarımla her doğal sayı, ne limittir ne limit içerir. Öte yandan, eğer α' ardılı, hiç limit içermezse, o zaman α ordinal de, hiç limit içermez. Öyleyse en küçük limit olmayan, limit içermeyen, doğal sayı olmayan ordinal yoktur. O zaman hiç öyle ordinaller yoktur. □

Bu teoremin kanıtı, Sonsuzluk Aksiyomunu kullanmaz, dolayısıyla (‡) eşitliği, ω sınıfının tanımı olarak kullanılabilir. O halde 34 numaralı sayfadaki Peano Aksiyomları yeniden kanıtlanmalıdır.

3.5 Özyineleme

ω kümesinde toplama, bir **ikili işlem** olacak, yani $\omega \times \omega$ çarpımından ω kümesine giden bir gönderme. Bu işlem,

$$(x, y) \mapsto x + y$$

olarak yazılır. O zaman her k doğal sayısı için bir $x \mapsto k + x$ **birli işlemi** olacaktır. Bu işlemin özelliklerinden ikisi,

$$k + 0 = k, \qquad \forall x\ \big(x \in \omega \Rightarrow k + x' = (k + x)'\big) \tag{§}$$

olacaktır. Aslında ω kümesindeki birli işlemlerden en çok birinin bu özellikleri vardır. Çünkü $f\colon \omega \to \omega$, $f(0) = k$, ve $\forall x\ \big(x \in \omega \Rightarrow f(x') = f(x)'\big)$ olsun. O zaman $f(0) = k + 0$, ve $f(m) = k + m$ ise $f(m') = f(m)' = (k+m)' = k+m'$. Tümevarımla her n doğal sayısı için $f(n) = k + n$.

Neden ω kümesindeki birli işlemlerden *en az* birinin (§) satırındaki özellikleri vardır? $k = 0$ durumunda her n için $k + n = n$ olsun. O zaman $k + 0 = 0$, ve $k + m' = m' = (k + m)'$ olur. Üstelik $k = \ell$ durumunda (§) satırındaki gibi $x \mapsto k + x$ işlemi varsa $\ell' + n = (\ell + n)'$ olsun. O zaman $\ell' + 0 = (\ell + 0)' = \ell'$, ve $\ell' + m' = (\ell + m')' = (\ell + m)'' = (\ell' + m)'$ olur. Yani $k = \ell'$ durumunda (§) satırındaki gibi $x \mapsto k + x$ işlemi vardır.

Tümevarımla ω kümesindeki her k için (§) satırındaki gibi $x \mapsto k + x$ işleminin olduğu sonucuna varabilir miyiz? Tümevarımla bir *kümenin* ω

kümesine eşit olduğu kanıtlanabilir. Şimdiki durumda hangi küme, ω kümesine eşit olmalıdır? Mümkünse a, ω kümesinin öyle k elemanları tarafından oluşturulsun ki (§) satırındaki özelliklerini sağlayan bir işlem olsun. O halde gösterdiğimiz gibi $a = \omega$ olmalıdır. Ama öyle bir a kümesi var mıdır? Hangi formül, bu kümeyi tanımlayabilir?

12 ve 48 numaralı sayfalardaki Yerleştirme Aksiyomuna göre bir kümede birli bir işlemin kendisi, bir kümedir. O halde istediğimiz a kümesi tanımlanabilir, dolayısıyla ω kümesindeki toplamanın kendisi tanımlanabilir. Aslında (§) satırındaki özellikleri, toplamanın **özyineli tanımını** (*recursive definition*) sağlar.

Benzer şekilde her k doğal sayısı için

$$k \cdot 0 = 0, \qquad \forall x\ (x \in \omega \Rightarrow k \cdot x' = k \cdot x + k) \tag{¶}$$

özellikleri olan $x \mapsto k \cdot x$ işlemi vardır. (Burada tabii ki $k \cdot x + k = (k \cdot x) + k$ olur.) Çünkü $0 \cdot n = 0$ ise $0 \cdot 0 = 0$ ve $0 \cdot m' = 0 = 0 + 0 = 0 \cdot m + 0$. Ayrıca istediğimiz gibi $x \mapsto \ell \cdot x$ varsa $\ell' \cdot n = \ell \cdot n + n$ olsun. O halde

$$\begin{aligned}
\ell' \cdot m' &= \ell \cdot m' + m' \\
&= (\ell \cdot m + \ell) + m' \\
&= \ell \cdot m + (\ell + m') \\
&= \ell \cdot m + (\ell + m)' \\
&= \ell \cdot m + (m + \ell)' \\
&= \ell \cdot m + (m + \ell') \\
&= (\ell \cdot m + m) + \ell' \\
&= \ell' \cdot m + \ell'
\end{aligned}$$

olur. Ama burada toplamanın birleşme ve değişme özelliklerini kullandık; bunlar kanıtlanmalıdır.

Buraya kadar gelmek için tümevarım yeter. Yani 34 numaralı sayfadaki ilk üç Peano Aksiyomu yeter. Sayılar teorisinde, her pozitif n modülüse göre tamsayılar, bu aksiyomları sağlar. Yani eğer bir a kümesinin elemanları tamsayı ise, ve

$$x \equiv 0 \pmod{n}$$

denkliğinin a kümesinden çözümü varsa, ve ayrıca her ℓ tamsayısı için

$$x \equiv \ell \implies y \equiv \ell' \pmod{n}$$

karaştırmasının a kümesinden çözümü varsa, o zaman her k tamsayısı için

$$x \equiv k \pmod{n}$$

denkliğinin a kümesinden çözümü vardır. Örneğin p, bir asal sayı olsun. O zaman

$$0^p \equiv 0 \pmod{p},$$

ve

$$a^p \equiv a \implies (a+1)^p \equiv a+1 \pmod{p},$$

çünkü

$$\begin{aligned}(a+1)^p &\equiv a^p + pa^{p-1} + \binom{p}{2}a^{p-2} + \dots + \binom{p}{p-2}a^2 + pa + 1\\ &\equiv a^p + 1 \pmod{p}\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak Fermat'nın Teoremi doğrudur, yani her p asal sayısı için, her a tamsayısı için

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

olur.** Aynı sebeple tüm a, b, c, ve d tamsayıları için, her pozitif n sayısı için

$$a \equiv b \ \&\ c \equiv d \implies a + c \equiv b + d \ \&\ a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{n}$$

olur.

Sadece tümevarımı kullanarak $(x, y) \mapsto x^y$ ikili üstel işlemi tanımlanabilir mi? Özyineli tanım varsa ω kümesindeki her k için

$$k^0 = 1, \qquad \forall x\,(x \in \omega \Rightarrow k^{x'} = k^x \cdot k) \tag{$\|$}$$

olur. Özel olarak $0^0 = 1$, ama $n > 0$ ise $0^n = 0$ olur. Öyleyse $0 \equiv n$ ama $0^0 \not\equiv 0^n \pmod{n}$. Üstel işlem için tümevarım yetmez.††

**Gauss'a [6, ¶50] göre verdiğimiz kanıt, Euler'indir.

††[13] makalesine bakınız.

Teorem 29 (Özyineleme [*Recursion*]). *$\boldsymbol{A}$, bir sınıf olsun, ve $b \in \boldsymbol{A}$ ile $\boldsymbol{F} \colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$ olsun. O zaman ω kümesinden $\boldsymbol{A}$ sınıfına giden*

$$\boldsymbol{G}(0) = b, \qquad\qquad \forall x \left(x \in \omega \Rightarrow \boldsymbol{G}(x') = \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{G}(x)\big)\right)$$

özellikleri olan bir ve tek bir $\boldsymbol{G}$ göndermesi vardır.

Kanıt. Tümevarımla en çok bir $\boldsymbol{G}$ göndermesi vardır. En az biri varsa, bağıntı olarak, $\omega \times \boldsymbol{A}$ çarpımının altsınıfıdır, ve her (ℓ, d) elemanı için,

- ya $(\ell, d) = (0, b)$,
- ya da bir (k, c) elemanı için, $k' = \ell$ ve $\boldsymbol{F}(c) = d$ olur.

Bu özelliği olan *kümeler* vardır, mesela

$$\{(0,b)\}, \quad \big\{(0,b), \big(1, \boldsymbol{F}(b)\big)\big\}, \quad \Big\{(0,b), \big(1, \boldsymbol{F}(b)\big), \Big(2, \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{F}(b)\big)\Big)\Big\}, \quad \dots$$

Özelliği olan kümelerin oluşturduğu sınıf, $\boldsymbol{C}$ olsun. O zaman $\bigcup \boldsymbol{C}$, istediğimiz $\boldsymbol{G}$ göndermesi olacaktır. Bunu göstermek için, tüm Peano Aksiyomları kullanılmalıdır.

Hemen $\{(0,b)\} \in \boldsymbol{C}$, dolayısıyla $(0,b) \in \bigcup \boldsymbol{C}$. Şimdi $(k,c) \in \bigcup \boldsymbol{C}$ varsayılsın. O zaman $\boldsymbol{C}$ sınıfının bir a elemanı için $(k,c) \in a$. O halde $a \cup \{(k', \boldsymbol{F}(c))\} \in \boldsymbol{C}$ olur. Böylece $(k', \boldsymbol{F}(c)) \in \bigcup \boldsymbol{C}$ olur. Tümevarımla her k doğal sayısı için $\boldsymbol{A}$ sınıfının $(k,c) \in \bigcup \boldsymbol{C}$ içerilmesini sağlayan c elemanı vardır, yani

$$\{x \colon \exists y\ (x,y) \in \bigcup \boldsymbol{C}\} = \omega$$

olur. Şimdi

$$\big\{x \colon \forall y\ \forall z\ \big((x,y) \in \bigcup \boldsymbol{C} \land (x,z) \in \bigcup \boldsymbol{C} \Rightarrow y = z)\big)\big\} = \omega$$

eşitliğini kanıtlayacağız. Soldaki küme, a_0 olsun. Eğer $(0,e) \in \bigcup \boldsymbol{C}$ ise, o zaman $\boldsymbol{C}$ sınıfının bir a elemanı için $(0,e) \in a$ olur, dolayısıyla $e = b$ olmalıdır, çünkü 0, ardıl değildir. Öyleyse $0 \in a_0$ olur. Şimdi $k \in a_0$ olsun. Gösterdiğimiz gibi $\boldsymbol{A}$ sınıfının bir c elemanı için $(k,c) \in \bigcup \boldsymbol{C}$ ve $(k', \boldsymbol{F}(c)) \in \bigcup \boldsymbol{C}$ olur. $(k', d) \in \bigcup \boldsymbol{C}$ varsayılsın. O zaman $\boldsymbol{C}$ sınıfının bir a elemanı için $(k', d) \in a$ olur. O halde a kümesinin bir (j, e) elemanı için $j' = k'$ ve $\boldsymbol{F}(e) = d$ olur. Bu durumda $j = k$ olmalıdır. Böylece $(k, e) \in \bigcup \boldsymbol{C}$, dolayısıyla $e = c$ ve $d = \boldsymbol{F}(c)$ olur, çünkü $k \in a_0$ varsayılır. Öyleyse $k' \in a_0$ olur. Tümevarımla $a_0 = \omega$ olur.

Sonuç olarak $\bigcup \boldsymbol{C}$, ω kümesinden $\boldsymbol{A}$ sınıfına giden bir $\boldsymbol{G}$ göndermesidir. $\boldsymbol{C}$ sınıfının tanımından $\boldsymbol{G}$ göndermesinin istediğimiz özellikleri vardır. $\square$

Şimdi, doğal sayılarda, (§), (¶), ve (‖) satırlarındaki bütün tanımlar geçerlidir.

4 Ordinaller

4.1 Özyineleme

Doğal sayılarda, bir göndermenin özyineli tanımının iki tane parçası vardır, biri 0 için, biri ardıllar için. Ordinallerde üçüncü bir parça gerekir, limitler için.

Tüm α ordinalleri için

$$\alpha + 0 = \alpha, \qquad \alpha + \beta' = (\alpha + \beta)' \tag{$*$}$$

olacak. Ama β limitse, $\alpha + \beta$ nedir? Mesela $\alpha + \omega$ nedir? Aslında 29 numaralı teoreme göre ω kümesinden **ON** sınıfına giden, ($*$) satırındaki özellikleri olan $x \mapsto \alpha + x$ göndermesi vardır. Her n doğal sayı için,

$$\alpha + n < \alpha + \omega$$

eşitsizliğini isteriz. Yani $\alpha + \omega$, $\{y\colon \exists x\ (x \in \omega \land y = \alpha + x)\}$ sınıfının üst sınırı olmalıdır (sınıfın üst sınırı varsa). Bu sınıf, $\{\alpha + x\colon x \in \omega\}$ olarak yazılabilir.

Genelde $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ ve $\boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{A}$ ise

$$\{y\colon \exists x\ (x \in \boldsymbol{C} \land \boldsymbol{F}(x) = y)\}$$

sınıfı,

$$\{\boldsymbol{F}(x)\colon x \in \boldsymbol{C}\}, \qquad \boldsymbol{F}[\boldsymbol{C}]$$

ifadelerinin biri olarak yazılabilir. Bu sınıf, $\boldsymbol{C}$ sınıfının $\boldsymbol{F}$ altında **görüntüsüdür.** Bu durumda, $\boldsymbol{F}$ göndermesi $\boldsymbol{C}$ sınıfında **tanımlanır,** çünkü $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{F}$ göndermesinin tanım sınıfı tarafından kapsanır. Eğer $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{C}$ sınıfında tanımlanmazsa, $\boldsymbol{F}[\boldsymbol{C}]$ ifadesini yazmayacağız.

ω kümesinin $\{\alpha + x\colon x \in \omega\}$ görüntüsünün üst sınırı varsa, en küçük üst sınırı, yani *supremumu,* vardır (çünkü **ON**, iyi sıralanır). Şimdi $(*)$ satırındaki özelliklere göre

$$\alpha \subseteq \alpha + 1 \subseteq \alpha + 2 \subseteq \cdots$$

Eğer $\bigcup\{\alpha + x\colon x \in \omega\}$ bir ordinalse, $\{\alpha + x\colon x \in \omega\}$ kümesinin üst sınırıdır, aslında supremumudur.

Teorem 30. *Elemanları ordinal olan her sınıfın bileşimi, ya bir ordinal, ya da ordinallerin sınıfıdır.*

Kanıt. $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbf{ON}$ olsun. $b \in \bigcup \boldsymbol{A}$ ise, $\boldsymbol{A}$ sınıfının bir α elemanı için $b \in \alpha$, dolayısıyla $b \subseteq \alpha$ ve onun için $b \subseteq \bigcup \boldsymbol{A}$. Öyleyse $\bigcup \boldsymbol{A}$ geçişlidir. Ayrıca, **ON** sınıfı da geçişli olduğundan, $\bigcup \boldsymbol{A} \subseteq \mathbf{ON}$ olur, dolayısıyla $\bigcup \boldsymbol{A}$, $\in$ tarafından iyi sıralanır. Öyleyse $\bigcup \boldsymbol{A}$ ya bir ordinaldir, ya da küme olmayan bir sınıftır. İkinci durumda $\bigcup \boldsymbol{A}$ bileşiminin **ON** olduğunu göstereceğiz. Eğer $\bigcup \boldsymbol{A} \subset \mathbf{ON}$ ise $\beta \in \mathbf{ON} \smallsetminus \bigcup \boldsymbol{A}$ olsun. O zaman $\bigcup \boldsymbol{A} \subseteq \beta$, çünkü $\bigcup \boldsymbol{A}$ geçişlidir (eğer $\gamma \in \bigcup \boldsymbol{A}$ ise $\gamma \subseteq \bigcup \boldsymbol{A}$, dolayısıyla $\beta \notin \gamma$ ve $\gamma \leqslant \beta$). Bu durumda $\bigcup \boldsymbol{A}$, bir kümedir, dolayısıyla ordinaldir. □

Sonuç olarak, eğer $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbf{ON}$ ve $\bigcup \boldsymbol{A}$ bir kümeyse, o zaman bir ordinaldir; değilse, **ON** sınıfıdır. Şimdi $\boldsymbol{A}$ bir kümeyse, $\bigcup \boldsymbol{A}$ bileşiminin bir küme olduğunu isteriz:

AKSİYOM 6 (Bileşim)**.** *Her kümenin bileşimi, bir kümedir:*

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ \big(z \in y \Leftrightarrow \exists w\ (w \in x \land z \in w)\big).$$

Teorem 31. *Ordinallerin oluşturduğu her kümenin bileşimi, kümenin supremumudur.*

Kanıt. $a \subseteq \mathbf{ON}$ olsun. Son teorem ve Bileşim Aksiyomuna göre $\bigcup a$, bir α ordinalidir. O zaman α, a kümesinin bir üst sınırıdır. Eğer $\beta < \alpha$ ise, o zaman $\beta \in \alpha$, dolayısıyla a kümesinin bir γ elemanı için $\beta \in \gamma$, yani $\beta < \gamma$. Sonuç olarak β, a kümesinin üst sınırı değildir. Öyleyse $\alpha = \sup(a)$. □

Şimdi $\{\alpha + x\colon x \in \omega\}$ gibi görüntüler, küme olsun:

AKSİYOM 7 (Yerleştirme)**.** *Her göndermenin tanım sınıfının altkümesinin gönderme altında görüntüsü, bir kümedir. Yani her ikili $\varphi(x,y)$ formülü için*

$$\forall w\ \Bigl(\forall x\ \forall y\ \forall z\ \bigl(\varphi(x,y)\land\varphi(x,z)\land x\in w\Rightarrow y=z\bigr)\\ \Rightarrow \exists z\ \forall y\ \Bigl(y\in z\Leftrightarrow\exists x\ \bigl(x\in w\land\varphi(x,y)\bigr)\Bigr)\Bigr).$$

Şimdi β ordinalinde $x\mapsto\alpha+x$ göndermesi tanımlanırsa $\{\alpha+x\colon x\in\beta\}$ görüntüsü, bir kümedir. β limitse

$$\alpha+\beta=\sup\{\alpha+\gamma\colon\gamma<\beta\}\tag{†}$$

olsun. Bu şart, $(*)$ satırındaki şartlarla, **ON** sınıfında $x\mapsto\alpha+x$ işlemesini tanımlayacaktır.

Teorem 32 (Tümevarım)**.** *$\boldsymbol{A}\subseteq\mathbf{ON}$ olsun. Eğer*

1) $0\in\boldsymbol{A}$,
2) *her α için* $\alpha\in\boldsymbol{A}\Rightarrow\alpha'\in\boldsymbol{A}$,
3) *her α limiti için* $\alpha\subseteq\boldsymbol{A}\Rightarrow\alpha\in\boldsymbol{A}$

ise, o zaman $\boldsymbol{A}=\mathbf{ON}$ olur.

Kanıt. Hipotez altında $\mathbf{ON}\setminus\boldsymbol{A}$ farkının en küçük elemanı olamaz. □

Eğer $\boldsymbol{F}\colon\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$ ve $\boldsymbol{C}\subseteq\boldsymbol{A}$ ise

$$\boldsymbol{F}\cap(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{F}\restriction\boldsymbol{C}$$

olsun. Bu $\boldsymbol{F}\restriction\boldsymbol{C}$ göndermesi, $\boldsymbol{F}$ göndermesinin $\boldsymbol{C}$ sınıfına **sınırlamasıdır** (*restriction*).

Teorem 33 (Özyineleme [*Recursion*])**.** *$\boldsymbol{A}$, bir sınıf olsun, ve $b\in\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{F}\colon\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}$, ve $\boldsymbol{G}\colon\mathscr{P}(\boldsymbol{A})\to\boldsymbol{A}$ olsun. O zaman* **ON** *sınıfından $\boldsymbol{A}$ sınıfına giden*

$$\boldsymbol{H}(0)=b,$$
$$\boldsymbol{H}(\alpha')=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{H}(\alpha)),$$
$$\alpha\text{ limit ise }\boldsymbol{H}(\alpha)=\boldsymbol{G}\bigl(\{\boldsymbol{H}(\beta)\colon\beta<\alpha\}\bigr)$$

özellikleri olan bir ve tek bir $\boldsymbol{H}$ *göndermesi vardır.*

Kanıt. Tümevarımla en çok bir $\boldsymbol{H}$ göndermesi vardır. Çünkü $\boldsymbol{H}_1$ göndermesinin ve $\boldsymbol{H}$ göndermesinin özellikleri aynı olsun. O zaman

1) $\boldsymbol{H}_1(0) = b = \boldsymbol{H}(0)$;
2) $\boldsymbol{H}_1(\alpha) = \boldsymbol{H}(\alpha)$ ise

$$\boldsymbol{H}_1(\alpha') = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{H}_1(\alpha)) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{H}(\alpha)) = \boldsymbol{H}(\alpha');$$

3) α limit ise ve $\boldsymbol{H}_1 \restriction \alpha = \boldsymbol{H} \restriction \alpha$ ise

$$\boldsymbol{H}_1(\alpha) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{H}_1[\alpha]) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{H}[\alpha]) = \boldsymbol{H}(\alpha).$$

29 numaralı teoremin kanıtındaki gibi bir $\boldsymbol{C}$ sınıfı için $\boldsymbol{H} = \bigcup \boldsymbol{C}$ olacaktır. Bu sınıfın tanımına göre her a elemanı için $a \subseteq \mathbf{ON} \times \boldsymbol{A}$ olur, ve a kümesinin her (α, d) elemanı için,

- ya $(\alpha, d) = (0, b)$,
- ya da bir (β, c) elemanı için, $\beta' = \alpha$ ve $\boldsymbol{F}(c) = d$ olur,
- ya da α limit, ve $a \cap (\alpha \times \boldsymbol{A})$ kesişimi, tanım kümesi α olan bir f göndermesi, ve $\boldsymbol{G}(f[\alpha]) = d$ olur.

Eğer $\bigcup \boldsymbol{C}$ bileşimi, tanım sınıfı $\mathbf{ON}$ olan bir gönderme değilse, bir *en küçük* α için

$$\{x : x \in \boldsymbol{A} \wedge (\alpha, x) \in \bigcup \boldsymbol{C}\}$$

sınıfının ya hiç elemanı yoktur ya da en az iki elemanı vardır. O zaman $\alpha \neq 0$ olur. Eğer $\alpha = \beta'$ ise, o zaman bir c için $(\beta, c) \in \bigcup \boldsymbol{C}$ olur, dolayısıyla $(\alpha, \boldsymbol{F}(c)) \in \bigcup \boldsymbol{C}$ olur. Bu durumda eğer $(\alpha, d) \in \bigcup \boldsymbol{C}$ ise bir e için $d = \boldsymbol{F}(e)$ ve $(\beta, e) \in \bigcup \boldsymbol{C}$, dolayısıyla $c = e$ ve $d = \boldsymbol{F}(c)$ olur (çünkü α en küçüktür). Öyleyse α ardıl olamaz. Benzer şekilde α limit olamaz. Sonuç olarak $\bigcup \boldsymbol{C}$ bileşimi, tanım sınıfı $\mathbf{ON}$ olan bir gönderme olmalıdır. Bu göndermenin, tanımından dolayı istediğimiz özellikleri vardır. $\square$

4.2 Toplama

Son teoreme göre her α için $(*)$ ve $(\dagger)$ satırlarındaki koşullar **ON** sınıfında $x \mapsto \alpha + x$ işlemini tanımlar. Yani

$$\begin{gathered}\alpha + 0 = \alpha,\\ \alpha + \beta' = (\alpha + \beta)',\\ \beta \text{ limit} \Rightarrow \alpha + \beta = \sup\{\alpha + \gamma \colon \gamma < \beta\}.\end{gathered}$$

Özel olarak
$$\alpha + 1 = \alpha'.$$
O zaman
$$1 + \omega = \sup\{1 + x \colon x \in \omega\} = \omega < \omega + 1,$$
ve genelde $0 < n < \omega$ ise

$$n + \omega = \omega < \omega + n.$$

Böylece **ON** sınıfında toplama değişmeli değildir.

Teorem 34. *$\beta < \gamma$ ise $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$.*

Kanıt. γ üzerinden tümevarım kullanacağız.

1. $\gamma = 0$ ise, iddia doğrudur, çünkü hiçbir zaman $\beta < 0$ değildir.

2. $\gamma = \delta$ durumda iddianın doğru olduğu varsayılsın. Eğer $\beta < \delta'$ ise, o zaman $\beta \leqslant \delta$, dolayısıyla

$$\alpha + \beta \leqslant \alpha + \delta < (\alpha + \delta)' = \alpha + \delta'.$$

3. δ limit ve $\gamma < \delta$ durumunda iddia doğru ve $\beta < \delta$ ise, o zaman $\beta < \beta' < \delta$, dolayısıyla

$$\alpha + \beta < \alpha + \beta' \leqslant \sup_{\gamma < \delta}(\alpha + \gamma) = \alpha + \delta. \qquad \square$$

Teorem 35. *$\beta \leqslant \gamma$ ise $\beta + \alpha \leqslant \gamma + \alpha$.*

Kanıt. Şimdi α üzerinden tümevarım kullanacağız. $\beta \leqslant \gamma$ olsun.

1. $\beta + 0 = \beta \leqslant \gamma = \gamma + 0$.

2. $\beta + \alpha = \gamma + \alpha$ ise tabii ki

$$\beta + \alpha' = (\beta + \alpha)' = (\gamma + \alpha)' = \gamma + \alpha'.$$

$\beta + \alpha < \gamma + \alpha$ ise, 27 numaralı teoreme göre

$$\beta + \alpha' = (\beta + \alpha)' \leqslant \gamma + \alpha < (\gamma + \alpha)' = \gamma + \alpha'.$$

3. δ limit olsun, ve $\alpha < \delta$ ise, $\beta + \alpha \leqslant \gamma + \alpha$ olsun. O zaman

$$\beta + \delta = \sup_{\alpha<\gamma}(\beta + \alpha) \leqslant \sup_{\alpha<\gamma}(\gamma + \alpha) = \gamma + \delta. \qquad \square$$

Gördüğümüz gibi aynı zamanda $\beta < \gamma$ ama $\beta+\alpha = \gamma+\alpha$ olabilir, mesela $0 < k < \ell < \omega$ ise $k + \omega = \ell + \omega$.

Teorem 36. *Her α için $0 + \alpha = \alpha$.*

Alıştırma 18. Teoremi kanıtlayınız.

Teorem 37. *$\alpha \leqslant \beta$ ise*

$$\alpha + x = \beta$$

denkleminin bir ve tek bir ordinal çözümü vardır.

Kanıt. 34 numaralı teoreme göre denklemin en çok bir çözümü vardır. 35 ve 36 numaralı teoremlere göre

$$\alpha + \beta \geqslant 0 + \beta = \beta,$$

dolayısıyla $\{\gamma\colon \beta \leqslant \alpha + \gamma\}$ boş değildir (çünkü β elemanını içerir). En küçük elemanı, δ olsun. Üç durum vardır.

1. $\delta = 0$ ise

$$\beta \leqslant \alpha + 0 = \alpha,$$

dolayısıyla $\beta = \alpha = \alpha + 0$ (çünkü $\alpha \leqslant \beta$ da sağlanır).

2. $\delta = \gamma'$ ise $\alpha + \gamma < \beta$, dolayısıyla

$$\alpha + \delta = (\alpha + \gamma)' \leqslant \beta,$$
$$\alpha + \delta = \beta$$

olur (çünkü $\alpha + \delta \geqslant \beta$ da sağlanır).

3. δ limit olsun. Eğer $\gamma < \delta$ ise $\alpha + \gamma < \beta$ olmalıdır. O zaman

$$\alpha + \delta = \sup_{\gamma<\delta}(\alpha + \gamma) \leqslant \beta,$$
$$\alpha + \delta = \beta. \qquad \square$$

Teorem 38. *β limitse $\alpha + \beta$ toplamı da limittir.*

Alıştırma 19. Teoremi kanıtlayınız.

Teorem 39. *Tüm α, β, ve γ için*

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma.$$

Kanıt. γ üzerinden tümevarım kullanacağız.

1. $\alpha + (\beta + 0) = \alpha + \beta = (\alpha + \beta) + 0$ olur.

2. $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ ise

$$\begin{aligned}\alpha + (\beta + \gamma') = \alpha + (\beta + \gamma)' &= (\alpha + (\beta + \gamma))' \\ &= ((\alpha + \beta) + \gamma)' = (\alpha + \beta) + \gamma'.\end{aligned}$$

3. δ limit olsun, ve $\gamma < \delta$ ise $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ olsun. Ama $\gamma < \delta$ ise

$$\beta + \gamma < \beta + \delta, \qquad \alpha + (\beta + \gamma) < \alpha + (\beta + \delta).$$

Öyleyse

$$(\alpha + \beta) + \delta = \sup_{\gamma<\delta}((\alpha + \beta) + \gamma) = \sup_{\gamma<\delta}(\alpha + (\beta + \gamma)) \leqslant \alpha + (\beta + \delta).$$

Ayrıca, 38 numaralı teoreme göre $\beta + \delta$ limit olduğundan

$$\alpha + (\beta + \delta) = \sup_{\zeta<\beta+\delta}(\alpha + \zeta).$$

Dahası $\zeta < \beta + \delta$ ise, bir γ için $\gamma < \delta$ ve $\zeta < \beta + \gamma$ olur (çünkü $\beta + \delta = \sup\{\beta + \gamma \colon \gamma < \delta\}$). O halde

$$\sup_{\zeta < \beta + \delta} (\alpha + \zeta) \leqslant \sup_{\gamma < \delta}(\alpha + (\beta + \gamma)) = (\alpha + \beta) + \delta.$$

Sonuç olarak $\alpha + (\beta + \delta) = (\alpha + \beta) + \delta$. □

Aslında son teoremin kanıtı, genel bir yöntemin örneğidir. **ON** sınıfında $x \mapsto \alpha + x$ işlemi,

1) $\beta < \gamma \Rightarrow \boldsymbol{F}(\beta) < \boldsymbol{F}(\gamma)$,
2) γ limitse $\boldsymbol{F}(\gamma) = \sup\{\boldsymbol{F}(\beta) \colon \beta < \gamma\}$

koşullarını sağlayan bir $\boldsymbol{F}$ işlemidir. Bu tip herhangi bir işlemeye **normal** (*normal*) denir. İlk koşula göre $\boldsymbol{F}$, **kesin artan** (*strictly increasing*) bir göndermedir. O zaman ikinci koşula göre $\boldsymbol{F}$, **süreklidir** (*continuous*).

Teorem 40. *Eğer* $0 \subset a \subset$ **ON** *ve* $\sup(a) \notin a$*, o zaman* $\sup(a)$*, bir limittir.*

Alıştırma 20. Teoremi kanıtlayınız.

Teorem 41. *$\boldsymbol{F}$,* **ON** *sınıfında normal bir işlem olsun. Tüm boş olmayan ordinallerin oluşturduğu a kümeleri için*

$$\boldsymbol{F}(\sup(a)) = \sup(\boldsymbol{F}[a]),$$

yani

$$\boldsymbol{F}(\sup_{x \in a} x) = \sup_{x \in a} \boldsymbol{F}(x).$$

Kanıt. $\sup(a) = \beta$ olsun. Eğer $\beta \in a$ ise, $\boldsymbol{F}$ işlemi artan olduğundan

$$\boldsymbol{F}(\beta) = \sup_{\gamma \in a} \boldsymbol{F}(\gamma).$$

Şimdi $\beta \notin a$ olsun. Son teoreme göre β bir limit olmalıdır. Ayrıca $a \subseteq \beta$, dolayısıyla

$$\sup(\boldsymbol{F}[a]) \leqslant \sup(\boldsymbol{F}[\beta]) = \boldsymbol{F}(\beta)$$

(çünkü $\boldsymbol{F}$ süreklidir). Dahası $\alpha < \beta$ ise, a kümesinin bir γ elemanı için $\alpha < \gamma$, dolayısıyla

$$\boldsymbol{F}(\beta) = \sup(\boldsymbol{F}[\beta]) \leqslant \sup(\boldsymbol{F}[a])$$

(yine $\boldsymbol{F}$ sürekli olduğu için). □

Bu teoremde $a = 0$ ise $\sup(\boldsymbol{F}[a]) = \sup(0) = 0$, ama $\boldsymbol{F}$ normal olunca, $\boldsymbol{F}(0) > 0$ olabilir.

Bir δ limiti için, eğer

$$\gamma < \delta \Rightarrow \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

ise, o zaman teoreme göre

$$\begin{aligned}\alpha + (\beta + \delta) &= \alpha + \sup_{\gamma<\delta}(\beta + \gamma)\\ &= \sup_{\gamma<\delta}(\alpha + (\beta + \gamma)) = \sup_{\gamma<\delta}((\alpha + \beta) + \gamma) = (\alpha + \beta) + \delta,\end{aligned}$$

çünkü $x \mapsto \alpha + x$, normaldir.

4.3 Çarpma

Her α için **ON** sınıfında $x \mapsto \alpha \cdot x$ işlemi,

$$\alpha \cdot 0 = 0,$$
$$\alpha \cdot \beta' = \alpha \cdot \beta + \alpha,$$
$$\gamma \text{ limit} \Rightarrow \alpha \cdot \gamma = \sup\{\alpha \cdot \beta \colon \beta < \gamma\}$$

şartları sağlar. Özel olarak

$$\alpha \cdot 1 = \alpha.$$

Örneğin

$$\omega \cdot 2 = \omega \cdot 1 + \omega = \omega + \omega = \sup_{n<\omega}(\omega + n),$$
$$2 \cdot \omega = \sup_{n<\omega}(2 \cdot n) = \omega,$$

dolayısıyla

$$2 \cdot \omega < \omega \cdot 2.$$

Teorem 42. $0 \cdot \alpha = 0$ *ve* $1 \cdot \alpha = \alpha$.

Alıştırma 21. Teoremi kanıtlayınız.

$\alpha \geqslant 1$ ise, $x \mapsto \alpha \cdot x$ işleminin normal olduğunu kanıtlayacağız. Bu işlem kesin artan ise, tanımdan dolayı süreklidir, dolayısıyla normaldir. O zaman 34 numaralı teorem gibi bir teorem yeterli olacaktır, çünkü 34 numaralı teorem, genel bir yöntem gösterir:

Teorem 43. *Eğer* $\boldsymbol{F}\colon \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$, *ve tüm* α *için*

$$\boldsymbol{F}(\alpha) < \boldsymbol{F}(\alpha'),$$

ve limit olan tüm β *için*

$$\boldsymbol{F}(\beta) = \sup_{\alpha<\beta} \boldsymbol{F}(\alpha)$$

ise, o zaman $\boldsymbol{F}$ *normaldir.*

Alıştırma 22. Teoremi kanıtlayınız.

Teorem 44. $\alpha \geqslant 1$ *ise* $x \mapsto \alpha \cdot x$ *işlemi, normaldir.*

Alıştırma 23. Teoremi kanıtlayınız.

Teorem 45. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

Kanıt. $\gamma = 0$ durumunda kanıt kolaydır. $\gamma = \delta$ durumunda iddia doğruysa

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot (\beta + \delta') &= \alpha \cdot (\beta + \delta)' \\
&= \alpha \cdot (\beta + \delta) + \alpha \\
&= (\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta) + \alpha \\
&= \alpha \cdot \beta + (\alpha \cdot \delta + \alpha) \\
&= \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta';
\end{aligned}$$

böylece $\gamma = \delta'$ durumunda iddia doğrudur. Son olarak δ limit, ve $\gamma < \delta$ durumunda iddia doğru olsun. $\gamma = \delta$ durumunu kanıtlayacağız. $\alpha = 0$ ise iddia kolaydır. $\alpha \geqslant 1$ olsun. O zaman $x \mapsto \alpha \cdot x$ ve $x \mapsto \alpha \cdot \beta + x$ işlemleri normal olduğundan

$$\begin{aligned}\alpha \cdot (\beta + \delta) &= \alpha \cdot \sup_{\gamma<\delta}(\beta + \gamma) \\ &= \sup_{\gamma<\delta}(\alpha \cdot (\beta + \gamma)) \\ &= \sup_{\gamma<\delta}(\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma) \\ &= \alpha \cdot \beta + \sup_{\gamma<\delta} \alpha \cdot \gamma \\ &= \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta.\end{aligned}$$ □

Gördüğümüz gibi $2 \cdot \omega < \omega + \omega$, dolayısıyla

$$(1 + 1) \cdot \omega < 1 \cdot \omega + 1 \cdot \omega.$$

Teorem 46. $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$.

Alıştırma 24. Teoremi kanıtlayınız.

Teorem 47. $\beta \leqslant \gamma$ *ise* $\beta \cdot \alpha \leqslant \gamma \cdot \alpha$.

Alıştırma 25. Teoremi kanıtlayınız.

Teorem 48. $1 \leqslant \alpha$ *ise*

$$\alpha \cdot x + y = \beta$$

denkleminin $y < \alpha$ *koşulunu sağlayan bir ve tek bir çözümü vardır.*

Kanıt. $\alpha \cdot \beta \geqslant 1 \cdot \beta = \beta$ ve $x \mapsto \alpha \cdot x$ artan olduğundan

$$\{x \colon x \in \mathbf{ON} \wedge \alpha \cdot x \leqslant \beta\} \subseteq \beta,$$

dolayısıyla $\bigcup\{x \colon x \in \mathbf{ON} \wedge \alpha \cdot x \leqslant \beta\}$, bir γ ordinalidir. Böylece

$$\gamma = \sup\{x \colon x \in \mathbf{ON} \wedge \alpha \cdot x \leqslant \beta\}.$$

Eğer $\gamma \in \{x \colon x \in \mathbf{ON} \wedge \alpha \cdot x \leqslant \beta\}$ ise $\alpha \cdot \gamma \leqslant \beta$. Değilse γ limit olmalıdır, dolayısıyla

$$\alpha \cdot \gamma = \sup_{\zeta<\gamma}(\alpha \cdot \zeta) \leqslant \beta.$$

Şimdi $\alpha \cdot \gamma + y = \beta$ denkleminin δ çözümü vardır. . . □

5 Kardinaller

5.1 Eşleniklik

Şimdi $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ olsun. Eğer $\boldsymbol{F}$ bağıntısının ters bağıntısı, $\boldsymbol{B}$ sınıfından $\boldsymbol{A}$ sınıfına giden bir göndermeyse, o zaman bu gönderme, $\boldsymbol{F}$ göndermesinin **ters göndermesi** veya **tersidir** (*inverse*), ve $\boldsymbol{F}$ göndermesi, $\boldsymbol{A}$ sınıfından $\boldsymbol{B}$ sınıfına giden bir **eşlemedir** (*bijection*), ve $\boldsymbol{A}$ ile $\boldsymbol{B}$ sınıflarının kendileri, **eşleniktir** (*equipollent*). Aslında bir sınıf, bir *kümeyle* eşlenikse, o zaman sınıf ve eşleme de kümedir.

Teorem 49. *Bir sınıf, bir kümeyle eşlenikse, sınıf da bir kümedir.*

Alıştırma 26. Teoremi kanıtlayınız.

Teorem 50. *Tanım sınıfı bir küme olan her gönderme bir kümedir.*

Alıştırma 27. Teoremi kanıtlayınız.

Alıştırma 28. $\boldsymbol{F}$ bir gönderme olsun.

(a) Ayırma Aksiyomunu kullanmadan her a kümesi için $\{y\colon \exists x\ (x \in a \land x\ \boldsymbol{F}\ y)\}$ sınıfının bir küme olduğunu kanıtlayınız.
(b) Bu sonucu kullanarak Yerleştirme ve Ayırma Aksiyomlarını kanıtlayınız.

49 ve 50 numaralı teoremler sayesinde kümelerin eşlenikliği, bir ikili bağıntıdır. Bu bağıntının işareti

$$\approx$$

olsun. (O zaman $=$ gibi $\approx$, yeni bir yüklemdir.) Aslında eşitlik gibi eşleniklik de, bir denklik bağıntısıdır (22 numaralı sayfaya bakınız):

Teorem 51. *Tüm a, b, ve c kümeleri için*

$$a \approx a, \qquad a \approx b \Rightarrow b \approx a, \qquad a \approx b \land b \approx c \Rightarrow a \approx c$$

cümleleri doğrudur.

Alıştırma 29. Teoremi kanıtlayınız.

Birkaç tane von Neumann doğal sayısının tanımını, 5 numaralı sayfadan hatırlayalım:

$$0 = \varnothing, \quad 1 = \{0\}, \quad 2 = \{0, 1\}, \quad 3 = \{0, 1, 2\}, \quad 4 = \{0, 1, 2, 3\}.$$

Bir a kümesinin

1) hiçbir elemanı yoksa, o zaman $a \approx 0$; aslında $a = 0$;
2) tek bir elemanı varsa, o zaman $a \approx 1$;
3) iki (ve sadece iki) elemanı varsa, o zaman $a \approx 2$;
4) üç (ve sadece üç) elemanı varsa, o zaman $a \approx 3$.

Ayrıca

$$0 \not\approx 1, \qquad 0 \not\approx 2, \qquad 0 \not\approx 3, \qquad 1 \not\approx 2, \qquad 1 \not\approx 3, \qquad 2 \not\approx 3.$$

Ancak herhangi iki eşlenik doğal sayı eşit olmalı mı?

Teorem 52. *Her doğal sayı, ya* 0 *ya bir doğal sayının ardıldır.*

Alıştırma 30. Teoremi kanıtlayınız.

Teorem 53. $\forall x\ \forall y\ (x \in \omega \land y \in \omega \land x \neq y \Rightarrow x \not\approx y)$.

Kanıt. Tümevarımla her n doğal sayısı için

$$\forall x\ (x \in \omega \land x \neq n \Rightarrow x \not\approx n)$$

cümlesini kanıtlayacağız. $n = 0$ ise doğrudur. $n = m$ ise doğru olsun, ve bir ℓ doğal sayısı için $m' \approx \ell$ olsun. O zaman ℓ boş değil. Son teoreme göre ℓ bir halef olmalı. $\ell = k'$ olsun. m' sayısından k' sayısına giden bir f eşlemesi vardır. Eğer $f(m) = k$, o zaman $f \smallsetminus \{(m, k)\}$, m sayısından k sayısına giden bir eşlemedir. Eğer $f(m) \neq k$, o zaman

$$\big\{(x, y) \colon x \in m \smallsetminus \{\breve{f}(k)\} \land y = f(x)\big\} \cup \big\{(\breve{f}(k), f(m))\big\}$$

bağıntısı, m sayısından k sayısına giden bir eşlemedir. Öyleyse her durumda $m \approx k$ olur. Hipotezimize göre $m = k$ olmalı, dolayısıyla $m' = \ell$ olur. Kanıt bitti. □

5.2 Büyüklük

Şimdi $\boldsymbol{F}$, tanım kümesi $\boldsymbol{A}$ olan bir gönderme olsun. Eğer

$$\forall x\ \forall y\ (x \in \boldsymbol{A} \wedge y \in \boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{F}(x) = \boldsymbol{F}(y) \Rightarrow x = y)$$

ise, o zaman $\boldsymbol{F}$ bir **birebir** (*one-to-one*) veya **injektif** (*injective*) göndermedir. O halde

$$\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{A} \rightarrowtail \boldsymbol{B}$$

ifadesini yazarız. Eğer bir a kümesinden bir b kümesine giden bir injektif gönderme varsa

$$a \preccurlyeq b$$

ifadesini yazarız. Öyleyse $\preccurlyeq$, bir bağıntıdır.

Teorem 54. *Tüm a, b, ve c kümeleri için*

$$a \preccurlyeq a, \qquad a \preccurlyeq b \wedge b \preccurlyeq c \Rightarrow a \preccurlyeq c$$

cümleleri doğrudur.

Alıştırma 31. Teoremi kanıtlayınız.

Bir tane bağıntı daha vardır:

$$a \prec b \text{ denktir } a \preccurlyeq b \wedge a \not\approx b.$$

O zaman son teoremin özel durumu vardır:

$$a \prec b \wedge b \prec c \Rightarrow a \preccurlyeq c.$$

Ama $a \prec b \wedge b \prec c$ ise $a \prec c$ sonuçlanabilir mi?

Eğer $\boldsymbol{R}$ ve $\boldsymbol{S}$, iki bağıntıysa, o zaman tanıma göre

$$\boldsymbol{R}/\boldsymbol{S} = \{(x, z)\colon \exists y\ (x\ \boldsymbol{R}\ y \wedge y\ \boldsymbol{S}\ z)\}$$

olur.

Teorem 55. *Eğer $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ ve $\boldsymbol{G}\colon \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$ ise, o zaman*

$$\boldsymbol{F}/\boldsymbol{G}\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{C}, \qquad \forall x\ \big(x \in \boldsymbol{A} \Rightarrow (\boldsymbol{F}/\boldsymbol{G})(x) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{F}(x))\big)$$

olur.

Alıştırma 32. Teoremi kanıtlayınız.

Teorem 56 (Schröder–Bernstein). *Tüm a ve b kümeleri için*

$$a \preccurlyeq b \land b \preccurlyeq a \Rightarrow a \approx b.$$

Kanıt (Zermelo [21]). $f \colon a \rightarrowtail b$ ve $g \colon b \rightarrowtail a$ olsun. Bu durumda

$$(f/g)[a] \subseteq g[b] \subseteq a, \qquad\qquad g[b] \approx b$$

olur. Biz $a \approx g[b]$ eşlenikliğini kanıtlayacağız. Sonuç olarak $c \approx b$ olacak.

a kümesinden $g[b]$ kümesine giden bir h eşlemesini tanımlayabilirsek, herhalde a kümesinin bir c altkümesi için

$$h = \{(x, x) \colon x \in c\} \cup \{(x, (f/g)(x)) \colon x \in a \smallsetminus c\} \tag{$*$}$$

olacak. O halde, çünkü $h[a] = g[b]$ olacak,

$$c \cup (f/g)[a \smallsetminus c] = g[b] \tag{$\dagger$}$$

olmalı. Çünkü h birebir olacak,

$$c \cap (f/g)[a \smallsetminus c] = \varnothing \tag{$\ddagger$}$$

olmalı. O zaman

$$c = g[b] \smallsetminus (f/g)[a \smallsetminus c]$$

olur. Çünkü f/g birebirdir,

$$(f/g)[a \smallsetminus c] = (f/g)[a] \smallsetminus (f/g)[c],$$

dolayısıyla

$$c = g[b] \smallsetminus \big((f/g)[a] \smallsetminus (f/g)[c]\big)$$

olur. Çünkü $(f/g)[c] \subseteq (f/g)[a] \subseteq g[b]$,

$$c = \big(g[b] \smallsetminus (f/g)[a]\big) \cup (f/g)[c] \tag{§}$$

olur. Ters olarak, eğer c, (§) satırındaki gibiyse, o zaman (†) ile (‡) satırları doğrudur, ve sonuç olarak, çünkü f/g birebirdir, ($*$) satırındaki gibi h göndermesi, a kümesinden $g[b]$ kümesine giden bir eşlemedir.

Şimdi öyle bir c kümesini bulmalıyız. O zaman

$$\boldsymbol{A} = \bigl\{x\colon \bigl(g[b] \smallsetminus (f/g)[a]\bigr) \cup (f/g)[x] \subseteq x \subseteq a\bigr\}$$

olsun. Bu durumda $a \in \boldsymbol{A}$, dolayısıyla $\bigcap \boldsymbol{A}$ bir küme olmalı. Bu küme c olsun. O zaman (§) satırı doğrudur. Nitekim $c \in \boldsymbol{A}$ olmalı (neden?). Eğer (§) satırı yanlış ise, o zaman

$$d \in c \smallsetminus \Bigl(\bigl(g[b] \smallsetminus (f/g)[a]\bigr) \cup (f/g)[c]\Bigr)$$

cümlesini sağlayan bir d vardır. Bu durumda

$$c \smallsetminus \{d\} \in \boldsymbol{A}, \qquad \bigcap \boldsymbol{A} \subseteq c \smallsetminus \{d\}, \qquad c \subseteq c \smallsetminus \{d\}, \qquad d \notin c$$

olur. Bu bir çelişkidir. O zaman (§) satırı doğru olmalı, ve $a \approx g[b]$, dolayısıyla $a \approx b$. □

AKSİYOM 8 (Kuvvet Kümesi)**.** *Her kümenin kuvvet sınıfı, bir kümedir, yani*

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ \bigl(z \in y \Leftrightarrow \forall w\ (w \in z \Rightarrow w \in x)\bigr)$$

cümlesi doğrudur.

Teorem 57 (Cantor)**.** *Her a kümesi için*

$$a \prec \mathscr{P}(a).$$

Kanıt. $\bigl\{\bigl(x, \{x\}\bigr) \colon x \in a\bigr\}$ bağıntısının sayesinde $a \preccurlyeq \mathscr{P}(a)$ olur. Şimdi $f\colon a \rightarrowtail \mathscr{P}(a)$ olsun ve

$$b = \{x\colon x \in a \land x \notin f(x)\}$$

olsun. O zaman a kümesinin her c elemanı için

$$c \in b \Leftrightarrow c \notin f(c).$$

Öyleyse $b \neq f(c)$. Dolayısıyla $b \notin f[a]$, ve f, eşleme değildir. O zaman $a \not\approx \mathscr{P}(a)$. □

$\mathbf{V}$ evrensel sınıfını hatırlayın:

$$\mathbf{V} = \{x \colon x = x\}$$

olur. Eğer $\boldsymbol{F}$ bir göndermeyse ve $\boldsymbol{A}$ tanım kümesiyse o zaman

$$\boldsymbol{F} \colon \boldsymbol{A} \to \mathbf{V}$$

olur. O halde her $\boldsymbol{B}$ sınıfı için

$$\{x \colon x \in \boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{F}(x) \in \boldsymbol{B}\}$$

sınıfına $\boldsymbol{B}$ sınıfının $\boldsymbol{F}$ altında **öngörüntüsü** (*pre-image*) denir, ve bu öngörüntü

$$\boldsymbol{F}^{-1}[\boldsymbol{B}]$$

olarak yazılır.

Alıştırma 33. Bir kümenin bir gönderme altında öngörüntüsü bir küme olmalı mı?

Kaynakça

[1] George Boolos. Iteration again (1989). In *Logic, Logic, and Logic*, pages 88–104. Harvard University Press, Cambridge, MA, 1998. With introductions and an afterword by John P. Burgess, With a preface by Burgess and Richard Jeffrey, Edited by Jeffrey.

[2] Cesare Burali-Forti. A question on transfinite numbers (1897). In van Heijenoort [18], pages 104–12.

[3] Georg Cantor. Letter to Dedekind (1899). In van Heijenoort [18], pages 113–7.

[4] Richard Dedekind. *Essays on the theory of numbers. I: Continuity and irrational numbers. II: The nature and meaning of numbers.* authorized translation by Wooster Woodruff Beman. Dover Publications Inc., New York, 1963.

[5] Descartes. *The Geometry of René Descartes.* Dover Publications, Inc., New York, 1954. Translated from the French and Latin by David Eugene Smith and Marcia L. Latham, with a facsimile of the first edition of 1637.

[6] Carl Friedrich Gauss. *Disquisitiones Arithmeticae.* Springer-Verlag, New York, 1986. Translated into English by Arthur A. Clarke, revised by William C. Waterhouse.

[7] Kurt Gödel. On formally undecidable propositions of *principia mathematica* and related systems I (1931). In van Heijenoort [18], pages 596–616.

[8] Casimir Kuratowski. Sur la notion d'ordre dans la théorie des ensembles. *Fundamenta Mathematicae*, pages 161–71, 1921.

[9] Azriel Levy. *Basic set theory.* Dover Publications Inc., Mineola, NY, 2002. Reprint of the 1979 original [Springer, Berlin].

[10] Geoffrey Lewis. *Turkish Grammar*. Oxford University Press, second edition, 2000. First edition 1967.

[11] Ali Nesin. *Sezgisel Kümeler Kuramı*, volume 6 of *Nesin Matematik Köyü Kitaplığı*. Nesin Yayıncılık, İstanbul, 2010.

[12] Giuseppe Peano. The principles of arithmetic, presented by a new method (1889). In van Heijenoort [18], pages 83–97.

[13] David Pierce. Induction and recursion. *The De Morgan Journal*, 2(1):99–125, 2012. `http://education.lms.ac.uk/2012/04/david-pierce-induction-and-recursion/`.

[14] Atilla Özkırımlı. *Türk Dili, Dil ve Anlatım: Yaşayan Türkçe Üzerine Bir Deneme*. İstanbul Bilgi Üniversitesi Yayınları, 2001.

[15] Thoralf Skolem. Some remarks on axiomatized set theory (1922). In van Heijenoort [18], pages 290–301.

[16] Alfred Tarski. The concept of truth in formalized languages (1933). pages 152–278.

[17] Alfred Tarski and Steven Givant. *A formalization of set theory without variables*, volume 41 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1987.

[18] Jean van Heijenoort, editor. *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879–1931*. Harvard University Press, Cambridge, MA, 2002.

[19] John von Neumann. On the introduction of transfinite numbers (1923). In van Heijenoort [18], pages 346–354.

[20] Norbert Wiener. A simplification of the logic of relations (1914). In van Heijenoort [18], pages 224–7.

[21] Ernst Zermelo. Investigations in the foundations of set theory I (1908a). In van Heijenoort [18], pages 199–215.

Dizin

A

aksiyom
- Ayırma A—u, 10, 14, 32
- Bileşim A—u, 14, 47
- Bitiştirme A—u, 4, 14, 29
- Boş Küme A—u, 4, 29
- Eşitlik A—u, 22
- Kuvvet Kümesi A—u, 10, 61
- mantıksal —, 23
- Peano A—ları, Dedekind–Peano A—ları, 34
- Seçim A—u, 9, 14
- Sonsuzluk A—u, 5, 14, 31
- Temel Kümeler A—u, 14
- Temellendirme A—u, 14
- Uzama A—u, 14, 23
- Yerleştirme A—u, 12, 14, 48
- Zermelo–Fraenkel A—ları, 14

altsınıf, 10, 25
ardıl, 30, 37
artan gönderme, 53
ayraç, 16

B

bağlayıcı, 16
bağıntı, 2, 35
- denklik —sı, 12
- ters —, 35

boş
- — küme, 4
- — sınıf, 27

C

Cantor normal biçimi, 7
cümle, 8, 18

Ç

çarpım, 36

D

değer sınıfı, 36
değişken, 16
- bağlantılı, 8
- serbest, 8

denk, 20
- —lik sınıfı, bağıntısı, 12

denklik, 22
doğruluk, 18
doğrusal, 38

E

eleman, 1
eşitlik, 8, 22
eşleme, 9, 57
eşlenik, 9, 57
eşleşme, 2
evrensel sınıf, 8

F

formül, 8, 16

G

geçis, 17
geçişli, 33

gönderme, 36
ardıl —si, 37
birebir —, 59
injektif —, 59
özdeşlik —si, 37
sabit —, 37
ters —, 57
görüntü, 46

I'
içerilme, 22
içerme, 3
ikili, 11, 34
ilişki, 2
işlem, 41
iyi sıralama, 38
izomorf, 2

K
kapalı, 24
kapsama, 10
kardinal, 3, 9
Kontinü Hipotezi, 14
küçük, 38
küme, 1, 3
— terimi, 24
boş —, 4

L
limit, 6, 40

M
mantık
—sal aksiyom, 23

N
niceleyici, 16
normal işlem, 53

O
ordinal, 3, 39
limit, 40

Ö
öğe, 1
öngörüntü, 62
özdeşlik göndermesi, 37
özyineli tanım, 5, 42

P
paradoks
Burali-Forti P—u, 9, 40
Russell P—u, 7, 25

R
rekürsif tanım, 5

S
sabit, 16
— gönderme, 37
sağlamak, 24
sayı
gercel —lar, 12
kesirli —lar, 12
tam—ları, 2, 11
von Neumann doğal —ları, 5, 32
sınıf, 7, 24
— terimi, 24
boş —, 27
denklik —ı, 12
sınırlama, 48
sıra, 1, 2
iyi —lama, 38
—lama, 1
—lı ikili, 11, 34
sıralama, 37

sürekli gönderme, 53

T
tanım sınıfı, 36
tanımlama, 8, 24, 46
teorem
  Burali-Forti Paradoksu, 9, 40
  Cantor T—i, 10
  De Morgan Kuralları, 27
  Fermat'nın T—i, 43
  Gödel Eksiklik T—i, 9
  Özyineleme T—i, 44, 48
  Russell Paradoksu, 7, 25
  Schröder–Bernstein T—i, 13
  Tarski Doğruluğun Tanımlanamaması T—i, 9
  Tümevarım T—i, 48
terim, 16
  kapalı —, 24
  küme —i, 24, 29
  sınıf —i, 24, 28
ters, 35, 57
topluluk, 1
tutarlı, 15
tümevarım, 32
tümleyen, 26

V
von Neumann doğal sayıları, 5, 32

Y
yanlışlık, 18
yüklem, 16