İçindekiler

Dördüncü Kısım: Zorn Önsavı'nın Uygulamaları

Beşinci Kısım: Kardinal Sayılar

Önsöz

Birçok profesyonel matematikçinin bilmediği ya da yarım yamalak bildiği, çünkü kulak dolgunluğuyla ve ozmozla öğrendiği, ama matematiğin çok önemli, çok temel ve felsefi olacak kadar derin bir konusunu, bir lise öğrencisinin bile anlayacağı dile indirgeme başarısına ulaştığıma inanmak istiyorum. Tabii bu öğrenci daha önce [SKK] ve [Sİ]'yi dikkatlice okumuş ve içeriğini özümsemişse... Nitekim, bu ders notları [SKK] ve [Sİ]'den sonra, kümeler kuramı notlarımın üçüncü cildi olarak algılanmalıdır ve bu ders notları okunmadan önce [SKK] tamamıyla ve [Sİ]'nin ilk kısmı, en azından ilk iki bölümü özümsenmiş olmalı.

Öğrencinin çevresinde muhtemelen anlamadığı konularda soru soracak kimse olmayacaktır; bu yüzden elimden geldiğince kimseye sorma ihtiyacı belirmeyecek, tek başına anlaşılabilecek biçimde yazmaya çalıştım. Bunun mümkün olmadığını içten içe bilsem de... Okur bu gibi durumlarda önce satırlarla ve kendisiyle mücadele etsin, sonra okumaya devam etsin. O kadar çok tekrar var ki, kendisine hitap eden sese daha ileride ulaşma olasılığı yüksektir, ya da kullanılan dile zamanla alışacaktır. Tekrarlardan bu nedenle özellikle kaçınmadım.

Üstelik ilk okuyuşta anlaşılan kitaplardan da pek bir şey öğrenilmez!

İleride, kategori teoriyle sürekli bir flört halinde olacak olan “çalışan matematikçiye” yönelik bir kümeler kuramı kitabı yazmayı tasarlıyorum. Böylece seri tamamlanacak.

Kümeler Kuramı burada bitmez elbet. Ama daha fazla yazmanın bir anlamı yok. Sıradan bir matematikçinin bilmesi gereken kümeler kuramı bu dört kitapta yer alacak. Daha ileri (ve son derece ilginç ve zevkli) konular için benden çok daha yetkin kişilerin çok değerli kitapları var. Kitabın sonundaki kaynakçada bu kitapların büyük çoğunluğunu bulabilirsiniz.

Kitabın dört bölümünü yazan Ayşe Berkman’ın ODTÜ’lü öğrencileri Ali Altuğ ve Aykut Arslan, İlksen Acunalp, Tolga Karayayla, Niyazi Anıl Gezer’e ve hocaları Ayşe Berkman’a, birinci dönemin ders notlarını baştan sona okuyup düzeltmeler yapan Betül Tanbay’a, düzeltmeler yapmakla yetinmeyip bu notları yazmam için gerekli ortamı sağlayan eşim Özlem Beyarslan’a ve beş yıldır yaptığım her şeyde büyük katkısı olan asistanım Aslı Can Korkmaz’a hepimiz adına çok teşekkür ederim.

Ali Nesin
27 Eylül 2010

Okuma Parçası

1. Her Şey Sıralanamaz

"Ahmet, Belgün'den daha uzun boyluysa, Belgün de Cemal'den daha uzun boyluysa, Ahmet, Cemal'den daha uzun boyludur," önermesi hiç kuşkusuz doğrudur. Çünkü $A < B$ ve $B < C$ eşitsizliklerinden, $A < C$ eşitsizliği çıkar.

Şu önermeyi ele alalım şimdi: "Ahmet, Belgün'den daha iyi satranç oynuyorsa ve Belgün de Cemal'den daha iyi satranç oynuyorsa, Ahmet, Cemal'den daha iyi satranç oynuyordur."

Bu önerme doğru mudur? Ahmet gerçekten Cemal'den daha iyi satranç oynuyorsa, önerme doğrudur elbet. Ama genel olarak, herhangi üç kişi için doğru mudur bu önerme? Bir başka deyişle, *A*, *B* ve *C* herhangi üç kişiyi simgeliyorsa, *A*, *B*'den, *B* de *C*'den daha iyi satranç oynuyorsa, *A*, *C*'den daha iyi satranç oynuyor diyebilir miyiz?

Satranç analizi zor bir oyun. Satranç oynamak yerine zar atalım.

1.1. Bir Zar Oyunu. *A* ve *B* diye adlandıracağımız iki zarın altı yüzünde şu sayılar yazılı olsun:

A:	1	4	5	7	9	12
B:	2	3	6	8	10	11

Bu iki zar birbiriyle "en yüksek sayıyı atma" oyunu oynasa, hangisi daha çok kazanır, yani hangi zarın kazanma olasılığı daha yüksektir? Bu soruyu yanıtlamak için gelebilecek zarları bir tabloyla gösterelim.

	1	4	5	7	9	12
2	*B*	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*
3	*B*	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*
6	*B*	*B*	*B*	*A*	*A*	*A*
8	*B*	*B*	*B*	*B*	*A*	*A*
10	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*	*A*
11	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*	*A*

Örneğin, *A*'ya 9, *B*'ye 3 geldiği durumu beşinci sütunla ikinci sıranın kesiştiği yerde (gölgelenmiş karede) gösterdik. *A*'nın *B*'yi yendiği zar atışlarını *A* ile, *B*'nin *A*'yı yendiği zar atışlarını *B* ile gösterdik.

Sayıldığında görüleceği gibi, *B*, *A*'yı 19 kez yeniyor. Demek ki *B*'nin *A*'yı yenme olasılığı 19/36'dır. Ve elbet, *A*'nın *B*'yi yenme olasılığı 17/36'dır[1].

Dolayısıyla iki zardan birini seçmek gerekirse *B* zarını seçmeliyiz, çünkü *B* zarıyla kazanma olasılığımızı artırmış oluruz. Bu oyunu *B* zarıyla (*A* zarına karşı) 36 milyon kez oynayacak olsak, aşağı yukarı 19 milyonunda kazanırız, geriye kalan 17 milyonunda kaybederiz. Sonuç olarak *B* zarı *A* zarından daha iyidir.

Bu kez üç zarımız olsun: *A*, *B* ve *C* zarları. Ve zarların üstünde şu sayılar yazılı olsun:

A:	1	5	6	10	13	18
B:	2	3	7	11	16	17
C:	4	8	9	12	14	15

Bu zarlarla *C*, *B*'yi 20/36 olasılıkla yener (hesapları okura bırakıyorum.) *B* de *A*'yı 19/36 olasılıkla yener. Demek ki *C* zarı *B* zarından ve *B* zarı *A* zarından daha iyidir. En iyi zarın *C*

1 Eşitlik (yenişememek) olmadığından, bu iki olasılığın toplamı 1 olmalıdır.

olduğu sonucuna varabilir miyiz?

C'yle *A*'yı birbirleriyle kapıştıracak olursak, *C*'nin *A*'yı gerçekten de 21/36 olasılıkla yendiğini görürüz.

Demek *C*, hem *A*'yı hem de *B*'yi yeniyor. Hiç kuşku yok ki bu örnekte *C* en iyi zardır.

Birinci Soru. Öyle *A*, *B* ve *C* zarları var mıdır ki, *A* zarı *B* zarını yensin[2], *B* zarı *C* zarını yensin ve *C* zarı *A* zarını yensin?

Ayrıca zarların üstünde 18 değişik sayı olsun[3]?

Birinci Sorunun Yanıtı. Evet vardır! Bu zarları bulacağız. Hatta öyle zarlar bulacağız ki, *A*, *B* ve *C* birbirlerini hep aynı sonuçla, 19'a 17 yenecek! Ve atacakları ortalama zar aynı olacak!

1'le 18 arasındaki sayıları rastgele bir biçimde *A*, *B* ve *C*'ye dağıtalım. Eğer şanslı bir günümüzdeysek istediğimize ulaşırız. Şansımızı deneyelim. Diyelim *A*, *B* ve *C*'ye şu sayıları dağıttık:

A :	3	5	8	12	14	16
B :	2	4	9	11	13	18
C :	1	6	7	10	15	17

Bu zarları yarıştırırsak şu sonuçları elde ederiz:

$$A\text{-}B : 19\text{–}17$$
$$B\text{-}C : 19\text{–}17$$
$$C\text{-}A : 18\text{–}18$$

İlk iki karşılaşma istediğimiz gibi, ama son karşılaşma istediğimiz gibi değil. *C*'nin *A*'yı yenmesini istiyorduk, oysa yenişemediler. Demek ki *C*'yi güçlendirip *A*'yı zayıflatmamız gerekir. *A*'nın büyük bir sayısını *C*'nin küçük bir sayısıyla değiştirirsek istediğimiz olur ama, o zaman da istemeden *A*-*B* ve *B*-*C* sonuçlarını değiştirebiliriz... Bunu engellemeliyiz ama nasıl? *A*'nın hangi büyük sayısıyla *C*'nin hangi küçük sayısını değişti-

2 Olasılık olarak sözediyoruz burda elbet. Yani A'nın B'yi yenme olasılığı 1/2'den büyük olsun.

3 Eğer böyle 18 değişik sayı varsa, dilersek bu sayıları 1'den 18'e kadar alabiliriz.

relim ki, *A*-*B* ve *B*-*C* karşılaşmaları (yani *B*'nin yaptığı karşılaşmalar) bu değişimden etkilenmesinler? *A*'nın 8'iyle *C*'nin 7'sini değiştirirsek, hem *C* güçlenmiş hem de *A* zayıflamış olur, hem de *A*-*B* ve *B*-*C* karşılaşmaları bu değişimden etkilenmezler! Çünkü *B*'nin bir sayısı 7'den küçükse, 8'den de küçüktür; 8'den küçükse 7'den de küçüktür... Dediğimiz gibi yapalım ve 7'yle 8'in yerlerini değiştirelim:

A:	3	5	7	12	14	16
B:	2	4	9	11	13	18
C:	1	6	8	10	15	17

Bu yeni zarlarda *A*-*B*, *B*-*C* ve *C*-*A* karşılaşmaları hep aynı sonuçla, 19-17 biter. İstediğimiz gibi *A*, *B*, *C* zarı bulduk.

Okur herhalde ilk denememdeki *A*, *B*, *C* zarlarının sayılarını rastgele yerleştirdiğime inanmıyordur. Okur inanmamakta haklı. İlk zarları nasıl bulduğumu anlatayım.

Herhangi iki zarın 5-6, 7-8 gibi ardışık iki sayıyı paylaşmaları işime gelir. Hatta bunun bir değil iki ardışık sayı çifti için böyle olması daha da iyi olur. Gerekirse birini, gerekirse diğerini güçlendirmek için kullanırım. Böylece hatayı gidermem kolay olur, çünkü böylece diğer iki karşılaşmanın sonucunu değiştirmeden istediğim karşılaşmanın sonucunu istediğim yönde değiştirebilirim. Bunu biliyorum. Dolayısıyla ilk denememde bunu sağlamaya çalışmalıyım. Sayıları zarlara şöyle dağıtalım:

B:						18
C:					15	17
A:	1			12	14	16
B:	2	4		11	13	
C:	3	5	7	10		
A:		6	8			
B:			9			

Yani şöyle:

A :	1	6	8	12	14	16
B :	2	4	9	11	13	18
C :	3	5	7	10	15	17

Bu zarlar aralarında oynarlarsa her karşılaşma 18-18 berabere biter... Oysa ben - örneğin - *A*'nın *B*'yi yenmesini istiyorum. 1'le 2'nin yerlerini değiştirirsem, *A*'yı güçlendiririm, *B*'yi zayıflatırım ve *C*'nin karşılaşmalarının sonuçlarını değiştirmem. Bu değiştirmeyi yapacak olursam *A*-*B* karşılaşması istediğim gibi biter ve *B*-*C* ve *A*-*C* karşılaşmalarında bir değişiklik olmaz. *B*-*C* karşılaşmasını *B*'ye kazandırtmak için 4'le 5'in yerlerini değiştireyim. *B*öylece *B*-*C* karşılaşmasını *B* kazanır ve *A*-*B* karşılaşmasını hâlâ *A* kazanır, hem de aynı sonuçla. Son olarak, *C*-*A* karşılaşmasını *C*'ye kazandırtmak için 7'yle 8'in yerlerini değiştirebilirim. Sonuç olarak şu zarları elde ederim:

A :	2	6	7	12	14	16
B :	1	5	9	11	13	18
C :	3	4	8	10	15	17

Ve şu sonuçları elde ederiz:

A-*B* : 19-17

B-*C* : 19-17

C-*A* : 19-17

İstediğimiz de buydu zaten. Üstelik her üç zarın ortalama sayısı aynı: 57/6 = 9,5.

İkinci Soru. Aynı şeyi dört zarla yapmaya çalışalım. Üstlerinde 1'den 24'e kadar tüm sayıların bulunduğu öyle dört *A*, *B*, *C*, *D* zarı bulalım ki *A*-*B*, *B*-*C*, *C*-*D* ve *D*-*A* karşılaşmalarının sonucu 19-17 olsun. Ayrıca *A*-*C* ve *B*-*D* karşılaşmalarının sonucu 18-18 olsun!

İkinci Sorunun Yanıtı. Yukarda anlattığımız yöntemi deneyelim.

Zarları ilk aşamada şöyle dağıtalım:

C:						24
D:					20	23
A:	1			16	19	22
B:	2	5		15	18	21
C:	3	6	9	14	17	
D:	4	7	10	13		
A:		8	11			
B:			12			

Yani zarlarımızın yüzleri şöyle olsun:

A:	1	8	11	16	19	22
B:	2	5	12	15	18	21
C:	3	6	9	14	17	24
D:	4	7	10	13	20	23

Karşılaşmaların sonuçlarını da yazalım:

A-B : 19-17
B-C : 18-18
C-D : 17-19
D-A : 18-18
A-C : 19-17
B-D : 19-17

Tam istediğimiz gibi olmadı ama pek uzak sayılmayız. *A-B* karşılaşması tam istediğimiz gibi sonuçlandı: 19-17. *A*ma öbür karşılaşmaların hiçbiri istediğimiz gibi sonuçlanmadı. İkinci ve üçüncü karşılaşmalara bakalım ilk olarak. İkinci karşılaşma 18-18 bitmiş, oysa biz *B*'nin 19-17 kazanmasını istiyorduk. Demek ki *B*'yi *C*'den 1 sayı daha güçlü kılmalıyız. Üçüncü karşılaşma 17-19 skoruyla *D*'nin lehine bitmiş, oysa biz tam tersini istiyorduk. Demek ki *C*'yi *D*'den daha güçlü kılmalıyız. Bu isteklerimizi ilk iki sütunla oynayarak yerine getirebiliriz:

A :	1	8	11	16	19	22
B :	4	5	12	15	18	21
C :	3	7	9	14	17	24
D :	2	6	10	13	20	23

Bu yeni zarlarla sonuçlar şöyle:

A-*B* : 19-17
B-*C* : 19-17
C-*D* : 19-17
D-*A* : 18-18
A-*C* : 19-17
B-*D* : 18-18

Dördüncü ve beşinci karşılaşmalar hâlâ daha istediğimiz gibi değil. Örneğin *A*-*C* karşılaşmasını iki sayı farkla *A* kazanmış. Oysa biz bu karşılaşmanın 18-18 berabere bitmesini istiyorduk. Demek ki *C*'yi *A*'dan 1 puan güçlendirmeliyiz. Bunun için 7'yle 8'in yerlerini değiştirelim. *A*-*D* karşılaşmasını da yoluna koymak için 10'la 11'in yerlerini değiştirelim. İşte zarlar:

A:	1	7	10	16	19	22
B:	4	5	12	15	18	21
C:	3	8	9	14	17	24
D:	2	6	11	13	20	23

Bu yeni zarlarla sonuçlar şöyle:

A-*B* : 19-17
B-*C* : 19-17
C-*D* : 19-17
D-*A* : 19-17
A-*C* : 18-18
B-*D* : 18-18

Tam istediğimiz gibi... Ayrıca her zarın ortalaması 75/6'dır ve her oyuncu 19 + 19 + 18 sayı elde eder, yani averajda da eşitlik bozulmaz.

Yazının başında sorduğum satranç sorusunun yanıtını hâlâ daha bilmiyorum. Ama yukardaki bulgularım bana satrançta "daha iyi oyuncu" ilişkisinin bir ***tamsıralama*** olmadığını fısıldıyor. Kimi oyuncu oyun başında, kimi oyuncu oyun ortasında, kimi oyuncuysa oyun sonunda iyi olabilir. Kimi oyuncu savunmada iyidir. Kimisi hırslı oyuncuya karşı daha iyi oynar...

Bir satranç oyununu kazandıran (ya da kaybettiren) birçok eleman olduğundan, “daha iyi satranç oyuncusu” ilişkisinin bir tamsıralama olduğunu hiç sanmıyorum.

2. Sıralama

İlk bölümde her şeyin sıralanmayacağını gördük. Ama bu, hiçbir şey sıralanmaz anlamına gelmez tabii ki. Bazı şeyler bal gibi sıralanır. Örneğin ÖSS sınav sonuçlarına göre gençlerimiz sıralanabilirler, sıralanıyorlar da...

Bu bölümde sıralamanın matematiksel anlamını ve bir sürü örnek göreceğiz. Matematiksel tanımı daha sonraya saklayarak örneklerle başlayalım.

Örnek 2.0.1. İlk örneğimiz doğal sayılar kümesi olsun. En küçük doğal sayı 0'dır, sonra 1 gelir, sonra 2, vs. Herhangi iki doğal sayıyı büyüklüklerine göre karşılaştırabiliriz. Örneğin $3 < 5$. Ayrıca $5 < 8$. Dolayısıyla $3 < 8$ vs. Doğal sayılar, herkesin bildiği üzere

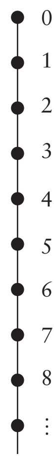
$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \ldots$$

diye sıralanmışlardır. Bu sıralamanın ***en küçük elemanı*** vardır (o da 0'dır). Ama ***en büyük elemanı*** yoktur, her doğal sayıdan daha büyük doğal sayı vardır çünkü. Bu sıralamanın bir başka özelliği de her elemanın hemen ***bir büyüğünün*** olması, 25'in bir büyüğü 26'dır örneğin. Ayrıca, bu sıralamada, 0 dışında her elemanın ***bir öncesi*** de vardır.

Doğal sayıların bu sıralamasına ***doğal sıralama*** adını vereceğiz ve bu sıralamayı $(\mathbb{N}, <)$ olarak göstereceğiz. Doğal sayıların doğal sıralamasını bir önceki sayfada solda resmettik. Küçük elemanları aşağıya, büyük elemanları yukarıya yazdık. Görsel olarak hep böyle yapacağız, küçükleri aşağıya, büyükleri yukarıya yazacağız.

Örnek 2.0.2. İkinci örneğimizde doğal sayılarda alışık olduğumuz sıralamayı ters çevirelim: Bu sefer en küçük sayı (yani 0) bu yeni sıralamaya göre en "büyük" eleman olacak. Sayıları bir sınavda yapılan yanlış sayısı olarak yorumlarsak böyle bir sıralamanın neden gerekli olabileceğini anlarız. Bu kez 0 puan alan (yani 0 yanlış yapan) en iyisidir, ondan daha iyisi yoktur. 1 puan alan da fena değildir ama 0 puan kadar iyi değildir. Bu sıralamayı $\prec$ işaretiyle gösterelim:

$$\ldots \prec 5 \prec 4 \prec 3 \prec 2 \prec 1 \prec 0.$$



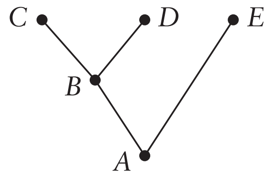
Bu yeni sıralamanın en büyük elemanı var, 0. Ama en küçük elemanı yok, her elemanın hemen bir küçüğü var, örneğin 5'in bir küçüğü bu sıralamaya göre 6. Ayrıca 0 dışında her sayının hemen bir büyüğü var. Bu sıralamaya göre 5'in hemen bir büyüğü 4'tür. Yandaki şekilde bu yeni sıralamayı resmettik. En büyük elemanı en tepede gösterdik, elemanlar küçüldükçe aşağılandılar. Aşağı doğru istediğimiz kadar gidebiliriz.

Doğal sayıların doğal sıralamasıyla karışmasın diye bu yeni sıralamayı $\prec$ simgesiyle gösterdik. Doğal sayılar üstündeki bu yeni sıralamaya gelecekte $(\mathbb{N}, \prec)$ olarak gönderme yapacağız.

Dikkatli okur, bu sıralamayla negatif tamsayıların sıralaması arasında büyük bir ayrım olmadığını görmüştür. Nitekim, bildiğimiz sıralamayla, negatif tamsayılar, aynen bu örnekte olduğu gibi,

$$\ldots < -5 < -4 < -3 < -2 < -1 < 0.$$

Örnek 2.0.3. Üçüncü örneğimizi gönül işlerinden seçelim, daha heyecanlı oluyor. Diyelim Gül'ün beş talibi var: Ayhan, Burak, Can, Doğan ve Erdem. Gül, bu beş talipten birini seçmek için delikanlıları sınavdan geçiriyor. En öncelikli kıstası zekâ olduğundan önce taliplerine satranç oynatıyor. Ayhan herkese yeniliyor, Burak hem Can'a hem de Doğan'a yeniliyor. Zaman kalmadığından başka da maç yapılmıyor. Bu aşamada Gül'ün sıralamasını şöyle gösterebiliriz:



$$A < B < C,\ A < B < D \text{ ve } A < E.$$

Burada A Ayhan'ı, B Burak'ı vs temsil ediyor elbette. Sıralamayı yukarda şeklettik. En düşük puan alan Ayhan'ı en alt sıraya yerleştirdik.

Bu aşamada Gül Erdem'le Burak arasında bir kıyaslama yapamıyor henüz ama bu kıyaslayamamama yukardakinin bir sıralama ya da kısmi sıralama olmasına engel olmayacak. (Matematiksel tanım biraz sonra...)

Gül, Erdem'le Can ve Doğan'ı da kıyaslayamıyor. Ama Can'ı ve Doğan'ı Burak'a tercih ediyor.

Örnek 2.0.4. Dördüncü örneğimizde bir kümenin altkümelerini 'küçükten büyüğe' sıralayacağız. E bir küme olsun (Evren'in E'si.) E'nin altkümeleri kümesine X diyelim. Örneğin

$$E = \{0, 1, 2\}$$

olabilir. O zaman X'in şu 8 elemanı vardır:

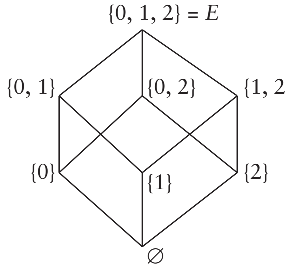
$$\begin{array}{l} \emptyset \\ \{0\}, \{1\}, \{2\}, \\ \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{0, 2\} \\ \{0, 1, 2\} = E. \end{array}$$

Eğer $A, B \in X$ ise, yani A ve B, E'nin altkümeleriyse, "A, B'den küçüktür" ilişkisini $A \subset B$ olarak tanımlayalım. Yani A, B'nin özaltkümesiyse ($A \subseteq B$ ve $A \neq B$ ise), o zaman A'nın

B'den küçük olduğunu söyleyelim. Bu, birazdan tanımlayacağımız anlamda bir sıralamadır.

Bu sıralamada, üçüncü sıralamadaki gibi karşılaştırılamayan elemanlar vardır. Örneğin X'in $\{0\}$ ve $\{1\}$ elemanları (yani E'nin $\{0\}$ ve $\{1\}$ altkümeleri) karşılaştırılamazlar; birbirlerine eşit olmadıkları gibi ne biri diğerinin ne de beriki öbürünün özaltkümesidir.

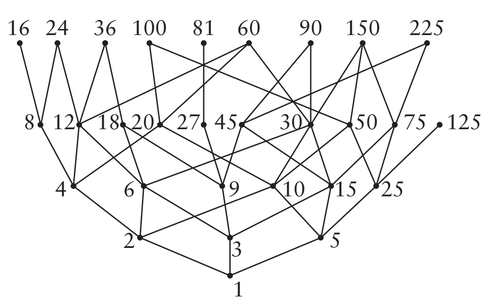
Bu sıralamayı $E = \{0, 1, 2\}$ durumunda "aşağıdan yukarı doğru" yandaki gibi resmedebiliriz.



Gelecekte bu sıralamaya $(\wp(E), \subset)$ sıralı çifti olarak gönderme yapacağız. Burada, $\wp(E)$, E'nin altkümeler kümesi, yani X anlamına geliyor.

Örnek 2.0.5. Gene doğal sayıları ele alalım. Eğer x, y'yi (doğal sayılarda) bölüyorsa, yani $xz = y$ eşitliğini sağlayan bir z doğal sayısı varsa, ama $x \neq y$ ise, x, y'den (şu anda tanımlamak üzere olduğumuz sıralamaya göre) "küçük" olsun. Yani bölen sayılar küçük, bölünen sayılar büyük...

0, kendisi dışında hiçbir sayıyı bölmediğinden (çünkü z ne olursa olsun $0z = 0 \neq y$), 0'dan büyük sayı yoktur. Öte yandan (0 dahil!) her sayı 0'ı böldüğünden (çünkü $x0 = 0$) her sayı 0'dan küçüktür. Dolayısıyla doğal sıralamanın en küçük elemanı olan 0 bu sıralamanın en büyük elemanıdır.



1 her sayıyı böldüğünden, 1 bu sıralamanın en küçük elemanıdır. Asal sayılar da 1'den "bir boy büyük" elemanlardır elbette: 1'le bir asal sayı arasında bu sıralamaya göre bir başka eleman yoktur.

Bu sıralamaya göre, bir p asalından bir büyük elemanlar p^2 ve bir q asalı için pq biçiminde yazılan elemanlardır. Bu sıralamanın küçük bir parçasının bir resmini yukarıda sunduk.

Bölen sayıları aşağıya, bölünen sayıları yukarı yazdık, ayrıca bu iki sayıyı bir doğruyla birleştirdik. Ancak şekil karışmasın diye, örneğin, 2 ile 36 arasına bir doğru çizmedik (bu yöntemle çizilen şekle ***Hasse diyagramı*** denir.) 2'den 36'ya giden en az bir yükselen yol olduğundan 2'nin (bu sıralamaya göre) 36'dan küçük olduğu şekle bakınca anlaşılıyor.

Bu sıralamanın tanımı son derece basit ama kendisi de bir o kadar karmaşık. Yukardaki şemaya bir de 7'yi eklerseniz bu sıralamanın ne kadar karmaşık bir sıralama olduğunu daha iyi anlarsınız, hatta sadece dördüncü katı tamamlamaya çalışın...

Bir sayıyı asallara ayırarak sayının 1'den yüksekliğini de hesaplayabiliriz. Örneğin,

$$60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$$

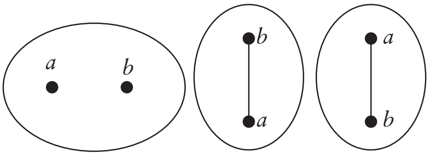
olduğundan, 60'ın yüksekliği $2 + 1 + 1 = 4$'tür, yani 1'den başlayarak tam dört adımda 60'a ulaşabiliriz, örneğin 1–2–6–30–60 bu yollardan biridir.

Gelecekte bu sıralamaya $(\mathbb{N}, |)$ olarak gönderme yapacağız.

Örnek 2.0.6. Sonlu Kümeler Üzerine Sıralama. Her ne kadar matematiksel değeri olmasa da, pedagojik önemi olduğundan az sayıda elemanı olan kümeler üzerine sıralamaları bulalım.

Eğer X boşkümeyse ya da X'in tek bir elemanı varsa, X'te kıyaslayabileceğimiz iki değişik eleman olamayacağından bu durumlarda yapacak bir şey yok, bu kümeler üzerine sadece tek bir sıralama vardır: ***boşsıralama*** denilen ve hiçbir elemanın hiçbir elemanla kıyaslanmadığı tek bir sıralama.

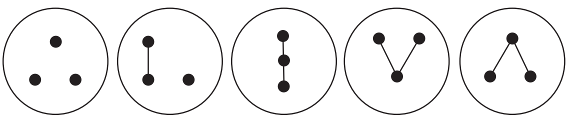
Eğer X'in iki elemanı varsa, diyelim $X = \{a, b\}$ ise, o zaman X üzerine aşağıda görülen üç değişik sıralama vardır. Bunlardan son ikisi birbirlerine çok benzerler, birbirlerinden 'gerçekten farklı' ol-



a ve *b* kıyaslanamaz, boşsıralama $a < b$ $b < a$

dukların söylemek zor... İlerde, "eşyapısallığı" tanımladığımızda, son iki sıralamanın ***eşyapısal*** olduklarını söyleyeceğiz.

Şimdi X'in üç elemanı olduğunu varsayalım. O zaman, X üzerine 19 tane değişik ama sadece 5 tane "gerçekten değişik" yani "eşyapısal olmayan" sıralama vardır.



boşsıralama, bunlardan 1 tane var — bunlardan 6 tane var — bunlardan da 6 tane var — bunlardan 3 tane var — bunlardan 3 tane var

Eleman sayısı dörde çıkarsa sıralama sayısı çok artar. Bunların sayısını bulmayı okura bırakıyoruz.

Sonlu sıralama örneklerini saymazsak, yukarda beş sıralama örneği verdik. İlk ikisi ve sonuncusunda doğal sayıları üç değişik biçimde sıraladık: $(\mathbb{N}, <)$, $(\mathbb{N}, \prec)$, $(\mathbb{N}, |)$. Birincisinde doğal sıralamayı aldık. İkincisinde doğal sıralamayı ters çevirdik. Sonuncusunda ise sıralamayı bölünebilirlikle tanımladık. Görüldüğü gibi aynı küme değişik biçimlerde sıralanabiliyor.

Son dört örnekte de görülebileceği gibi illa iki farklı elemandan birinin diğerinden küçük olması gerekmiyor. Bu durum ilk iki örnekte zuhur etmiyor; bu sıralamalarda birbirinden farklı herhangi iki elemanı karşılaştırabiliyoruz.

Matematiksel Tanım. Üstünde bir sıralama tanımlayacağımız kümeye X diyelim. X'in elemanlarını bir biçimde sıralamak istiyoruz. İlla birinci, ikinci diye değil, çünkü X'te birinci ya da ikinci olmayabilir.

Sıralama dediğimiz şey, X'in bazı elemanlarının X'in bazı elemanlarından daha küçük (ya da daha büyük) olduklarını buyurmaktır. Öylesine bir buyruk değil ama... Bu buyruğun şu iki özelliği sağlaması gerekir:

S1. *Hiçbir eleman kendinden küçük olamaz.*

S2. *Eğer x, y'den küçükse ve y de z'den küçükse, o zaman x, z'den küçük olmalıdır.*

Bu iki özelliği sağlayan ikili bir ilişkiye ***sıralama*** denir.

Eğer "x, y'den küçüktür" ifadesini $x < y$ olarak kısaltırsak, o zaman yukardaki S1 ve S2 koşulları şu biçimde yazılırlar:

S1. *Hiçbir $x \in X$ için $x < x$ olmaz.*

S2. *Her $x, y, z \in X$ için, eğer $x < y$ ve $y < z$ ise, $x < z$'dir*[1].

Dikkat ederseniz herhangi iki elemanın karşılaştırılabileceğini söylemiyor sıralama koşulları, yani x'in y'den küçük olmadığı, y'nin de x'ten küçük olmadığı $x \neq y$ elemanları olabilir. Bu yüzden bu koşulları sağlayan bir sıralamaya kimi zaman ***kısmi sıralama*** dendiği de olur.

Herhangi iki elemanın karşılaştırılabildiği bir sıralamaya, yani S1 ve S2 dışında,

S. *Her $x, y \in X$ için, ya $x < y$ ya $y < x$ ya da $x = y$*

koşulunu sağlayan bir sıralamaya ***tamsıralama*** denir. Yazının başında verdiğimiz ilk iki örnek birer tamsıralamadır, son üç örnek ise tamsıralama olmayan kısmi sıralamalardır çünkü son üç örnekte karşılaştırılamayan (ve eşit olmayan) elemanlar vardır.

1 S1 özelliğine sahip bir ikili ilişkiye ***yansımasız*** ilişki denir. S2 özelliğine sahip bir ikili ilişkiye ise ***geçişkenli*** ya da ***geçişli*** ilişki denir, bkz. [SKK].

Tamsıralamaları daha sonraki bölümlerde daha ayrıntılı olarak konu edeceğiz.

Bir sıralamada $<$ yerine kimi zaman $\subset$ (dördüncü örnekte olduğu gibi), $\prec$, $\sqsubset$, $\lhd$ gibi başka imgelerin kullanıldığı da olur. Örneğin doğal sayıları tersten sıraladığımız ikinci örneğimizde "doğal sıralama"yla karışmasın diye $<$ yerine $\prec$ imgesini kullanmıştık. Gene doğal sayıları sıraladığımız beşinci örneğimizde sıralama bölünebilirliğe göre tanımlandığından, $<$ yerine $|$ imgesini kullanmak yerinde bir karardı.

Eğer bir sıralamada $x < y$ ise, y'nin (bu sıralama için) x'ten ***daha büyük*** olduğunu söyleriz.

Bir sıralamada hem x, y'den hem de y, x'ten küçük olamaz, çünkü o zaman S2'de $z = x$ alarak, $x < x$ buluruz ki bu da S1'le çelişir.

Eğer $<$ diye adlandırılan bir sıralama verilmişse, elemanlar arasında eşitliği de içeren ve genellikle $\leq$ imiyle simgelenen ikili bir ilişki şöyle tanımlanır:

$$x \leq y \Leftrightarrow x < y \text{ ya da } x = y. \tag{1}$$

$\leq$ ikili ilişkisi şu özellikleri sağlar:

T1. *Her $x \in X$ için $x \leq x$.*

T2. *Her $x, y, z \in X$ için, eğer $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise, $x \leq z$'dir.*

T3. *Her $x, y \in X$ için, eğer $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise, $x = y$ eşitliği doğrudur.*

$<$ ilişkisinin S1 ve S2'yi sağladığını varsayarak yukarıda tanımlanan $\leq$ ilişkisinin T1, T2 ve T3'ü kanıtlayalım. T1 ve T2'nin doğrulukları çok bariz. T3'ü kanıtlayalım. $x \leq y$ ve $y \leq x$ olsun. Eğer $x \neq y$ ise, $\leq$ ilişkisinin tanımına göre $x < y$ ve $y < x$ olur. Bundan ve S2'den $x < x$ çıkar, ki bu da S1'le çelişir.

Eğer bir X kümesi üzerine yukardaki T1, T2, T3 özelliklerini sağlayan bir $\leq$ ikili ilişkisi verilmişse ve $<$ ikili ilişkisini,

$$x < y \Leftrightarrow x \leq y \text{ ve } x \neq y \tag{2}$$

olarak tanımlarsak, o zaman $<$ ilişkisi S1 ve S2 özelliklerini sağlar, dolayısıyla bir sıralama olur. Bunun kanıtı çok basittir ve okura bırakılmıştır.

Kolayca görüleceği üzere S1 ve S2 özelliğini sağlayan bir sıralamayla, T1, T2 ve T3 özelliğini sağlayan ikili ilişkiler arasında bir eşleme vardır. Birinden diğeri açıklanan yöntemlerle elde edilir. Ve açıklanan yöntemler iki kez uygulandığında başlanan ikili ilişki bulunur. Yani S1 ve S2 özelliklerini sağlayan bir $<$ sıralamasından başlarsak ve bu sıralamaya önce (1), sonra da (2) yöntemini uygularsak başladığımız $<$ sıralamasını buluruz. Ayrıca eğer T1, T2 ve T3 özelliklerini sağlayan bir $\leq$ ilişkisinden başlarsak ve bu ilişkiye önce (1), sonra da (2) yöntemini uygularsak başladığımız $\leq$ ilişkisini buluruz.

Demek ki S1 ve S2 özelliklerini sağlayan bir sıralamayla T1, T2 ve T3 özelliklerini sağlayan bir ikili ilişki arasında pek bir fark yoktur. Bu yüzden bundan böyle T1, T2, T3 özelliklerini sağlayan bir ikili ilişkiye de ***sıralama*** diyeceğiz. Eğer sıralamayı $<$, $\prec$, $\subset$, $\sqsubset$, $\lhd$ gibi bir simgeyle tanımlarsak, sıralamanın S1 ve S2 özelliklerini sağladığını, ama eğer sıralamayı $\leq$, $\leqq$, $\lesssim$, $\subseteq$, $\sqsubseteq$, $\unlhd$ gibi bir simgeyle tanımlarsak T1, T2, T3 özelliklerini sağladığını varsayacağız[2].

T1, T2, T3 özelliklerini sağlayan bir $\leq$ sıralamasının bir tamsıralama olması için,

T. *Her* $x, y \in X$ *için, ya* $x \leq y$ *ya da* $y \leq x$

özelliğinin sağlanması yeter ve gerek koşuldur elbette.

T1, T2, T3 özelliklerini sağlayan bir $\leq$ sıralamasında eğer $x \leq y$ ise, "x, y'den ***küçükeşittir***" ya da "y, x'ten ***büyükeşittir***" diyeceğiz.

Eğer bir sıralama verilmişse, $>$, $\geq$, $\not<$, $\not>$, $\not\leq$, $\not\geq$, $\prec$, $\succ$ gibi anlamı bariz olan ve alışık olduğumuz simgeleri hiç çekinmeden kullanacağız. Örneğin:

2 Arife not: Kategori teorisinde bu dediğimiz doğru değildir. Eğer sıralama tamsıralama değilse, eşyapı fonksiyonlarında sorun çıkar.

$$x > y \Leftrightarrow y < x$$
$$x \geq y \Leftrightarrow y \leq x$$
$$x \ngeq y \Leftrightarrow x \geq y \text{ doğru değilse}$$
$$x \nprec y \Leftrightarrow x \prec y \text{ doğru değilse}$$

Dikkat! Eğer $(X, <)$ bir tamsıralama değilse, $x \nless y$ illa $x \geq y$ anlamına gelmeyebilir, çünkü x ve y karşılaştırılamaz da olabilirler.

Dört sayfayı aşan bir örnek ve tanım faslından sonra bölümün kalan kısmında sıralamaların bazı özelliklerini ve bazı sıralama örnekleri göstereceğiz.

2.1. Daha Matematiksel Bir Deyişle...

Sıralamanın asıl matematiksel tanımı şöyledir. X bir küme olsun. $A \subseteq X \times X$,

S1. *Her $x \in X$ için $(x, x) \notin A$,*

S2. *Her $x, y, z \in X$ için, eğer $(x, y) \in A$ ve $(y, z) \in A$ ise o zaman $(x, z) \in A$ olur*

özelliklerini sağlayan bir altküme olsun. O zaman A'ya X üzerine bir ***sıralama*** denir ve bu sıralama (X, A) olarak yazılır.

X üzerine bir ***ikili ilişki*** sadece $X \times X$'in bir altkümesidir [SKK, Sİ]. Demek ki bir sıralama S1 ve S2 özelliklerini sağlayan bir ikili ilişkidir.

Eğer (X, A) bir sıralamaysa, sık sık $(x, y) \in A$ yerine $x < y$ gibi sezgilerimize daha fazla hitap eden ve daha fazla anlam ima eden bir yazılım kullanılır. O zaman sıralama (X, A) yerine $(X, <)$ olarak yazılır.

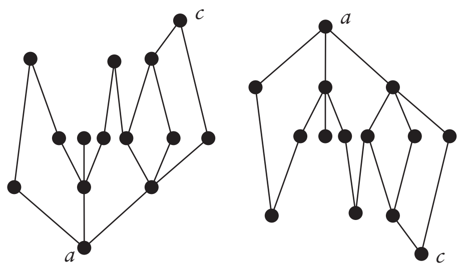
Bu tanımdan da anlaşılacağı üzere, eğer $A = \emptyset$ ise S1 ve S2 özellikleri doğru olur ve böylece hiçbir elemanın hiçbir elemanla karşılaştırılmadığı ***boşsıralama*** adı verilen $(X, \emptyset)$ sıralamasını elde ederiz. Boşsıralamaya ***kararsız*** sıralama adını da verebiliriz. Zaten tek bir elemanı olan bir küme üzerine sadece boşsıralama olabilir. Hayatta boşsıralamadan daha ilginç sıralamalar vardır.

Alıştırma 2.1.1. X bir küme olsun. Eğer (X, A) ve (X, B) sıralamalarsa ve A sub B ise, (X, B) sıralamasının (X, A) sıralamasından daha büyük olduğunu söyleyelim. X üzerine bir tamsıralamanın, A'nın en büyük olduğu (X, A) sıralaması olduğunu kanıtlayın.

2.2. Eskilerden Yeni Sıralamalar Türetmek

Bu altbölümde bir sıralamadan nasıl başka sıralamalar elde edileceğini göreceğiz.

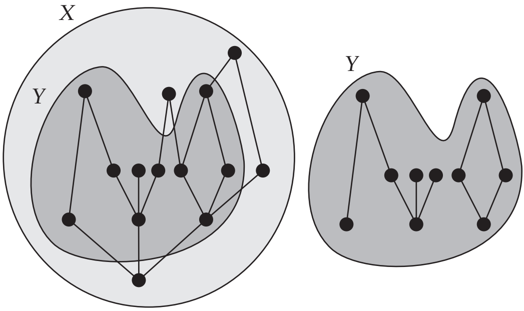
2.2.1. Bir Sıralamayı Ters Çevirmek. İkinci örneğimiz olan $(\mathbb{N}, \prec)$ sıralamasında birinci örneğimiz olan $(\mathbb{N}, <)$ sıralamasını ters çevirmiştik, birinci örnekte büyük olan elemanlar ikinci örnekte küçük olmuşlardı. Genel olarak, herhangi bir sıralamayı ters çevirerek yeni bir sıralama elde edebiliriz: Eğer $<$, X kümesi üzerine bir sıralamaysa, $x \prec y$ ilişkisini $y < x$ olarak tanımla-



Bir sıralama ve onun ters çevrilmiş hali

yalım; o zaman $\prec$ de X üzerine bir sıralamadır. Bu iki sıralama arasında kaydadeğer bir fark olduğunu söylemek zor, biri bilindi mi diğeri de bilinir. Örneğin birinin en küçük elemanı varsa diğerinin en büyük elemanı vardır vs.

2.2.2. Sıralı Bir Kümenin Bir Altkümesini Sıralamak. Sıralı bir X kümesinin bir Y altkümesi verilmişse, X'in sıralamasını Y'ye kısıtlayarak Y'yi de sıralayabiliriz, yani Y kümesi X üst-



Bir sıralama ve bir altkümesi

kümesinin sıralamasıyla sıralanır. X'in sıralamasını sadece Y'nin elemanlarına kısıtlamak yeterlidir bunun için. Bu durumda Y'nin sıralamasının X'in sıralamasından ***miras kaldığı*** ya da X'in sıralamasının ***kalıntısı*** olduğu söylenir. Örneğin $\mathbb{Z}$'nin doğal sıralaması hem $\mathbb{Q}$'nün hem de $\mathbb{R}$'nin doğal sıralamasının kalıntısıdır. $\mathbb{N}$'nin doğal sıralaması da hem $\mathbb{Z}$'nin hem $\mathbb{Q}$'nün hem de $\mathbb{R}$'nin doğal sıralamasının kalıntısıdır.

Y'nin bu sıralamasına X'in ***altsıralaması*** denir.

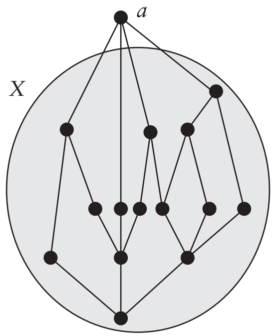
2.2.3. Yeni Bir Eleman Eklemek. Eğer bir $(X, <)$ sıralaması verilmişse ve a, X'te olmayan bir elemansa, $X \cup \{a\}$ kümesini X'in sıralamasını bozmayacak şekilde çeşitli biçimlerde sıralayabiliriz. En kolayı ve en çok kullanım alanı bulanı a'yı en tepeye koymaktır, yani a'yı en büyük eleman yapmaktır. $X \cup \{a\}$ kümesinin bu sıralamasında, X'in eski düzeni aynen korunur, bir de ayrıca a'nın X'in tüm elemanlarından daha büyük olacağı buyrulur. Yani her $x, y \in X \cup \{a\}$ için,

$$x < y \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in X \text{ ve } (X,<) \text{ sıralamasında } x < y \text{ ya da} \\ x \in X \text{ ve } y = a \end{cases}$$

tanımı yapılır.

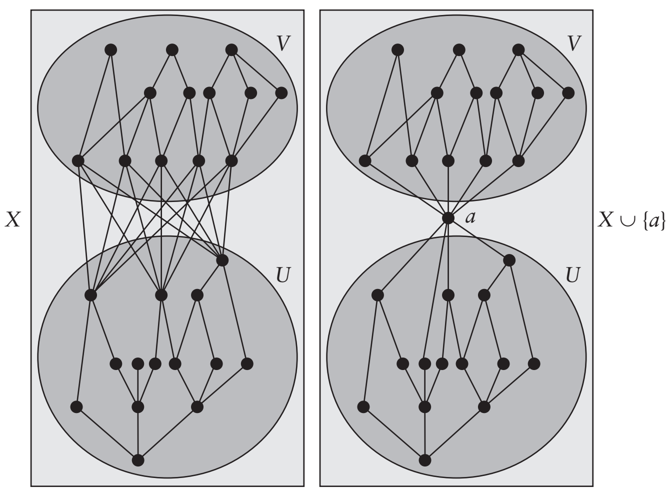
Bir sonraki şekilde X'in en tepesine eleman eklemeyi resmettik.

a elemanı yukardaki gibi X'in tepesine eklendiğinde a yerine ∞ yazmak fena fikir olmayabilir ama bu fikri kullanmayacağız.



Sıralanmış bir X kümesinin tepesine bir eleman eklemek

a'yı X'in tepesi yerine başka bir yerine de ekleyebiliriz. Örneğin X'in içinde şu özellikleri sağlayan U ve V kümeleri olduğunu varsayalım: $U \cup V = X$ ve U'nun her elemanı V'nin her elemanından küçük. Şimdi a'yı U ile V arasına koyalım, yani a'yı U'nun



a'yı U ile V arasına koymak

her elemanından büyük ve V'nin her elemanından küçük yapalım. $X \cup \{a\}$ kümesi üstünde yeni bir sıralama elde ederiz. Böylece a elemanı diğer bütün elemanlarla karşılaştırılabilir olur.

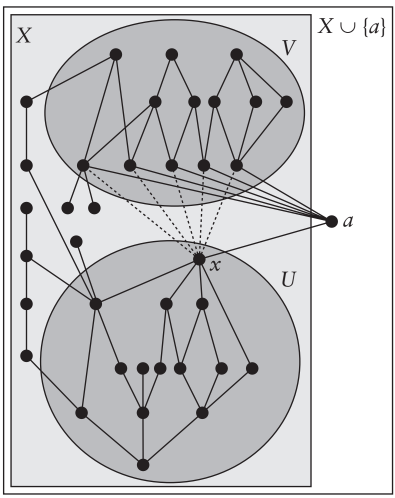
Aslında a'yı en tepeye koymak bunun özel bir halidir: Eğer yukardaki inşada $U = X$ ve $V = \varnothing$ alırsak, a'yı en tepeye koymuş oluruz.

Yeni bir sıralama elde etmek için illa $U \cup V = X$ eşitliği sağlanması gerekmez. Bu eşitlik geçerli olmadan da a'yı U ile V arasına koyabiliriz. Gene bir sıralama elde etmek için U ve V'nin sağlaması gereken gerek ve yeter koşulu bulmayı okura bırakıyoruz.

Bunun bir başka varyasyonu şöyledir: $x \in X$ ve

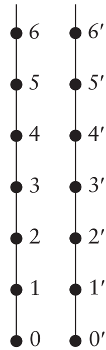
$$V = \{y \in X : x < y\} \text{ ve } U = \{y \in X : y \geq x\}$$

olsun. Şimdi a'nın V'nın elemanlarından küçük ve U'nun elemanlarından büyük olduğunu buyuralım. Böylece a'yı x'ten hemen sonra koymuş oluruz. Bunun resmi de aşağıda.



a'yı x'ten hemen sonra koymak

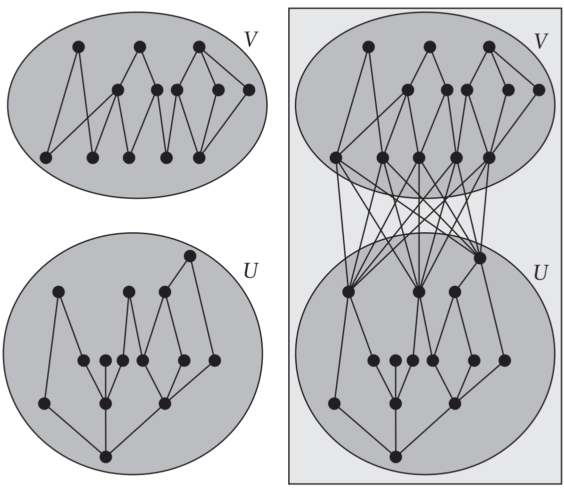
2.2.4. İki Sıralamayı Toplamak. $(U, <)$ ve $(V, <)$ iki sıralama olsun. U ile V'nin ayrık olduklarını, yani kesişimlerinin boş olduğunu varsayalım. Şimdi, U ve V'de varolan sıralama dışında yeni herhangi bir sıralama eklemeden $U \cup V$ kümesini sıralı bir küme olarak algılayabiliriz. $(U \sqcup V, <)$ olarak simgeleyeceğimiz bu sıralamada U'nun elemanlarıyla V'nin elemanları birbirleriyle kıyaslanamazlar.



$\mathbb{N} \sqcup \mathbb{N}$

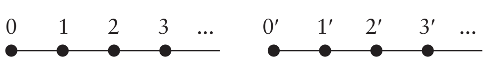
Eğer U ve V kümeleri ayrık değillerse ve illa U ve V ile yukardaki inşayı yapmak istersek, önce bu iki kümeyi bir biçimde "ayrıklaştırmak" gerekir. Bunun standart yolu U yerine $U \times \{0\}$, V yerine $V \times \{1\}$ yazmaktır. Ayrıca U ve V'nin sıralamalarını bozmadan $U \times \{0\}$ ve $V \times \{1\}$ kümelerine taşınır. Eğer bu çok meşakkatli geliyorsa, V'nin elemanlarına (U'nunkilere değil!) v yerine v' adını verilir. $U = V = \mathbb{N}$ durumunda bunun resmini yanda yaptık.

$U \cup V$ bileşimini (kümeler hâlâ ayrık) şöyle de sıralayabiliriz. U ve V'nin varolan sıralamasını kabullenip ayrıca U'nun her elemanını V'nin her elemanından küçük addedebiliriz. $U \cup V$ kümesi üzerindeki bu sıralamaya $U + V$ olarak gösterilir. Resmi aşağıda.



U ve V sıralamaları $\qquad$ $U + V$

$\mathbb{N} + \mathbb{N}$ sıralaması önemlidir. Aşağıda bu sıralamayı gösterdik, ancak yerden kazanmak için $\mathbb{N} + \mathbb{N}$ sıralamasını aşağıdan



$\mathbb{N} \sqcup \mathbb{N}$

yukarıya değil, soldan sağa yazdık. Zaten ilerde de elemanları küçükten büyüğe yazarken soldan sağa yazacağız.

2.2.5. Fonksiyonla Sıralama. $(Y, <)$ bir sıralama, X bir küme ve $f : X \to Y$ herhangi bir fonksiyon olsun. X üzerine şu $<$ ikili ilişkisini tanımlayalım: $x_1, x_2 \in X$ için,

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

olsun. Bu, kolayca kanıtlanabileceği üzere X üzerine bir sıralama tanımlar.

Dikkat: Tanımı

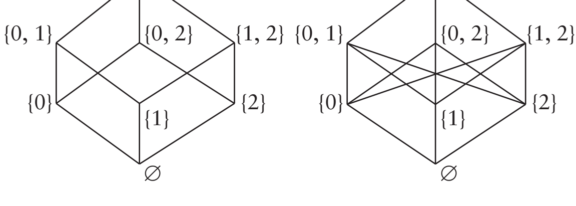
$$x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

olarak yapsaydık, eğer f birebir değilse, bu tanım bir sıralama tanımlamazdı; çünkü $x_1 \neq x_2$, için $f(x_1) = f(x_2)$ olursa, o zaman, $x_1 \leq x_2$ ve $x_2 \leq x_1$ olur ama $x_1 = x_2$ olmaz.

Örnek 2.2.5.1. E bir küme olsun. X, E'nin sonlu altkümeleri kümesi olsun. $x_1, x_2 \in X$ için,

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow |x_1| < |x_2|$$

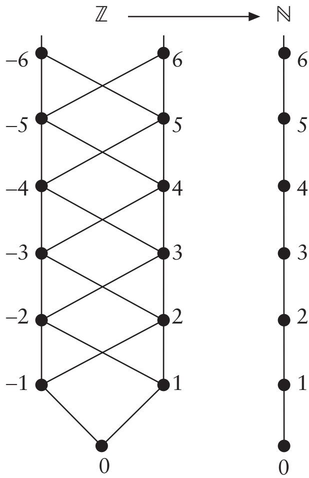
ilişkisi ($|x|$, x altkümesinin eleman sayısıdır) X üzerine bir sıralama tanımlar. Bu sıralama $(X, \subset)$ sıralamasından daha "ince" bir sıralamadır çünkü eğer $x_1 \subset x_2$ ise $x_1 < x_2$'dir. $E = \{1, 2, 3\}$ durumunda her iki sıralamanın resmi aşağıda.



Örnek 2.2.5.2. $X = \mathbb{Z}$ olsun. $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ için,

$$x_1 \sqsubset x_2 \Leftrightarrow |x_1| < |x_2|$$

ilişkisi ($|x|$, x sayısının mutlak değeridir) $\mathbb{Z}$ üzerine bir sıralama tanımlar. Resmi aşağıda olan ve büyüklüğün mutlak değere göre ölçüldüğü bu sıralamaya göre, örneğin, –3, 2'den daha büyüktür, yani $2 \sqsubset -3$'tür. Ama bu sıralamada, mutlak değerleri aynı olan sayılar karşılaştırılmaz.



2.2.6. Alfabetik Sıralama. En çok kullanılan ve en yararlı sıralamalardan biridir. $(X, <)$ ve $(Y, <)$ birer sıralama olsun. $X \times Y$ kartezyen çarpımı üzerine şu sıralamayı koyalım: $x_1, x_2 \in X$, $y_1, y_2 \in Y$ için,

$$(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$$

ancak ve ancak

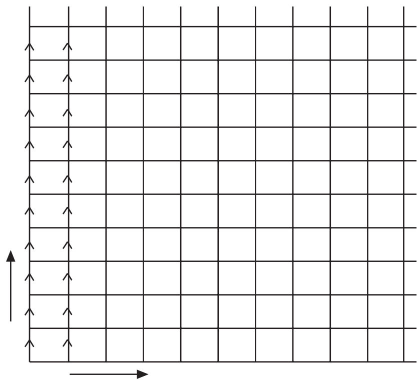
$$x_1 < x_2 \text{ ya da } x_1 = x_2 \text{ ve } y_1 < y_2$$

ise. Bunun S1 ve S2 koşullarını sağlayan bir sıralama olduğunun kanıtını okura bırakıyoruz. (Mutlaka yapılmalı!) Bu sıralamaya ***alfabetik sıralama*** adı verilir.

Neden alfabetik sıralama dendiği anlaşılmış olmalı: Önce ilk koordinata (ilk harfe!) göre sıralıyoruz. Sonra ikincisine göre... Üçüncü harfimiz olsaydı, bu sıralamaya devam edebilirdik.

Bu sıralamada bir (x, y) çiftinin yerini saptamak için önce x'e bakılır. x ne kadar küçükse (x, y) de o kadar küçüktür. Eğer birinci koordinatlar eşitse, o zaman ikinci koordinatlara bakılır.

Birkaç örnek vermekte yarar var. $(X, <) = (Y, <) = (\mathbb{N}, <)$ olsun. Bu sıralamaya göre $(5, 0) > (4, 100) > (4, 5) > (4, 0) > (3, 1000) > (2, 1) > (2, 0) > (1, 5) > (0, 600) > (0, 1) > (0, 0)$ olur.



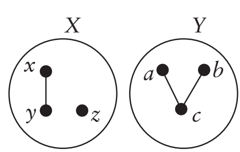
$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ızgarasının elemanları sağa ve yukarı gittikçe büyürler. İkinci sütunun tüm elemanları birinci sütunun tüm elemanlarından daha büyüktür. Üçüncü sütunun tüm elemanları ikinci sütunun tüm elemanlarından daha büyüktür.

$(0, 0)$ bu sıralamanın en küçük elemanıdır. Bu elemandan bir sonra gelen eleman $(0, 1)$'dır. Sonra $(0, 2)$, $(0, 3)$ vs gelir. Tüm $(0, n)$'ler bittikten sonra (!) ilk gelen eleman $(1, 0)$'dır. Bunun ardından $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$ vs gelir. $(1, n)$ türünden elemanlar bittikten sonra $(2, 0)$ elemanı gelir ve sıralama böylecene sürer gider.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ örneğinde her elemandan hemen sonra gelen bir eleman vardır: (n, m) elemanından hemen sonra $(n, m + 1)$ elemanı gelir. Ayrıca $(n, 0)$ türünden elemanlar dışında her elemanın hemen bir öncesi vardır: Eğer $m \neq 0$ ise, (n, m)'den hemen önce gelen eleman $(n, m - 1)$ elemanıdır.

Alıştırmalar

2.2.6.1. Eğer X ve Y sıralamaları yandaki gibiyse $X \times Y$ alfabetik sıralamasını bulun.



Aşağıdaki alıştırmalar matematiksel ifade edilmemişseler de okur sıralamaları kavramaya çalışarak ne sorulmak istendiğini anlayabilir.

2.2.6.2. X herhangi sıralı bir küme olsun. $\{0, 1\}$ kümesini $0 < 1$ olarak sıralayalım. $X \times \{0, 1\}$ alfabetik sıralamasıyla $X + X$ sıralamasının bir anlamda "aynı" sıralama olduklarını gösterin.

2.2.6.3. $\{0, 1\}$ kümesini yukardaki gibi, $\mathbb{N}$'yi de doğal sıralayalım. $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$ sıralamasıyla $\mathbb{N}$ sıralaması arasında "pek fark olmadığını" gösterin.

2.2.6.4. $\{0, 1\}$ kümesini yukardaki gibi, $\{a, b\}$ kümesi de boş-sıralansın. $\{0, 1\} \times \{a, b\}$ alfabetik sıralamasıyla $\{a, b\} \times \{0, 1\}$ sıralamasının ayrı sıralamalar olduklarını gösterin.

2.3. Sıralamaların Özel Elemanları

2.3.1. En Küçük ve En Büyük Elemanlar. Bir sıralamada en küçük ya da en büyük eleman olabileceğini de olmayabileceğini de gördük. $\mathbb{N}$'nin doğal sıralamasının en küçük elemanı vardır ama en büyük elemanı yoktur. Bunun ters yüz edilmişi olan $(\mathbb{N}, \prec)$ sıralamasının en büyük elemanı vardır (0'dır) ama en küçük elemanı yoktur. $\mathbb{Z}$'nin doğal sıralamasının ne en küçük ne de en büyük elemanı vardır. Öte yandan $(\wp(E), \subset)$ sıralamasının hem en küçük ($\emptyset$) hem de en büyük (E) elemanı vardır.

X, E'nin sonlu altkümeleri kümesi olsun. X'i $\subset$ ilişkisine göre sıralayalım, yani $(X, \subset)$ sıralamasına bakalım. Eğer E sonsuz bir kümeyse, bu sıralamanın en büyük elemanı yoktur, çünkü herhangi bir sonlu A kümesine E'den A'da olmayan bir eleman eklersek, A'dan daha büyük bir küme elde etmiş oluruz.

$(\mathbb{Z}, |)$ sıralamasında 0 en büyük elemandır ama $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, |)$ sıralamasının en büyük elemanı yoktur.

Matematiksel tanım şöyle: Bir $(X, <)$ sıralamasının ***en büyük elemanı*** "her $x \in X$ için $x \leq a$" özelliğini sağlayan bir $a \in X$ elemanıdır. ***En küçük eleman*** benzer biçimde tanımlanır. Eğer $A \subseteq X$ ise A'nın en büyük elemanı "her $x \in A$ için $x \leq a$" özelliğini sağlayan bir $a \in A$ elemanıdır. Burada a'nın A'da olması önemlidir. Örneğin $X = \mathbb{R}$ (doğal sıralamayla) ve $A = (0, 1)$ aralığı ise, A'nın en büyük elemanı yoktur. Ama $A = (0, 1]$ ise, A'nın en büyük elemanı vardır. A'nın en küçük elemanı benzer biçimde tanımlanır.

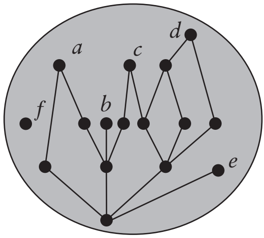
A'nın en büyük elemanı (eğer varsa) bir tanedir, çünkü a ve b, A'nın en büyük elemanlarıysa hem $a \leq b$ hem de $b \leq a$ eşitsizlikleri geçerli olduğundan $a = b$ olur.

Alıştırmalar

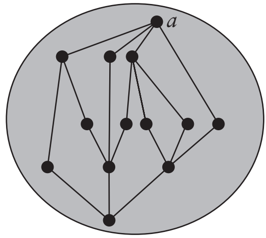
2.3.1.1. X ve Y sıralamalarının en büyük elemanları varsa, $X \times Y$ alfabetik sıralamasının da en büyük elemanı olduğunu gösterin.

2.3.1.2. $X \times Y$ alfabetik sıralamasının en büyük elemanı varsa, X ve Y sıralamalarının da en büyük elemanları olduğunu gösterin.

2.3.2. Maksimal ve Minimal Elemanlar. A'nın ***maksimal*** elemanları her $x \in A$ için $x \not> a$ özelliğini sağlayan $a \in A$ elemanlarıdır. Yani a'nın A'nın maksimal elemanı olması için, A'da a'dan büyük eleman olmamalı, ama yukarıdakinin tersine, bu sefer A'da a ile karşılaştırılamayan elemanlar olabilir. Burada da, bir önceki tanımda olduğu gibi, a'nın A'da olması gerektiğine dikkatinizi çekerim.



maksimal elemanlar: a, b, c, d, e, f



en büyük eleman: a

En büyük eleman, eğer varsa, tek maksimal elemandır. Ama aşağıdaki şekildeki örnekte de görüleceği üzere maksimal elemanlardan birkaç tane olabilir.

Bir tamsıralamada en büyük elemanla maksimal eleman arasında fark yoktur ve bu durumda en büyük eleman max A olarak gösterilir.

A'nın ***minimal*** elemanları benzer şekilde tanımlanırlar.

Sonlu bir sıralı kümede mutlaka minimal ve maksimal elemanlar olmak zorundadır.

$(\mathbb{Z} \setminus \{1\}, |)$ sıralamasının en küçük elemanı yoktur. Ama bu sıralamada asal sayılardan daha küçük eleman olmadığından, asal sayılar bu sıralamanın minimal elemanlarıdır.

2.3.3 Hemen Sonraki ve Hemen Önceki Elemanlar. $(X, <)$ bir sıralama ve $x \in X$ olsun. Verdiğimiz tüm örneklerde, belki son eleman dışında, her elemandan hemen sonra gelen en az bir eleman vardı. Örneğin bölünmeyle tanımlanmış Örnek 2.0.5'te hem 4, hem 6, hem de 10 sayıları 2'den hemen sonra gelen elemanlar. Ama $(\mathbb{Q}, <)$ ya da $(\mathbb{R}, <)$ sıralamalarında hiçbir elemandan **hemen sonra** gelen bir eleman yoktur, çünkü her $a < b$ için, örneğin,

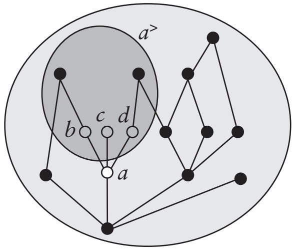
$$a < (a + b)/2 < b$$

eşitsizlikleri sağlanır. $(\wp(E), \subset)$ sıralamasında E dışında her elemandan hemen sonra gelen bir (ya da daha çok) eleman vardır.

Eğer $x \in X$ ise, (x, ∞) kümesini

$$(x, \infty) = \{y \in X : x < y\}$$

olarak tanımlayalım. (Burada, ∞, yepyeni bir simgedir; X'te ∞ diye bir elemanın olmadığını varsayıyoruz.) O zaman x'ten ***hemen sonra gelen elemanlar*** (x, ∞) kümesinin en küçük elemanlarıdır. Yani bir $y \in X$ elemanı eğer $x < y$ eşitsizliğini sağlıyorsa ve hiçbir $z \in X$ için $x < z < y$ eşitsizlikleri sağlanmıyorsa, o zaman y, x'ten hemen sonra gelen elemanlardan biridir. Bir sonraki şeklin açıklayacı olduğunu sanıyoruz.



a’dan hemen sonra gelen elemanlar: *b*, *c*, *d*

Eğer x’ten hemen sonra gelen eleman bir taneyse, bu eleman x^+ olarak yazılır. x’ten ***hemen önce gelen elemanlar*** benzer biçimde tanımlanırlar.

Eğer bir sıralamada her $a < b$ için, $a < c < b$ eşitsizliklerini sağlayan bir c elemanı varsa o zaman bu sıralamaya ***yoğun sıralama*** denir. $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$’nin doğal sıralamaları yoğun sıralamalardır ama $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{Z}$’nin doğal sıralamaları yoğun sıralamalar değildir. $(\wp(E), \subset)$ sıralaması da yoğun bir sıralama değildir, örneğin, eğer $a \in E$ ise, $\emptyset$ ile $\{a\}$ arasında bir başka eleman yoktur.

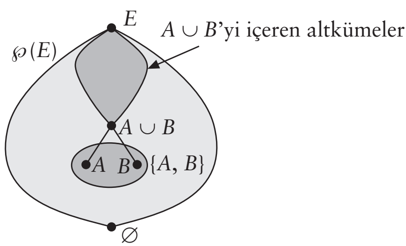
Yoğun sıralamalarda hiçbir zaman bir elemandan hemen sonraki ya da bir elemandan hemen önceki elemanlar olmaz. Ama yoğun bir sıralamada en küçük ya da en büyük elemanlar olabilir; örneğin $[0, 1]$ kapalı aralığı (doğal sıralamayla) böyle bir sıralamadır.

2.3.4. Üstsınır ve Altsınır. $(X, <)$ bir sıralama olsun. A, X’in bir altkümesi olsun. A’nın tüm elemanlarından büyükeşit olan X’in bir elemanına A’nın ***üstsınırı*** adı verilir. Demek ki b’nin A’nın bir üstsınırı olabilmesi için her $a \in A$ için $a \leq b$ eşitsizliği sağlanmalıdır. ***Altsınır*** benzer biçimde tanımlanır.

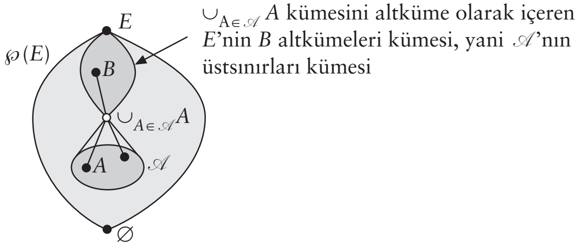
Birkaç örnek verelim. $X = \mathbb{R}$ (doğal sıralamayla) olsun. 1 ve 1’den büyük her gerçel sayı hem $[0, 1]$ hem de $(0, 1)$ aralıklarının üstsınırıdır. Ama örneğin $\mathbb{R}$’de $\mathbb{Z}$’nin üstsınırı yoktur.

$(\mathbb{Z}, |)$ sıralamasında, eğer A sonlu bir kümeyse, A’daki sayıların en küçük ortak çarpımına bölünen her sayı A’nın bir üstsınırıdır; en küçük ortak çarpım da en küçük üstsınırdır. Bu sıralamada sonsuz kümelerin üstsınırı 0'dır. Ancak $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, |)$ sıralamasında, sonsuz altkümelerin üstsınırı yoktur.

Şimdi örnek olarak $(\wp(E), \subset)$ sıralamasını ele alalım. $A, B \subseteq E$ olsun, yani $A, B \in \wp(E)$ olsun. O zaman $\{A, B\}$, $\wp(E)$'nin bir altkümesidir. E'nin, hem A'yı hem de B'yi (altküme olarak) içeren bir altkümesi, yani E'nin $A \cup B$'yi içeren bir altkümesi $\{A, B\}$'nin bir üstsınırıdır. $A \cup B$ de $\{A, B\}$ altkümesinin bir üstsınırıdır ve üstsınırların en küçüğüdür.



$(\wp(E), \subset)$ sıralamasında $\wp(E)$'nin her altkümesinin bir üstsınırı vardır. E bunlardan biridir elbette. (Bir sıralamanın en büyük elemanı her altkümenin üstsınırıdır elbette!) Eğer $\mathcal{A}$, $\wp(E)$'nin bir altkümesiyse, o zaman E'nin $\cup_{A \in \mathcal{A}} A$ altkümesi ve bu altkümenin her üstkümesi $\mathcal{A}$'nın bir üstsınırıdır. Elbette, $\cup_{A \in \mathcal{A}} A$, $\mathcal{A}$'nın üstsınırlarının en küçüğüdür.



2.3.5. En Küçük Üstsınır. $(X, <)$ bir sıralama olsun. A, X'in bir altkümesi olsun. $A^{\geq}$, A'nın üstsınırları kümesini temsil etsin:

$$A^{\geq} = \{x \in X : \text{her } a \in A \text{ için } a \leq x\}.$$

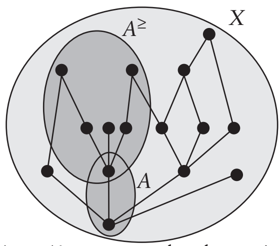
Eğer $x \in X$ için, $[x, \infty)$ kümesini

$$[x, \infty) = \{y \in X : x \leq y\}$$

olarak tanımlarsak,

$$A^{\geq} = \cap_{a \in A} [a, \infty)$$

olur.



A ve A'nın üstsınırları kümesi $A^{\geq}$

$A^{\geq}$ kümesinin en küçük elemanına (eğer varsa) A'nın ***en küçük üstsınırı*** adı verilir. Demek ki A'nın en küçük üstsınırı, her şeyden önce A'nın bir üstsınırıdır ve ayrıca A'nın tüm üstsınırlarından küçükeşittir.

A'nın ***en küçük üstsınırı***, eğer varsa, bir tanedir, çünkü hem a hem de b, A'nın en küçük üstsınırlarıysa, o zaman hem $a \leq b$ hem de $b \leq a$ olur, yani $a = b$ olur.

A'nın en küçük üstsınırı sup A olarak gösterilir. En büyük altsınır benzer biçimde tanımlanır ve inf A olarak gösterilir.

A'nin en büyük elemanı varsa o zaman bu eleman A'nın en küçük üstsınırıdır. Ayrıca eğer A'nın en küçük üstsınırı varsa ve A'daysa, o zaman bu eleman A'nın en büyük elemanı olmak zorundadır.

$(\mathbb{N}, <)$ ve $(\mathbb{Z}, <)$ sıralamalarında, üstsınırı olan ve boş olmayan her altkümenin en küçük üstsınırı vardır, ancak aynı şey $(\mathbb{Q}, <)$ sıralaması için doğru değildir. Örneğin,

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\} \subseteq \mathbb{Q}$$

ise A'nın üstsınırları vardır (örneğin 5) ama A'nın en küçük üstsınırı yoktur, çünkü $\sqrt{2}$ kesirli bir sayı değildir. Öte yandan,

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x < 5\} \subseteq \mathbb{Q}$$

kümesinin $\mathbb{Q}$'deki en küçük üstsınırı 5'tir.

$(\mathbb{R}, <)$ sıralamasında üstsınırı olan ve boş olmayan her altkümenin bir en küçük üstsınırı vardır. Bunu [Sİ]'de kanıtladık.

$(\mathbb{Z}, |)$ sıralamasında, eğer A sonlu bir kümeyse, A'daki sayıların en küçük ortak çarpımına (ekok) bölünen her sayı A'nın bir üstsınırıdır ve en küçük ortak çarpım bu sonlu kümenin en küçük üstsınırıdır. 0 her altkümenin üstsınırıdır. Sonsuz altkümelerin üstsınırı 0'dır. Öte yandan $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, |)$ sıralamasında sonsuz kümelerin en küçük üstsınırı yoktur çünkü bu sıralamada sonsuz kümelerin üstsınırı yoktur.

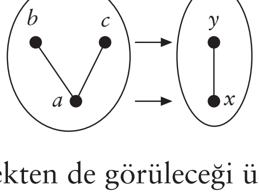
2.4. Sıralamaların Eşyapı Fonksiyonları

$(X, <)$ ve $(Y, \prec)$ iki sıralama olsun. Eğer X'ten Y'ye giden bir f fonksiyonu her $x_1, x_2 \in X$ için,

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \prec f(x_2) \tag{1}$$

koşulunu sağlıyorsa, yani sıralamaya saygı duyuyorsa, o zaman f'ye (sıralamaların) ***eşyapı fonksiyonu*** adı verilir. Bu fonksiyonlara ***mutlak artan fonksiyonlar*** da denir.

Bir eşyapı göndermesi birebir olmak zorunda değildir. Örneğin $X = \{a, b\}$ boşsıralamayla sıralanmışsa ve $Y = \{c\}$ ise, X'ten Y'ye giden sabit c fonksiyonu yukardaki koşulu sağlar ama birebir değildir elbet. Aşağıda birebir olmayan bir başka eşyapı fonksiyonu örneği var. Bu örnekte $f(a) = x < y = f(b) = f(c)$.



Yukardaki örnekten de görüleceği üzere, bir f eşyapı fonksiyonu, her $x_1, x_2 \in X$ için,

$$x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \preccurlyeq f(x_2) \tag{2}$$

koşulunu sağlamayabilir.

Öte yandan (2) koşulunu sağlayan bir f fonksiyonu, ki bunlara ***artan fonksiyonlar*** denir, birebir olmalıdır. Nitekim, eğer $f(x_1) = f(x_2)$ ise, hem $f(x_1) \leq f(x_2)$ hem de $f(x_2) \leq f(x_1)$ olduğundan, hem $x_1 \leq x_2$ hem de $x_2 \leq x_1$ koşulları sağlanır; dolayısıyla $x_1 = x_2$ olmak zorundadır. Dolayısıyla eğer f fonksiyonu (2) koşulunu sağlıyorsa (1) koşulunu da sağlar.

Bu aşamada fikir değiştirip bir eşyapı fonksiyonundan (1) yerine daha güçlü olan (2) koşulunu sağlamasını isteyebiliriz. Şöyle de yapabiliriz: (1) koşulunu sağlayanlara *<-**eşyapı fonksiyonu***, (2) koşulunu sağlayanlara *≤-**eşyapı fonksiyonu*** diyebiliriz. Demek ki ≤-eşyapı fonksiyonları <-eşyapı fonksiyonularıdır ama bunun tersi doğru değildir. Hangisinin sözkonusu olduğu bilindiğinde kısaca ***eşyapı fonksiyonu*** diyeceğiz. (Aşağıda göreceğimiz üzere tamsıralamalarda böyle bir ayrım yapmak gereksizdir.)

Eşyapı fonksiyonlarının birkaç özelliği:

a. İki eşyapı fonksiyonunun bileşkesi bir eşyapı fonksiyonudur.

b. Özdeşlik fonksiyonu Id_X, X'ten X'e giden bir eşyapı fonksiyonudur.

c. Eğer f bir eşyapı eşlemesiyse (yani birebir ve örtense), o zaman f^{-1} de bir eşyapı fonksiyonudur.

Bunların kolay kanıtını okura bırakıyoruz.

Eğer X bir tamsıralamaysa, X'ten Y'ye giden bir <-eşyapı fonksiyonu birebir olmak zorundadır. Nitekim $f(x_1) = f(x_2)$ olsun. Eğer $x_1 < x_2$ ise $f(x_1) < f(x_2)$ olur ve bu bir çelişkidir. Eğer $x_2 < x_1$ ise benzer şekilde bir çelişki elde edilir. Demek ki $x_1 = x_2$. Ayrıca birebir bir <-eşyapı fonksiyonu bir ≤-eşyapı fonksiyonu olmak zorundadır. Bunun kanıtını okura bırakıyoruz. Demek ki tamsıralamalarda bu iki kavram arasında bir ayrım yok. Dolayısıyla X bir tamsıralama olduğunda iki kavram örtüşür.

Eşyapı eşlemeleri bir sıralamayı aynen kendisine benzeyen bir sıralamaya götürler, yani eğer $f : X \to Y$ bir eşyapı eşlemesiyse, X'in sıralamasıyla Y'nin sıralaması, elemanlarının adları dışında aynıdır. Bu iki sıralamanın elemanlarının adlarını silersek arada bir fark göremeyiz. Aralarında eşyapı eşlemesi olan sıralamalara ***eşyapısal sıralamalar*** diyeceğiz. Örneğin, eğer f bir eşyapı eşlemesiyse,

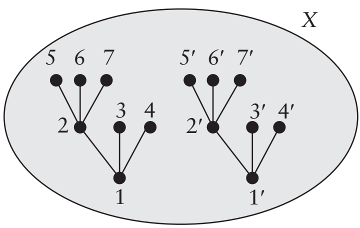
a) X'in bir en küçük elemanı varsa ve bu eleman a ise, Y'nin de en küçük elemanı vardır ve bu eleman $f(a)$'dır.

b) x'in bir sonraki elemanı varsa $f(x)$'in de bir sonraki elemanı vardır ve $f(x^+) = f(x)^+$ eşitliği sağlanır.

c) Her $x \in X$ için $f(x, \infty) = (f(x), \infty)$ eşitliği sağlanır.

d) Eğer $A \subseteq X$ ise ve $\sup A$ varsa, $\sup f(A)$ da vardır ve $f(\sup A)$'ya eşittir.

Eğer $X = Y$ ve sıralamalar aynıysa, eşyapı eşlemesi yerine ***özyapı eşlemesi*** denir. Basit bir örnek olarak aşağıdaki sıralamanın özyapı eşleşmelerini bulalım.



1 ve 1′ elemanlarını sabit tutarak ama 5, 6 ve 7 elemanlarını, 3 ve 4 elemanlarını, 5′, 6′ ve 7′ elemanlarını, 3′, 4′ elemanlarını kendi aralarında dilediğimiz gibi değiştirerek

$$3! \times 2! \times 3! \times 2! = 144$$

tane eşyapı eşleşmesi elde ederiz. Ayrıca sağdaki ve soldaki parçaları tahmin edilebileceği biçimde (n'yi n' elemanına ve n' elemanını n'ye yollayarak, bu eşleşmeye τ diyelim) değiş tokuş edebiliriz. Böylece toplam $144 \times 2 = 288$ tane eşyapı eşleşmesi elde ederiz. Başka da eşyapı eşleşmesi yoktur. Bunu kanıtlayalım. φ, böyle bir eşyapı eşleşmesi olsun. O zaman φ, X'in minimal elemanlarını yani 1 ve 1′ elemanlarını gene X'in minimal elemanlarına gönderir. Eğer $\varphi(1) = 1'$ ise, $\varphi \circ \tau$ de bir eşyapı eşleşmesidir ama bu kez bu yeni eşleşme 1 ve $1'$ elemanlarını sabitler. Gerekirse φ yerine $\varphi \circ \tau$ eşleşmesini alarak φ'nin 1 ve $1'$ elemanlarını sabitlediğini varsayabiliriz. Bu koşulları sağlayan bir φ'nin yukardaki 144 eşleşmeden biri olacağı malum.

Eğer $(X, <)$ ve $(Y, <)$ sıralamaları arasında bir eşyapı eşlemesi varsa, o zaman $(X, <) \approx (Y, <)$ ya da (eğer sıralamalar biliniyorsa ya da çok barizse) kısaca $X \approx Y$ yazılır.

Şimdi birkaç sıralamanın özyapı eşleşmelerini bulalım.

Teorem 2.1. $(\mathbb{N}, <)$ *sıralamasının bir tek özyapı eşleşmesi vardır*: $\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ *özdeşlik fonksiyonu.*

Kanıt. f bir eşyapı eşleşmesi olsun. f, en küçük eleman olan 0'ı gene 0'a göndermelidir. Tümevarımla f'nin n'yi n'ye gittiğini varsayarsak,

$$f(n^+) = f(n)^+ = n^+$$

olur (neden?) ve böylece f'nin her elemanı sabitlediği kanıtlanır. Yani $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$'dir. □

Teorem 2.2. $(\mathbb{Z}, <)$ *sıralamasının özyapı eşleşmeleri belli bir* $n \in \mathbb{Z}$ *için* $f_n x = x + n$ *eşitliğini sağlayan* f_n *fonksiyonlarıdır.*

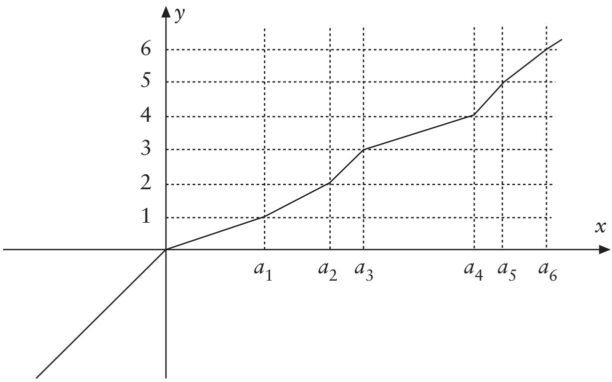
Kanıt: Her f_n fonksiyonunun artan bir eşleşme (yani özyapı eşleşmesi) olduğu belli. Şimdi $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ artan bir eşleşme olsun. $f(0) = n$ olsun. x üzerine tümevarımla, her $x \in \mathbb{N}$ için $f(x) = x + n$ eşitliği şöyle kanıtlanır:

$$f(x + 1) = f(x^+) = f(x)^+ = (x + n)^+ = (x + n) + 1 = (x + 1) + n.$$

Benzer şekilde (x^+ yerine x^- kullanarak) her $x \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ için $f(x) = x + n$ eşitliği kolaylıkla kanıtlanır. □

$(\mathbb{Q}, <)$ sıralamasının çok özyapı eşleşmesi vardır. Aşağıdaki şekilden anlaşılacağı üzere, her

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\} \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$$



altkümesi için, $(\mathbb{Q}, <)$ sıralamasının ayrı bir özyapı eşleşmesi bulunabilir.

Teorem 2.3. *X herhangi bir küme olsun. $\wp(X)$, X'in altkümeleri kümesi olsun. Her $f : X \to X$ fonksiyonu için*
$$\varphi_f : \wp(X) \to \wp(X)$$
fonksiyonunu, her $A \in \wp(X)$ için,
$$\varphi_f(A) = f(A) = \{f(a) : a \in A\}$$
olarak tanımlayalım. φ_f, $(\wp(X), \subseteq)$ sıralamasının bir özyapı eşleşmesidir, yani her $A, B \in P(X)$ için,
$$A \subseteq B \Leftrightarrow \varphi(A) \subseteq \varphi(B)$$
olur. Ayrıca her $\varphi : \wp(X) \to \wp(X)$ özyapı eşleşmesi, belli bir $f : X \to X$ eşleşmesi için, φ_f'ye eşittir.

Kanıt: i. Önce $\varphi(\emptyset) = \emptyset$ eşitliğini kanıtlayacağız. $\varphi(A) = \emptyset$ olsun (φ örten olduğundan böyle bir A var.) A'nın herhangi bir B altkümesini alalım. Verilen koşuldan dolayı, $\varphi(B) \subseteq \varphi(A) = \emptyset$, yani $\varphi(B) = \emptyset$. Demek ki $\varphi(B) = \emptyset = \varphi(A)$. Bundan da, φ birebir olduğundan, $B = A$ çıkar. A'nın bir tek altkümesi olduğunu kanıtladık. Demek ki $A = \emptyset$.

ii. Şimdi, tek elemanlı kümelerin tek elemanlı kümelere gittiğini göstereceğiz. $A = \{x\}$ olsun. B, $\varphi(A)$'nın bir altkümesi olsun. C, $\varphi(C) = B$ eşitliğini sağlasın (φ örten olduğundan, böyle bir C

vardır.) Demek ki $\varphi(C) = B \subseteq \varphi(A)$. Soruda verilen koşuldan dolayı $C \subseteq A$. Ama A tek elemanlı bir küme. Dolayısıyla ya $C = \emptyset$ ya da $C = A$. Sonuç olarak,

$$\text{ya } B = \varphi(C) = \varphi(\emptyset) = \emptyset \text{ ya da } B = \varphi(C) = \varphi(A).$$

Demek ki $\varphi(A)$'nın sadece iki altkümesi var: $\emptyset$ ve $\varphi(A)$. Dolayısıyla $\varphi(A)$ tek elemanlı bir kümedir.

iii. Eğer $x \in X$ ise, $\varphi(\{x\})$ kümesinin tek elemanlı olduğunu yukarda kanıtladık. $\varphi(\{x\})$ kümesinin o tek elemanına $f(x)$ diyelim:

$$\varphi(\{x\}) = \{f(x)\}.$$

Böylece X'ten X'e giden bir f fonksiyonu tanımlamış oluruz.

Eğer $a \in A \subseteq X$ ise, $\{a\} \subseteq A$, dolayısıyla $\{f(a)\} = \varphi(\{a\}) \subseteq \varphi(A)$ ve $f(a) \in \varphi(A)$. Demek ki $f(A) \subseteq \varphi(A)$. Daha eşitliği bilmiyoruz.

φ birebir olduğundan, f'nin de birebir olduğu kolaylıkla kanıtlanır. Öte yandan daha f'nin örten olduğunu da bilmiyoruz.

iv. Şimdi f'nin örten olduğunu kanıtlayacağız. $a \in X$ olsun. $A = \{a\}$ olsun. X'in B altkümesi $\varphi(B) = A$ eşitliğini sağlasın (φ örten olduğundan böyle bir B vardır.) B'nin tek elemanlı bir küme olduğunu kanıtlayacağız. Soruda verilen koşuldan ve φ'nin birebir olmasından dolayı B'nin sadece iki altkümesi vardır: Eğer $C \subseteq B$ ise, $\varphi(C) \subseteq \varphi(B) = A = \{a\}$, yani ya $\varphi(C) = \emptyset = \varphi(\emptyset)$ ya da $\varphi(C) = A = \varphi(B)$, yani ($\varphi$ birebir olduğundan) ya $C = \emptyset$ ya da $C = B$. İki altkümesi olan kümeler tek elemanlı kümeler olduğundan B'nin tek bir elemanı vardır. Eğer $b \in B$ ise,

$$\{f(b)\} = \varphi(\{b\}) = \varphi(B) = A = \{a\}$$

ve $f(b) = a$. Demek ki f örtenmiş. Şimdi artık f'nin bir eşleşme olduğunu biliyoruz.

v. Artık, her $A \subseteq X$ için, $f(A) = \varphi(A)$ eşitliğini kanıtlayabiliriz. iii'te $f(A) \subseteq \varphi(A)$ ilişkisini kanıtladık. $b \in \varphi(A)$ olsun. $f(a) = b$ eşitliğini sağlayan a elemanını alalım (iv'te f'nin örten olduğunu kanıtlamıştık.) $\varphi(\{a\}) = \{f(a)\} = \{b\} \subseteq \varphi(A)$ olduğundan, soruda verilen koşuldan dolayı, $\{a\} \subseteq A$, yani $a \in A$, yani $b = f(a) \in f(A)$. Demek ki $\varphi(A) \subseteq f(A)$.

Şimdi artık, her $A \subseteq X$ için, $\varphi(A) = f(A)$ eşitliğini biliyoruz. Yani $\varphi = \varphi_f$. □

Şimdi de şu ilginç soruya yanıt arayalım: Ya bir önceki teoremde

$$\text{her } A, B \in P(X) \text{ için } A \subseteq B \Leftrightarrow \varphi(A) \subseteq \varphi(B)$$

koşulunu

$$\text{her } A, B \in P(X) \text{ için } A \subseteq B \Rightarrow \varphi(A) \subseteq \varphi(B)$$

koşuluyla değiştirirsek ne olur? Bu son özelliği sağlayan

$$\varphi : \wp(X) \to \wp(X)$$

eşleşmelerine ***yarı-özyapı eşleşmesi*** diyelim.

Teorem 2.4. *($\wp(X), \subseteq$) sıralamasının yarı-özyapı eşleşmeleri özyapı eşleşmeleridir.*

Kanıt: $\varphi : \wp(X) \to \wp(X)$ bir yarı-özyapı eşleşmesi olsun. φ'nin bir $f : X \to X$ eşleşmesi tarafından belirlendiğini kanıtlayacağız. Çeşitli aşamalardan geçeceğiz.

Sav 1. $\varphi(\emptyset) = \emptyset$.

Kanıt: $A \subseteq X$ altkümesi $\varphi(A) = \emptyset$ eşitliğini sağlasın. Soruda verilen koşula göre A'nın her altkümesi boşkümenin bir altkümesine denk düşer. Demek ki A'nın sadece bir altkümesi vardır. Bundan da A'nın boşküme olduğu anlaşılır.

Sav 2. $\varphi(X) = X$.

Kanıt: $A \subseteq X$ altkümesi $\varphi(A) = X$ eşitliğini sağlasın. O zaman A'yı içeren her altküme, φ altında, X'i içeren bir altkümeye, yani X'e gitmek zorunda. Demek ki A'yı içeren tek bir küme vardır, dolayısıyla $A = X$'tir.

Sav 3. *$y \in X$ olsun. $A \subseteq X$ altkümesi, $\varphi(A) = \{y\}$ eşitliğini sağlasın. O zaman A'nın tek bir elemanı vardır.*

Kanıt: Soruda verilen koşula göre, A'nın her altkümesi $\{y\}$ kümesinin bir altkümesine denk düşer. Demek ki A'nın en fazla iki altkümesi vardır. A'nın tek bir altkümesi olsaydı, $A = \emptyset$ olurdu ve, Sav 1'e göre, $\{y\} = \varphi(A) = \varphi(\emptyset) = \emptyset$ olurdu, ki bu bir çelişkidir. Demek ki A'nın iki altkümesi vardır. Bundan da A'nın tek elemanlı olduğu anlaşılır.

U kümesini şöyle tanımlayalım:

$$U = \{x \in X : \varphi(\{x\}) \text{ tek bir elemanlı küme}\}.$$

Şimdi de $f : U \to X$ fonksiyonunu tanımlayalım: Eğer $x \in U$ ise, $\varphi(\{x\}) = \{f(x)\}$ olsun. Sav 3'e göre, f'nin, U'dan X'e giden bir eşleme olduğu bariz. Önce U'nun X'e eşit olduğunu, sonra da φ'nin $f : X \to X$ eşleşmesi tarafından verildiğini kanıtlayacağız.

Sav 4. *$y \in X$ olsun. $x \in U$ elemanı $f(x) = y$ eşitliğini sağlasın. O zaman $\varphi(X \setminus \{x\}) = X \setminus \{y\}$ eşitliği geçerlidir.*

Kanıt: $A \subseteq X$ altkümesi $\varphi(A) = X \setminus \{y\}$ eşitliğini sağlasın. A'yı içeren her altküme, φ eşleşmesi altında, $X \setminus \{y\}$ kümesini içeren bir kümeye denk düşer. Demek ki A'yı içeren en fazla iki altküme vardır. Sav 2'ye göre $A \neq X$. Dolayısıyla A'yı içeren tam iki altküme vardır. Bu da, A'nın, belli bir $x \in X$ için, $A = X \setminus \{x\}$ olması demektir.

$z \in U$, $f(z) = y$ eşitliğini sağlasın. Eğer $z \neq x$ ise olacakları görelim: Her şeyden önce $\{z\} \subseteq X \setminus \{x\}$. Demek ki

$$\{y\} = \{f(z)\} = \varphi(\{z\}) \subseteq \varphi(X \setminus \{x\}) = X \setminus \{y\},$$

yani $y \in X \setminus \{y\}$, bir çelişki. Dolayısıyla $x = z \in U$ ve $f(x) = y$.

Sav 5. *Eğer $A \subseteq X$ ise, $f(A \cap U) \subseteq \varphi(A) \subseteq f(A^c \cap U)^c$.*

Kanıt: $A \subseteq X$ olsun. $a \in A \cap U$ olsun. O zaman, $\{a\} \subseteq A$ ve $a \in U$ olduğundan, $\{f(a)\} = \varphi(\{a\}) \subseteq \varphi(A)$. Demek ki $f(a) \in \varphi(A)$. Bundan da $f(A \cap U) \subseteq \varphi(A)$ çıkar.

Şimdi $a \in A^c \cap U$ olsun. O zaman, $A \subseteq X \setminus \{a\}$ olduğundan ve $a \in U$ olduğundan, bir önceki sava göre,

$$\varphi(A) \subseteq \varphi(X \setminus \{a\}) = X \setminus \{f(a)\}.$$

Demek ki $f(a) \notin \varphi(A)$, yani $f(a) \in \varphi(A)^c$. Bundan da

$$f(A^c \cap U) \subseteq \varphi(A)^c$$

çıkar, yani $\varphi(A) \subseteq f(A^c \cap U)^c$.

Sav 6. *Eğer $A \subseteq X$ ise*, $\varphi(A) = f(A \cap U)$.

Kanıt: $f(A^c \cap U)^c = f(U \setminus (A \cap U))^c = (f(U) \setminus f(A \cap U))^c = (X \setminus f(A \cap U))^c = f(A \cap U)$ eşitliğinden ve Sav 5'ten istediğimiz çıkar.

Artık istediğimizi kanıtlayabiliriz. Sav 6'da $A = X$ alırsak,

$$\varphi(X) = f(X \cap U) = \varphi(X \cap U) = \varphi(\mathrm{U})$$

çıkar, yani $X = U$. Demek ki $U = X$ ve gene yukardaki sava göre

$$\varphi(A) = f(A \cap U) = f(A \cap X) = f(A).$$

Kanıtımız bitmiştir. □

Alıştırma. *P, $\mathbb{N}$'nin asal sayıları kümesi olsun.* $(\mathbb{N}, |)$ *sıralamasının tüm özyapı eşleşmelerini bulun.*

3. Sayılabilir Yoğun Sıralamalar

Bu bölümün konusu kesirli sayıların bildiğimiz $(\mathbb{Q}, <)$ sıralamasıdır. Burada sözü edilen $<$ eşitsizliği ilkokuldan beri âşina olduğumuz eşitsizliktir; örneğin $2/3 < 4/5$.

Daha sonra matematiksel olarak ifade edeceğimiz şu olguyu kanıtlayacağız:

$(\mathbb{Q}, <)$ *sıralamasının birazdan açıklayacağımız bazı özelliklerine sahip sıralamalar* "*aynen ama aynen*" $(\mathbb{Q}, <)$ *sıralamasına benzeyen sıralamalardır*.

Bir başka ama gene edebi bir deyişle, $(\mathbb{Q}, <)$ sıralaması birazdan sıralayacağımız birkaç özelliği tarafından betimlenebilir/karakterize edilir.

$(\mathbb{Q}, <)$ sıralamasının özünü karakterize eden bu 'bazı özellikleri' birazdan sıralayacağız. "Aynen ama aynen benzemek"i Altbölüm 2.4'te tanımladığımız "eşyapısal olmak" anlamına kullandık. Gene de eşyapısallığı bu bölümde bir kez daha tanımlayacağız.

Önce $(\mathbb{Q}, <)$ sıralamasını karakterize edecek olan önemli özelliklerini teker teker yazalım.

Her şeyden önce $(\mathbb{Q}, <)$ bir ***sıralamadır***, yani,

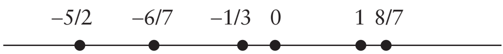
(1) *Hiç bir x için, $x < x$ doğru değildir.*

(2) *Her x, y, z için, eğer $x < y$ ve $y < z$ ise, o zaman $x < z$'dir.*

$(\mathbb{Q}, <)$ yalnızca bir sıralama değil, ayrıca bir ***tamsıralamadır*** da: Herhangi iki kesirli sayı birbiriyle kıyaslanabilir:

(3) *Her x, y için, ya $x < y$ ya $x = y$ ya da $y < x$.*

Bunun sonucu olarak kesirli sayıları bir doğru üstünde temsil edebiliriz. Matematikçiler arasında yapılan sözsüz bir anlaşma gereği, soldaki sayılar sağdakilerden daha küçüktür.



$(\mathbb{Q}, <)$ sıralamasının temsili. Mesafeler korunmamış olabilir ama sıralama korunmuştur.

Ayrıca $(\mathbb{Q}, <)$ ***yoğun*** bir sıralamadır: Herhangi iki kesirli sayı arasında üçüncü bir kesirli sayı vardır, daha matematiksel bir dille,

(4) *Her $x < y$ için, $x < z < y$ eşitsizliklerini sağlayan bir z vardır.*

Örneğin $z = (x + y)/2$ kesirli sayısı x'le y arasındadır.

En az iki elemanı olan bir yoğun sıralama sonsuz olmak zorundadır elbette. Öte yandan $(\mathbb{Z}, <)$ sıralaması sonsuzdur ama yoğun değildir.

$(\mathbb{Q}, <)$ sıralamasında ne en küçük ne en büyük eleman vardır, yani her kesirli sayıdan daha büyük bir kesirli sayı ve her kesirli sayıdan daha küçük bir kesirli sayı vardır:

(5) *Her x için, $x < y$ eşitsizliğini sağlayan bir y vardır.*

(6) *Her x için, $y < x$ eşitsizliğini sağlayan bir y vardır.*

(5)'te $y = x + 1$, (6)'da $y = x - 1$ alabiliriz.

Son iki özelliği sağlayan sıralamalara ***uçsuz sıralamalar*** denir. Örneğin, gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$, pozitif kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}^{>0}$, $(0, 1)$ gerçel aralığı ve $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$ kümeleri doğal sıralamayla birlikte uçsuz ve yoğun sıralamalardır. Öte yandan $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ gerçel sayı aralığı uçsuz değildir.

$\mathbb{Q}$ kümesinin bir özelliği daha vardır:

(7) *Sayılabilir sonsuzluktadır.*

Yani kesirli sayıları 0, 1, 2, 3, 4, ... diye doğal sayıları kullanarak koyun sayar gibi hiçbirini atlamadan teker teker sayabiliriz; her kesirli sayıyı doğal sayılarla numaralandırabiliriz [SKK]. Öte yandan, gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ sayılabilir sonsuzlukta değildir, elemanları teker teker doğal sayılarla sayılamaz.

Yukardaki (1-7) özelliklerini sağlayan $(X, <)$ yapılarına ***uçsuz, yoğun ve sayılabilir tamsıralamalar*** denir. Örneğin $(\mathbb{Q}, <)$ bu tür sıralamalardandır.

Şimdi bu 7 özelliğin $(\mathbb{Q}, <)$ yapısını (hemen aşağıda tanımlayacağımız anlamda) karakterize ettiğini göstereceğiz. Kanıta geçmeden önce, "karakterize etmek"i hangi matematiksel anlamda kullandığımızı söylemeliyiz.

$(X, <)$ ve $(Y, <)$ sıralamaları verilmiş olsun. Demek ki her iki yapı da (1) ve (2) özelliklerini sağlıyor. $f : X \to Y$, her $x_1, x_2 \in X$ için,

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

özelliğini sağlayan bir eşleme olsun. Böyle bir f fonksiyonuna ***eşyapı eşlemesi*** (ya da ***izomorfi*** ya da ***izomorfizma)*** adı verilir ve bu durumda X ve Y'nin ***eşyapısal*** oldukları söylenir ve

$$(X, <) \approx (Y, <)$$

ya da eğer sıralamalar biliniyorsa kısaca $X \approx Y$ yazılır.

Şimdi artık kanıtlamak istediğimiz teoremi yazabiliriz.

Teorem 3.1. *Uçsuz, yoğun ve sayılabilir herhangi iki tamsıralama eşyapısaldır.*

$(\mathbb{Q}, <)$ sıralaması uçsuz, yoğun ve sayılabilir olduğundan, teoremden, her uçsuz, yoğun ve sayılabilir sıralamanın $(\mathbb{Q}, <)$ sıralamasıyla eşyapısal olduğu çıkar.

Örnekler. Teoremi kanıtlamadan önce uçsuz, yoğun ve sayılabilir sıralamalara örnekler verelim ve bu sıralamalar arasında eşyapı eşlemesi bulalım.

1) En bilineni: $(\mathbb{Q}, <)$.

2) Pozitif kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}^{>0}$, doğal sıralamayla. Bundan sonraki tüm örneklerimizin sıralaması doğal sıralama olacağından, sadece kümeyi yazmakla yetineceğiz.

3) Negatif kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}^{<0}$.

4) Sıfır olmayan kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}^*$.

5) $\mathbb{Q} \cup \{\pi\}$.

6) $(\sqrt{2}, \infty)_\mathbb{Q}$, yani $(\sqrt{2}, \infty) \cap \mathbb{Q}$ kümesi.

7) $(0, \sqrt{2})_\mathbb{Q} = (0, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$.

8) $(0, 1)_\mathbb{Q} = (0, 1) \cap \mathbb{Q}$.

9) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})_\mathbb{Q} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$.

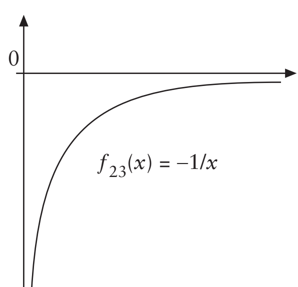
Teoreme göre bu sıralamaların herbiri eşyapısal olmalı, çünkü herbiri uçsuz, yoğun ve sayılabilir sonsuzluktadır. Bu sıralamalar arasında eşyapı eşlemeleri bulalım. Örneklerimiz eğlendirici ve öğretici olmasaydı, hiç böyle bir zahmete girmezdik.

$(2 \approx 3)$. Önce ikinciyle üçüncünün eşyapısal olduğunu gösterelim. Şu iki eşlemenin bileşkesini alalım:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Q}^{>0} & \to & \mathbb{Q}^{>0} & \to & \mathbb{Q}^{<0} \\ x & \mapsto & 1/x & \mapsto & -1/x \end{array}$$

Her ikisi de sıralamayı ters çevirdiğinden (yani azalan fonksiyonlar olduklarından) bileşkeleri sıralamayı korur. Bu eşyapı eşlemesine f_{23} diyelim:

$$f_{23}(x) = -1/x.$$



$(3 \approx 8)$. Şimdi üçüncüyle sekizincinin eşyapısal olduğunu gösterelim. Aşağıdaki eşlemeleri takip edelim:

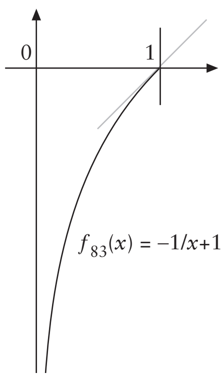
$$\begin{array}{ccccccc} (0, 1)_{\mathbb{Q}} & \to & (1, \infty)_{\mathbb{Q}} & \to & (-\infty, -1)_{\mathbb{Q}} & \to & \mathbb{Q}^{<0} \\ x & \mapsto & 1/x & \mapsto & -1/x & \mapsto & -1/x + 1 \end{array}$$

Birinci ve ikinci eşleme sıralamayı ters çevirir, üçüncüsü korur, dolayısıyla üçünün bileşimi sıralamayı iki kez ters çevirerek sıralamayı korur.

Bu eşyapı eşlemesine f_{83} diyelim:

$$f_{83}(x) = -1/x + 1.$$

Görmek isteyen için f_{83} fonksiyonunun grafiği aşağıda.



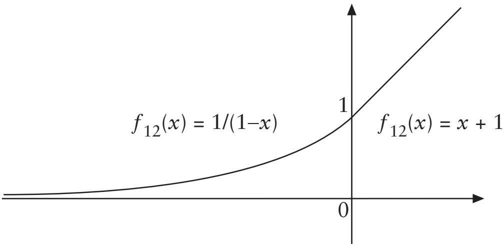
$(1 \approx 2)$. $\mathbb{Q}$ ile $\mathbb{Q}^{>0}$ sıralamaları arasında bir eşyapı eşlemesi bulacağız. $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{Q}^{>0}$ kümelerini şöyle uygun biçimde parçalayalım:

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{<0} \sqcup \mathbb{Q}^{\geq 0} \approx (0, 1)_{\mathbb{Q}} \sqcup [1, \infty)_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}^{>0}.$$

($\sqcup$ simgesi, $\cup$ gibi bileşim anlamına gelir, ancak, ayrıca, bileşimi alınan kümelerin ayrık olduğunu söyler.) Şimdi bu parçalanmaya bakarak, $\mathbb{Q}$ ile $\mathbb{Q}^{>0}$ sıralamaları arasında bir f_{12} eşyapı eşlemesi bulunabilir:

$$f_{12}(x) = \begin{cases} f_{38}(x) = \dfrac{1}{1-x} & \text{eğer } x < 0 \text{ ise} \\ x + 1 & \text{eğer } x \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

Bu eşyapı eşlemesinin grafiği bir sonraki sayfada.



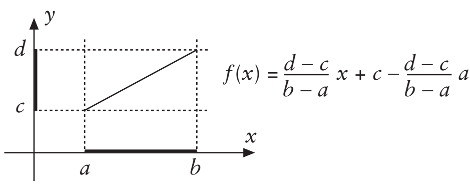
$(7 \approx 8)$. Önce, herhangi iki kesirli $a < b$ sayısı için, $(0, 1)_{\mathbb{Q}} \approx (a, b)_{\mathbb{Q}}$ eşyapısallığı gösterelim:

$$\begin{array}{ccccc} (0, 1)_{\mathbb{Q}} & \to & (0, b-a)_{\mathbb{Q}} & \to & (a, b)_{\mathbb{Q}} \\ x & \mapsto & (b-a)x & \mapsto & (b-a)x + a \end{array}$$

Böylece, $(0, 1)_{\mathbb{Q}}$ ile $(a, b)_{\mathbb{Q}}$ sıralamaları arasında sıralamayı koruyan bir eşleme elde etmiş oluruz. Bundan da her $a < b$ ve $c < d$ kesirli sayıları için,

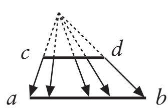
$$(a, b)_{\mathbb{Q}} \approx (c, d)_{\mathbb{Q}} \text{ ve } [a, b)_{\mathbb{Q}} \approx [c, d)_{\mathbb{Q}}$$

eşyapısallıkları çıkar.



$[a, b] \approx [c, d]$

Sıralamayı koruyan bir eşleşmeyi şöyle de gösterebiliriz:



Şimdi, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ için, $a_n = 1 - 1/(n+1)$ olsun. $(a_n)_n$ artarak 1'e yakınsayan bir kesirli sayılar dizisidir. $(b_n)_n$ de artarak $\sqrt{2}$'ye yakınsayan bir kesirli sayılar dizisi olsun. Örneğin b_n'yi $\sqrt{2}$'nin ilk n basamağı olarak alabiliriz, o zaman,

$$\sqrt{2} = 1{,}41421713562373\ldots$$

olduğundan,

$$b_0 = 0$$
$$b_1 = 1$$
$$b_2 = 1{,}4$$
$$b_3 = 1{,}41$$
$$b_4 = 1{,}414$$
$$b_5 = 1{,}4142$$

olur. Biraz yukarda gördüğümüz üzere, her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$[a_n, a_{n+1})_{\mathbb{Q}} \approx [b_n, b_{n+1})_{\mathbb{Q}}.$$

Bu eşyapısallığı gerçekleştiren fonksiyona f_n diyelim:

$$f_n : [a_n, a_{n+1})_{\mathbb{Q}} \to [b_n, b_{n+1})_{\mathbb{Q}}.$$

Şimdi,

$$[0, 1)_{\mathbb{Q}} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} [a_n, a_{n+1})_{\mathbb{Q}}$$

ve

$$[0, \sqrt{2})_{\mathbb{Q}} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} [b_n, b_{n+1})_{\mathbb{Q}}$$

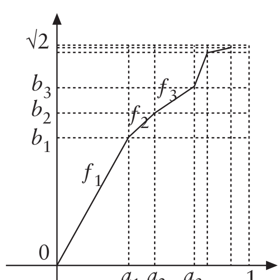
eşitliklerinden yola çıkarak f_n fonksiyonlarını yapıştırsak,

$$f : [0, 1)_{\mathbb{Q}} \to [0, \sqrt{2})_{\mathbb{Q}}$$

eşyapı eşlemesini elde ederiz. f'nin biçimsel tanımı şöyle:

$$f(x) = f_n(x) \text{ eğer } x \in [a_n, a_{n+1})_{\mathbb{Q}} \text{ ise.}$$

f fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.



(6 ≈ 8 ≈ 9). Benzer biçimde kanıtlanırlar. Alıştırma olarak okura bırakılmıştır.

(1 ≈ 4). Daha önce kanıtladığımız eşyapısallıklar ve benzerlerinden,

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q} &\approx (0, 2)_{\mathbb{Q}} && (1 \approx 8)\\
&= (0, \sqrt{2})_{\mathbb{Q}} \sqcup (\sqrt{2}, 2)_{\mathbb{Q}} &&\\
&\approx (0, 1)_{\mathbb{Q}} \sqcup (1, 2)_{\mathbb{Q}} && (8 \approx 7)\\
&\approx \mathbb{Q}^{<0} \sqcup \mathbb{Q}^{>0} = \mathbb{Q}^* && (7 \approx 2)
\end{aligned}$$

çıkar.

$(1 \approx 5)$. Daha önce kanıtladığımız eşyapısallıklar ve benzerlerinden,

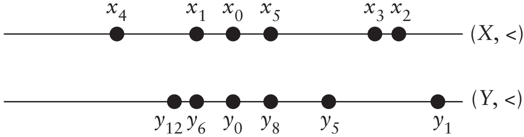
$$\begin{aligned}
\mathbb{Q} \sqcup \{\pi\} &\approx \mathbb{Q}^* \sqcup \{\pi\} && (1 \approx 2)\\
&= \mathbb{Q}^{<0} \sqcup \mathbb{Q}^{>0} \sqcup \{\pi\} &&\\
&\approx (-\infty, \pi)_{\mathbb{Q}} \sqcup \{\pi\} \sqcup (\pi, \infty)_{\mathbb{Q}} && (3 \approx 6)\\
&= \mathbb{Q} &&
\end{aligned}$$

bulunur.

Yazının geri kalan kısmında teoremi kanıtlayacağız. Kanıtın yöntemine ***gelgit yöntemi*** adı verilir.

Teoremin Kanıtı. Sıralamalar $(X, <)$ ve $(Y, <)$ olsun. X ve Y sayılabilir olduklarından, X ve Y kümelerinin elemanlarını $n \in \mathbb{N}$ için, x_n ve y_n olarak "sırayla" yazabiliriz. Burada, $n \neq m$ için $x_n \neq x_m$ ve $y_n \neq y_m$ varsayımlarını yapıyoruz.

X ve Y'nin elemanlarının numaralandırılmaları birbirleriyle ilgisiz olabilirler. X'ten ilk altı eleman alalım. Y'den de rast-

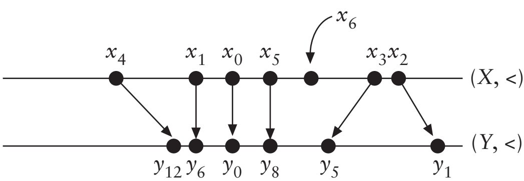


gele altı eleman alalım. Bu elemanların dizilişi yukardaki şekildeki gibi olabilir. Dikkat ederseniz ilk altı eleman için sıralamalar birbirlerine benziyorlar çünkü ne de olsa altışar elemanı olan iki tamsıralamadan söz ediyoruz.

$$x_4 \mapsto y_{12}$$
$$x_1 \mapsto y_6$$
$$x_0 \mapsto y_0$$
$$x_5 \mapsto y_8$$
$$x_3 \mapsto y_5$$
$$x_2 \mapsto y_1$$

eşlemesi bu iki sonlu sıralama arasında bir eşyapı eşlemesidir. Bu tür eşlemelere ***kısmi eşyapı eşlemesi*** denir.

Şimdi bir sonraki eleman olan x_6'ya ve x_6'nın x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 elemanlarına göre pozisyonuna bakalım. x_6 bu altı eleman tarafından belirlenen 7 aralıktan birinde olmalı. Diyelim x_6'nın yeri şöyle:



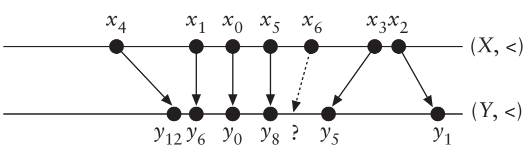
Y'nin,

$$y_{12} < y_6 < y_0 < y_8 < y_5 < y_1$$

elemanlarına göre pozisyonu, X'te x_6'nın

$$x_4 < x_1 < x_0 < x_5 < x_3 < x_2$$

elemanlarına göre pozisyonuna benzer olan bir y elemanı bulabilir miyiz? x_6 elemanı x_5 ile x_3 arasında olduğundan, Y'de y_8 ile y_5 arasında bir eleman bulmalıyız. Y'de böyle bir eleman var mıdır?



Evet vardır, çünkü Y'nin sıralaması yoğun olduğundan, herhangi iki eleman arasında üçüncü bir eleman vardır. Dolayısıyla y_8 ile y_5 arasında da bir eleman vardır. y_8 ile y_5 arasında olan elemanlardan herhangi birini alalım, diyelim y_7 bu özelliği sağlıyor, yani y_8 ile y_5 arasında. Demek ki

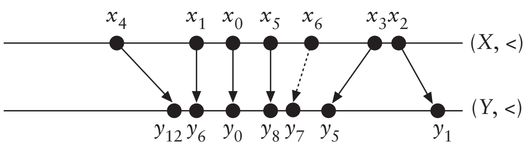
$$y_{12} < y_6 < y_0 < y_8 < y_7 < y_5 < y_1.$$

Dolayısıyla x_6'nın x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 elemanlarına göre pozisyonu, aynen y_7'nin y_{12}, y_6, y_0, y_8, y_5, y_1 elemanlarına göre pozisyonu.

Şimdi yukardaki kısmi eşyapı eşlemesini x_6'yı y_7'ye gidecek şekilde büyütebiliriz:

$$\begin{gathered} x_4 \mapsto y_{12} \\ x_1 \mapsto y_6 \\ x_0 \mapsto y_0 \\ x_5 \mapsto y_8 \\ x_6 \mapsto y_7 \\ x_3 \mapsto y_5 \\ x_2 \mapsto y_1 \end{gathered}$$

Şimdilik resim şöyle:



Bir sonraki x_7 elemanını da ekleyip kısmi eşyapı eşlemesini bir adım daha genişletebiliriz. Bunun için x_7'nin x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 elemanlarına göre pozisyonunu belirlemek ve Y'de bu pozisyona uyan bir eleman bulmak yeterlidir.

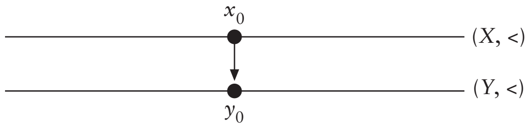
Bunu sürekli yapabiliriz ve sonuçta X'ten Y'ye giden ve sıralamaya saygı duyan bir fonksiyon bulabiliriz. Bu fonksiyon birebir olacaktır ama ne yazık ki örten olmak zorunda değildir.

Fonksiyonu örten yapmak için bir X'ten Y'ye bir de (Y'de hiçbir eleman unutmamak için) Y'den X'e gitmeliyiz.

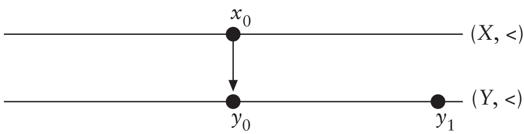
Yöntem şöyle. İlk adımda X'in x_0 elemanını Y'de herhangi bir elemana yollayalım. Bu eleman y_0 olsun:

$$x_0 \mapsto y_0$$

İlk kısmi eşyapı eşlemesini bulduk. Resmi aşağıda.



Bu ilk adımda X'ten Y'ye gittik. Şimdi Y'den X'e gideceğiz. Y'de şimdiye kadar erişmediğimiz ilk elemanı alalım. Y'nin ilk erişilmeyen elemanı y_1. y_1'in y_0'a göre konumuna bakalım. İki şık var ya $y_1 < y_0$ ya da $y_1 > y_0$. İkinci şıkta olduğumuzu varsayalım.



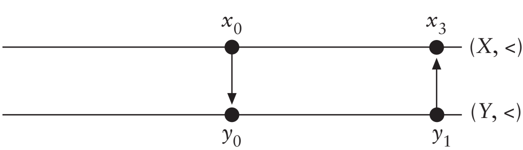
Şimdi $(X, <)$ sıralamasında, x_0'a göre konumu y_1'in y_0'a göre konumuna benzeyen bir eleman bulmaya çalışacağız. y_1, y_0'dan daha büyük olduğundan, X'te x_0'dan daha büyük bir eleman bulmalıyız. X'te böyle bir eleman var mı? Evet vardır, çünkü X'in en büyük elemanı olmadığından, her elemandan, x_0'dan da büyük bir eleman var. Bu eleman x_1 olmayabilir belki, belki x_2 de olmayabilir, ama mutlaka x_0'dan büyük bir eleman olmalı. x_0'dan büyük elemanlar arasından göstergeçi en küçük olanını seçelim. Bu elemana x_3 diyelim. (Demek ki x_1 ve x_2 elemanları x_0'dan daha küçük, ama bunun gelecekte hiçbir önemi olmayacak.) Şimdi x_3'le y_1'i eşleştirip daha önceki

$$x_0 \mapsto y_0$$

kısmi eşyapı eşlemesini genişletelim:

$$x_0 \mapsto y_0$$
$$x_3 \mapsto y_1$$

Bu da ikinci kısmi eşleme. Resmi aşağıda:



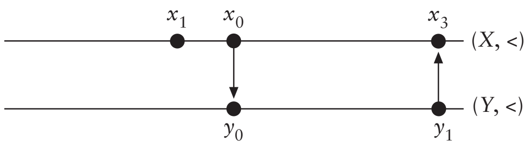
İkinci adımda Y'den X'e gittik. Üçüncü adımda X'ten Y'ye gideceğiz. X'in daha önce dokunmadığımız elemanlarından en küçük göstergeçi olanını seçelim. X'in x_0 ve x_3 elemanlarına dokunmuşuz. x_1'e daha dokunmamışız. x_1'in daha önce dokunulmuş olan x_0 ve x_3 elemanlarına göre konumuna bakalım. Önümüzde üç şık var.

Birinci şık: $x_1 < x_0 < x_3$.

İkinci şık: $x_0 < x_1 < x_3$.

Üçüncü şık: $x_0 < x_3 < x_1$.

(Aslında birinci şıkta olmamız gerektiğini biliyoruz, ama daha önce söylediğimiz gibi bunun hiçbir önemi yok.) Birinci şıkta olduğumuzu varsayalım: $x_1 < x_0 < x_3$.



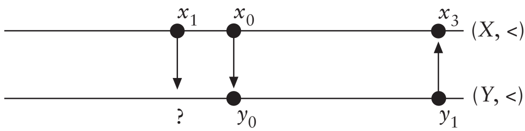
Şimdi, $(Y, <)$ sıralamasında, y_0 ve y_1'e göre konumu, x_1'in x_0 ve x_3'e göre olan konumuna benzeyen bir eleman bulmaya çalışacağız.

$$x_1 < x_0 < x_3$$

olduğundan, Y'de

$$y < y_0 < y_1$$

eşitsizliklerini, yani $y < y_0$ eşitsizliğini sağlayan bir y elemanı bulmalıyız. Böyle bir eleman var mıdır?



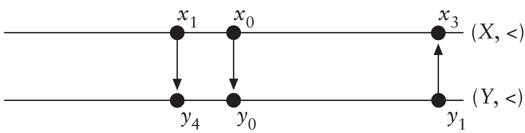
Vardır, çünkü Y'nin ilk elemanı olmadığından, her elemandan, y_0'dan da küçük bir eleman vardır. Bu eleman y_2 olmayabilir, y_3 de olmayabilir, ama böyle bir eleman mutlaka olmalı. Bu koşulu sağlayan ve daha önce dokunulmamış elemanlardan en küçük endislisini alalım, diyelim y_4. Şimdi, daha önce bulduğumuz,

$$x_0 \mapsto y_0$$
$$x_3 \mapsto y_1$$

kısmi eşyapı eşleşmesini

$$x_0 \mapsto y_0$$
$$x_1 \mapsto y_4$$
$$x_3 \mapsto y_1$$

olarak genişletelim. Resmi aşağıda:



Bir sonraki adımda, ki bu üçüncü adım, Y'den hareket edeceğiz. Y'de daha önce bulaşmadığımız en küçük göstergeçli eleman y_2. Bu y_2 elemanının daha önce bulaşılmış olan y_0, y_1 ve y_4 elemanlarına göre konumuna bakalım. Dört şık olabilir.

Birinci şık: $y_2 < y_4 < y_0 < y_1$.

İkinci şık: $y_4 < y_2 < y_0 < y_1$.

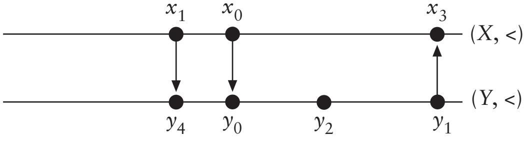
Üçüncü şık: $y_4 < y_0 < y_2 < y_1$.

Dördüncü şık: $y_4 < y_0 < y_2 < y_1$.

Üçüncü şıkta olduğumuzu varsayalım:

$$y_4 < y_0 < y_2 < y_1.$$

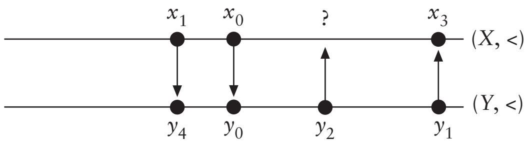
Durum şöyle:



Şimdi, $(X, <)$ sıralamasında, x_0, x_1 ve x_3'e göre konumu, y_2'nin y_0, y_1 ve y_4'e göre olan konumuna benzeyen bir eleman bulmaya çalışacağız. Yani X'te

$$x_1 < x_0 < x < x_3.$$

eşitsizliklerini, yani $x_0 < x < x_3$ eşitsizliklerini sağlayan bir x elemanı bulmalıyız. Böyle bir eleman var mıdır?



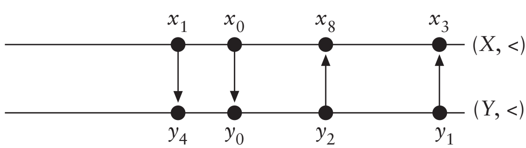
Vardır, çünkü X'in sıralaması yoğundur; herhangi iki eleman arasında olduğu gibi, x_0 ve x_3 elemanları arasında da bir eleman vardır. Bu elemanlar arasından göstergeçi en küçük olanı seçelim. Diyelim x_8 elemanı $x_0 < x_8 < x_3$ eşitsizliklerini sağlayan en küçük endisli eleman. Şimdi, daha önce bulduğumuz,

$$\begin{gathered} x_0 \mapsto y_0 \\ x_1 \mapsto y_4 \\ x_3 \mapsto y_1 \end{gathered}$$

kısmi eşyapı eşleşmesini

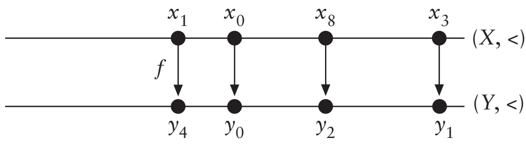
$$\begin{gathered} x_0 \mapsto y_0 \\ x_1 \mapsto y_4 \\ x_3 \mapsto y_1 \\ x_8 \mapsto y_2 \end{gathered}$$

olarak genişletelim. Resmi aşağıda:



Bunu böylece sürdürebiliriz. Ne X'te ne de Y'de bir eleman unutmadığımızdan emin olmak için, tek sayılı adımlarda X'ten, çift sayılı adımlarda Y'den başlarız.

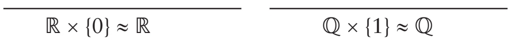
X ve Y sayılabilir olduğundan, bu yöntemi sonsuza kadar sürdürürsek, X ve Y'nin sıralamalarının eşyapısal olduklarını görürüz. Yukardaki örnekte elde edilen eşleme şöyle olur:



3.1. Sayılamaz Sonsuzluktaki Yoğun ve Uçsuz Sıralamalar. Eğer kümeler sayılabilir sonsuzlukta değilse teorem yanlıştır. Örneğin gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'nin sonuna kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}$'yü koyalım, yani $(\mathbb{R} \times \{0\}) \sqcup (\mathbb{Q} \times \{1\})$ kümesini alalım ve bu kümeyi şöyle sıralayalım:

$$(x, 0) < (y, 0) \Leftrightarrow \mathbb{R}\text{'de } x < y \text{ ise}$$
$$(x, 1) < (y, 1) \Leftrightarrow \mathbb{Q}\text{'de } x < y \text{ ise}$$
$$(x, 0) < (y, 1) \text{ her koşulda.}$$

Bu sıralamanın resmi şöyle:



Bu sıralamaya (kümeye de) $\mathbb{R} + \mathbb{Q}$ adını verelim. Bu sıralamanın uçsuz ve yoğun olduğu çok açık olmalı.

$\mathbb{R} + \mathbb{Q}$ kümesiyle $\mathbb{R}$ kümesi arasında bir eşleşme vardır. (Bu eşlemeyi bulabilir misiniz?) Ama bu iki sıralama arasında bir eşyapı eşlemesi yoktur. Bunu kanıtlayalım.

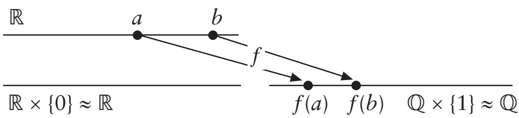
Diyelim $\mathbb{R}$ sıralamasından $\mathbb{R} + \mathbb{Q}$ sıralamasına giden bir f eşyapı eşleşmesi var. O zaman

$$f(a) = (0, 1)$$
$$f(b) = (1, 1)$$

eşitliklerini sağlayan $a, b \in \mathbb{R}$ vardır. $0 < 1$ olduğundan

$$(0, 1) < (1, 1)$$

olur, dolayısıyla $a < b$. f sıralamaya saygı duyduğundan $[a, b]$ ara-



lığı f altında $(0, 1)$ ile $(1, 1)$ arasındaki tüm elemanlara yani

$$[0, 1]_{\mathbb{Q}} \times \{1\}$$

kümesine gitmelidir. Bu da $[a, b]$ aralığı ile $[0, 1]_{\mathbb{Q}}$ kesirli sayılar arasında bir eşlemeye yol açar ki, bir gerçel sayı aralığının sayılabilir sonsuzlukta olmadığını biliyoruz [SKK].

4. İyisıralamaları Hissetmek

İyisıralamayı koyun sıralamaya benzetmek pek yanlış olmaz. Sonsuz sayıda koyun da olsa, iyisıralanmış bir koyun sürüsünde mutlaka birinci koyun olmalı. İkinci, üçüncü, dördüncü koyun da... Son koyun dışında (eğer varsa öyle bir koyun!), her koyundan hemen sonra gelen bir koyun olmalı. Dahası, sürü öyle sıralanmalı, yani koyunlar öyle numaralanmalı ki, her altsürüde numarası en küçük bir koyun olsun... İşte bu son özelliği sağlayan sıralamalara ***iyisıralama*** denir.

Sonlu bir sürüyü iyisıralamak marifet sayılmaz, bunu mühendisler bile yapar. Az sonsuz (örneğin doğal sayılar kadar sonsuz olan) sürüleri iyisıralamak da marifet sayılmaz. Marifet, çok sonsuz (örneğin gerçel sayılar kadar olan) sürüleri iyisıralamakta. Bu ve bundan sonraki birkaç bölümün ana sorularından biri de işte bu: Bir sürü ne kadar büyük olursa olsun iyisıralanabilir mi?

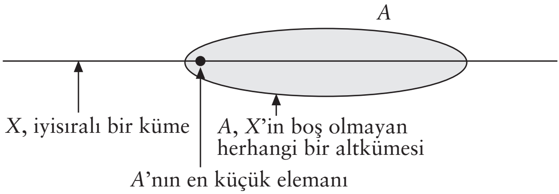
Şu teoremi biliyoruz [Sİ]:

Teorem 4.1. $\mathbb{N}$'*nin boş olmayan her altkümesinin bir en küçük elemanı vardır.*

4.1. İyisıralama. $(\mathbb{N}, <)$ sıralamasında olduğu gibi, boş olmayan her altkümesinin en küçük elemanı olduğu sıralamalara *iyisıralama* denir. Yani bir $(X, <)$ sıralamasının iyi sıralama olması için,

> **İS.** *Her* $\emptyset \neq A \subseteq X$ *altkümesi için, öyle bir* $a \in A$ *vardır ki her* $x \in A$ *için* $a \leq x$ *olur*

özelliğinin sağlanması gerekir.

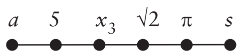


İS özelliğini sağlayan $(X, <)$ sıralamalarına ***iyisıralama*** denir. X'e de $<$ sıralamasıyla ***iyisıralanmıştır*** denir.

Tanımdan hemen anlaşılacağı üzere, bir iyisıralamanın her altkümesi de bir iyisıralamadır, yani $(X, <)$ bir iyisıralamaysa ve $Y \subseteq X$ ise, $(Y, <)$ de bir iyisıralamadır; sonuçta, Y'nin her altkümesi X'in de bir altkümesidir.

İyisıralı kümeler tamsıralıdır, yani iyisıralı bir kümenin herhangi iki elemanı karşılaştırılabilir. Nitekim, eğer x ve y iyisıralı bir kümenin iki elemanıysa ve İS özelliğinde $A = \{x, y\}$ alırsak, x ve y'den birinin diğerinden küçükeşit olduğunu görürüz.

Sonlu her tamsıralama iyisıralama olmak zorundadır elbette.



Sonlu bir iyisıralama:
$a \prec 5 \prec x_3 \prec \sqrt{2} \prec \pi \prec s$

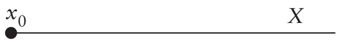
Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'nin doğal sıralamasıyla birlikte bir iyisıralama olduğunu gördük. Doğal sıralamayla iyisıralanmış bir küme olarak görüldüğünde $\mathbb{N}$ yerine ω (omega, Yunan alfabesinin son harfi) yazmak bir gelenektir; biz de bundan böyle $\mathbb{N}$ yerine sık sık ω yazacağız.

Bu bölümde iyisıralamaları biraz olsun anlamaya çalışacağız.

(X, <) herhangi bir iyisıralama olsun.

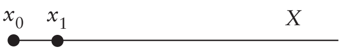
Eğer $X = \emptyset$ ise söylenecek fazla bir şey yok, boşküme hakkında ne söylenebilirse, bu iyisıralama hakkında da o kadar söylenebilir.

Eğer $X \neq \emptyset$ ise, o zaman İS özelliğinde $A = X$ alarak, X'in bir en küçük elemanı olduğunu görürüz. X'in bu en küçük elemanına x_0 diyelim. (Demek ki boş olmayan her iyi sıralamanın bir en küçük elemanı vardır.)



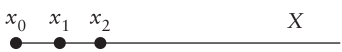
(X, <) iyisıralaması ve X'in en küçük elemanı x_0

Şimdi $X \setminus \{x_0\}$ kümesine bakalım. Eğer bu küme boşsa, o zaman X sadece x_0 elemanından oluşmuştur ve gene söyleyecek fazla bir şey olamaz. Eğer $X \setminus \{x_0\}$ kümesi boş değilse, o zaman İS özelliğinde $A = X \setminus \{x_0\}$ alalım ve bu kümenin en küçük elemanına x_1 diyelim. x_1, x_0'dan sonra gelen ilk elemandır.



(X, <) iyisıralaması ve X'in en küçük iki elemanı x_0 ve x_1

Eğer $X = \{x_0, x_1\}$ ise, X iyisıralaması için tek söyleyebileceğimiz şey, x_0'ın x_1'den küçük olduğudur. Diyelim X sadece bu iki elemandan ibaret değil. O zaman $X \setminus \{x_0, x_1\}$ kümesi boş olmadığından, İS özelliğine göre bu kümenin bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana x_2 diyelim. x_2, x_1'den sonra gelen ilk elemandır.

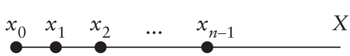


(X, <) iyisıralaması ve X'in en küçük üç elemanı x_0, x_1 ve x_2

Bunu böylece sürdürebiliriz. n-inci aşamada, X'in en küçük ilk n elemanını bulduk diyelim. Bu elemanlara (sırasıyla!)

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$$

diyelim.



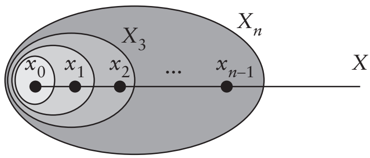
Şimdi,

$$X_n = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}\}$$

tanımını yapalım. Demek ki

$$X_0 = \varnothing,$$
$$X_1 = \{x_0\}$$
$$X_2 = \{x_0, x_1\}$$
$$X_3 = \{x_0, x_1, x_2\}$$

vb.



Eğer $X \neq X_n$ ise, yani $X \setminus X_n \neq \varnothing$ ise, o zaman İS özelliğine göre $X \setminus X_n$ kümesinin bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana x_n diyelim. x_n, x_{n-1}'den sonra gelen ilk elemandır.

X'in tüm elemanlarını bu yöntemle sonlu bir zaman sonra tüketirsek, yani belli bir n doğal sayısı için,

$$X = X_n = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}\}$$

ise, o zaman X sonlu bir kümedir (tam n elemanı vardır) ve sıralaması doğal sıralanmış

$$\{0, 1, ..., 2, n-1\}$$

kümesinden pek farklı değildir. Doğal sıralanmış

$$\{0, 1, ..., 2, n-1\}$$

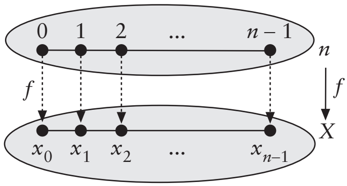
kümesinin n olarak simgelenmesi okuru şaşırtmamalı [Sİ]:

$$n = \{0, 1, ..., 2, n-1\}$$

ve

$$0 < 1 < .... < n-1.$$

X'in sonlu tane, diyelim n tane elemanı varsa, yukarda da dediğimiz gibi, X iyisıralaması aynen n iyisıralanmasına benzer, elemanların adlarından başka aralarında bir fark yoktur. Daha matematiksel deyişle n'den X'e giden ve sıralamayı koruyan (yani sürekli artan) bir f eşlemesi vardır. Bu f eşlemesi i sa-



Eğer X'in n elemanı varsa, $X \approx n$

yısını x_i elemanına götürür, yani her $i < n$ için, $f(i) = x_i$'dir. (Burada x_i, X'in i-inci elemanıdır.)

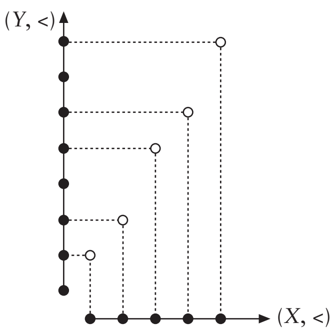
Sıralamayı bozmayan fonksiyonlara ***eşyapı fonksiyonu*** ya da ***sıralama morfizması*** adı verilir, kısaca ***morfizma*** dendiği de olur. Matematiksel tanım şöyle: $(X, <)$ ve $(Y, <)$ birer iyisıralama olsunlar ve $f : X \to Y$ fonksiyonu, her $x_1, x_2 \in X$ için,

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

özelliğini sağlasın. O zaman f'ye ***sıralama morfizması*** adı verilir. Okullarda sıralama morfizması daha çok ***artan fonksiyon*** adıyla anılır.

İyisıralanmış kümeler üzerine sıralama morfizmaları birebir olmak zorundadır, çünkü iyisıralı bir küme tamsıralıdır. Nitekim, $f(x_1) = f(x_2)$ ise ne $x_1 < x_2$ ne de $x_2 < x_1$ doğru olabilir, dolayısıyla, tamsıralamadan dolayı, $x_1 = x_2$ olmalı.

Eğer f sıralama morfizması ayrıca örtense, o zaman f'ye ***sıralama eşlemesi*** denir. Aralarında bir eşyapı eşlemesi olan $(X, <)$ ve $(Y, <)$ iyisıralamalarına ***eşyapısal*** (ya da ***izomorfik***) denir ve bu olgu $(X, <) \approx (Y, <)$ ya da kısaca $X \approx Y$ olarak gösterilir.



Bir sıralama morfizması

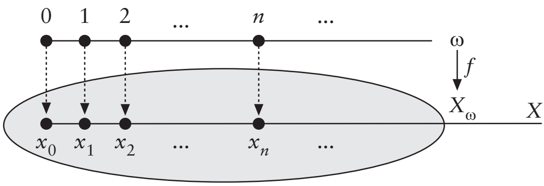
Demek ki tam n tane elemanı olan iyisıralı bir kümeyle

$$n = \{0, 1, ..., 2, n - 1\}$$

iyisıralaması eşyapısaldır. Böylece sonlu iyisıralamaları anlamış olduk. Sıra geldi sonsuz iyisıralamalara...

Bundan böyle X sonlu olmasın. O zaman her n doğal sayısı için X'in n-inci elemanı vardır. Bu elemana x_n demiştik, demeye de devam edeceğiz.

*B*u x_n elemanlarından ($n \in \mathbb{N}$) oluşan kümeye X_ω adını verelim. X_ω'nın aynen $\mathbb{N}$'ye (daha doğrusu ω'ya) benzediğini okur anlamıştır herhalde, yani X_ω ile ω (yani doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$) arasında bir sıralama eşlemesi vardır: $X_\omega \approx \omega$.

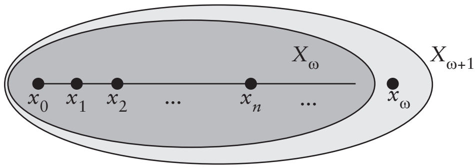


$X_\omega = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \approx \omega$

Not: X_ω'nın gerçekten bir küme olduğu pek bariz olmayabilir. [Sİ] ders notlarımızda kümeler kuramının birkaç basit aksiyomunu vermiştik. Bu aksiyomlara dayanarak X_ω'nın küme olduğunu kanıtlayabiliriz: $\varphi(x)$ şu özellik olsun: "$\{y \in X : y < x\}$ kümesiyle bir doğal sayısı arasında bir eşleme var." $X_\omega = \{x \in X : \varphi(x)\}$ eşitliğinden dolayı, X_ω bir kümedir. (Tanımlanabilir Altküme Aksiyomu, [Sİ].)

İki seçenek var. Ya $X = X_\omega \approx \omega$ ya da $X \neq X_\omega$. Birinci şıkta X'in neye benzediği belli, ω'ya benzer. İkinci şıkta yoğunlaşalım. O zaman $X \setminus X_\omega$ boşküme değildir, dolayısıyla en küçük bir elemanı vardır. Bu elemana x_ω diyelim. x_ω elemanı daha önce bulduğumuz bütün x_n ($n \in \mathbb{N}$) elemanlarından **hemen** sonra gelen **ilk** elemandır, yani x_ω elemanı, her n doğal sayısı için, $x_n < x$ eşitsizliğini sağlayan X'in en küçük elemanıdır.

$X_{\omega+1} = X_\omega \cup \{x_\omega\}$ olsun. Burada ω+1 simgesine özel bir anlam vermeye çalışmayın, ω+1'i daha sonra tanımlayacağız. Şimdilik ω+1 simgesini tek bir simge gibi algılayıp $X_{\omega+1}$ iyisıralamasına yoğunlaşın: $X_{\omega+1}$ iyisıralaması, X_ω iyisıralamasının "sonuna" x_ω elemanı eklenerek elde edilmiştir.

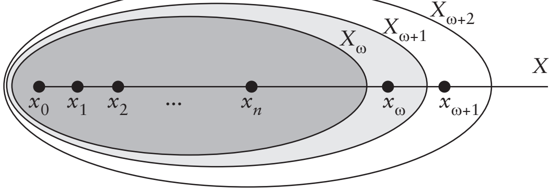


Eğer x_ω, X'in son elemanıysa, yani X'te x_n'lerden ve x_ω'dan başka eleman kalmamışsa, o zaman $X = X_\omega \cup \{x_\omega\} = X_{\omega+1}$'dir. Bu durumda, X'i ve sıralamasını anladık: X, sonuna bir eleman eklenen ω'ya benziyor. (Bir sonraki bölümde bir iyisıralamanın sonuna bir eleman eklemenin ne demek olduğunu daha ayrıntılı bir biçimde anlatacağız.)

Eğer x_ω, X'in son elemanı değilse, yani $X \neq X_{\omega+1}$ ise, o zaman $X \setminus X_{\omega+1} \neq \emptyset$ olur ve $X \setminus X_{\omega+1}$ kümesinin bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana, tahmin edeceğiniz gibi, $x_{\omega+1}$ diyelim. $x_{\omega+1}$, x_ω'dan sonra gelen ilk elemandır. Gene tahmin edeceğiniz gibi

$$X_{\omega+2} = X_{\omega+1} \cup \{x_{\omega+1}\} = X_\omega \cup \{x_\omega, x_{\omega+1}\}$$

olsun.



Genel olarak, bir n doğal sayısı için, X'in

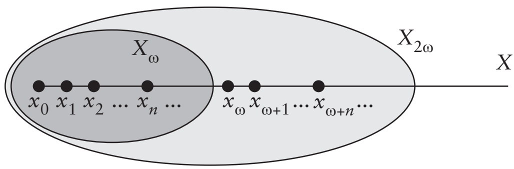
$$X_{\omega+n} = X_\omega \cup \{x_\omega, x_{\omega+1}, ..., x_{\omega+n-1}\}$$

altkümesini bulduğumuzu varsayalım. Eğer belli bir n doğal sayısı için $X = X_{\omega+n}$ ise ne âlâ, X'i anladık demektir. Eğer $X_{\omega+n} \neq X$

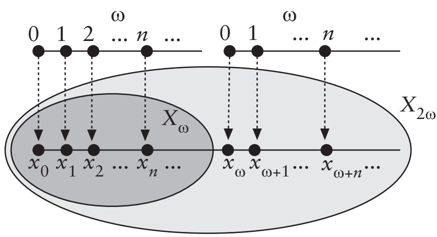
ise $X \setminus X_{\omega+n}$ kümesinin en küçük bir elemanı olmalı. Bu elemana $x_{\omega+n}$ diyelim. Eğer hiçbir n doğal sayısı için $X \neq X_{\omega+n}$ ise o zaman bu yöntemle X'i tüketemeyiz ve sürekli $x_{\omega+n}$ elemanlarını buluruz.

$$X_{2\omega} = X_\omega \cup \{x_{\omega+n} : n \in \mathbb{N}\}$$

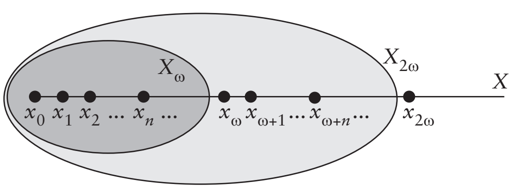
olsun.



$X_{2\omega}$ sıralamasının nasıl bir sıralama olduğu belli. Başında ω (yani ℕ) iyisıralaması var. Bir de sonunda **ayrı** bir ω var. Demek ki $X_{2\omega}$, ω'nın (yani doğal sayılar kümesinin) iki ayrık kopyasından oluşuyor, biri başında (küçükler), diğeri sonunda (büyükler).



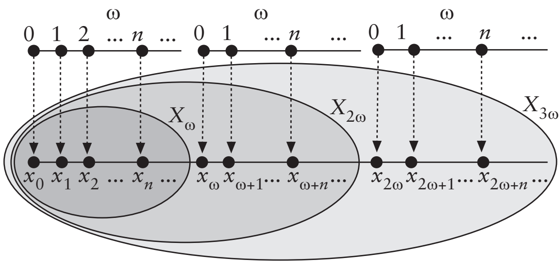
Eğer $X = X_{2\omega}$ ise, işimiz bitti, o zaman X'i ve iyisıralamasını anladık. Eğer $X \neq X_{2\omega}$ ise, o zaman $X \setminus X_{2\omega}$ kümesinin bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana $x_{2\omega}$ diyelim.



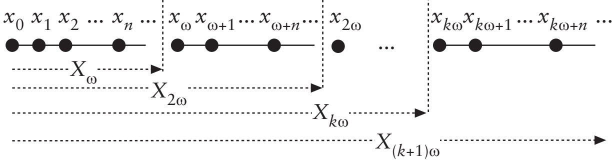
Bunu böylece sürdürebiliriz. X'te $x_{2\omega}$'dan daha büyük bir eleman varsa, $x_{2\omega}$'dan daha büyük elemanların en küçüğüne $x_{2\omega+1}$ diyelim. Varsa, malum yöntemle $x_{2\omega+2}$, $x_{2\omega+3}$, ... elemanlarını bulalım. Eğer X'in sonuna varırsak işimiz biter. Yoksa,

$$X_{3\omega} = X_{2\omega} \cup \{x_{2\omega+n} : n \in \mathbb{N}\}$$

olsun. Eğer $X = X_{3\omega}$ ise o zaman X, ω'nın üç kopyasından oluşuyor demektir: küçük kopya, ortanca kopya, üçüncü kopya.



Kendimizi biraz fazla tekrarlamaya başladık... k-inci seviyeye kadar, yani $X_{k\omega}$'ya kadar geldiğimizi varsayalım. $X_{k\omega}$, sıralama olarak ω'nın k tane kopyasına benzer: 1'inci kopya, 2'inci kopya, ..., k-inci kopya. Her kopya kendi içinde doğal sıralanmıştır ve her kopyanın tüm elemanları daha sonraki kopyaların tüm elemanlarından daha küçüktür. Örneğin üçüncü



kopyanın 25'i, dördüncü kopyanın 2'sinden daha küçüktür.

Eğer $X_{k\omega} = X$ ise işimiz bitti. Yoksa $X \setminus X_{k\omega}$ kümesinin en küçük bir elemanı olmalı. Bu elemana $x_{k\omega}$ diyelim. $x_{k\omega}$'dan hemen sonra gelen elemana $x_{k\omega+1}$ diyelim. (Eğer $x_{k\omega}$, X'in en büyük elemanı değilse böyle bir eleman vardır.) Devam edip $x_{k\omega+2}$, $x_{k\omega+3}$, ... elemanlarını da (varsa!) bulabiliriz. X'te eleman kaldığı sürece devam edelim. Eğer $x_{k\omega+n}$ elemanlarının hiçbiri X'in en büyük elemanı değilse (k sabit, n değişiyor) bu yöntemi hiç durmadan sürdürebiliriz. $X_{(k+1)\omega}$ şimdiye kadar bulduğumuz tüm elemanların kümesi olsun. ($X_{(k+1)\omega}$ bir kümedir, güvenin bana!) Eğer $X = X_{(k+1)\omega}$ ise, durmak zorundayız ve bu durumdan pek yakınmıyoruz herhalde. Ama eğer $X \neq X_{(k+1)\omega}$ ise, o zaman boş olmayan $X \setminus X_{(k+1)\omega}$ kümesinin en küçük elemanına $x_{(k+1)\omega}$ diyelim ve mümkün olduğu sürece bu yöntemle yolumuza devam edelim. Böylece her k doğal sayısı için $X_{k\omega}$ kümelerini elde ettiğimizi ama X'in bu yöntemle tükenmediğini varsayalım.

X_{ω^2}, tüm bu $X_{k\omega}$ kümelerinin bileşimi olsun:

$$X_{\omega^2} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_{k\omega}.$$

Alıştırma: X_{ω^2} topluluğunun bir küme olduğunu kanıtlayın. (X'in iyisıralı bir küme olduğunu kullanabilirsiniz.)

Eğer $X_{\omega^2} = X$ ise sorun yok. Eğer $X_{\omega^2} \neq X$ ise $X \setminus X_{\omega^2}$ kümesinin en küçük elemanına x_{ω^2} diyelim. $X_{\omega^2+1} = X_{\omega^2} \cup \{x_{\omega^2}\}$ olsun.

Eğer X'te başka eleman kalmamışsa o zaman $X = X_{\omega^2+1}$'dır. Kalmışsa, x_{ω^2}'den hemen sonra gelen bir eleman vardır. Bu elemana x_{ω^2+1} adını verelim. Eğer X'in elemanları bitmezse, X'in

$$x_{\omega^2+1},\ x_{\omega^2+2},\ x_{\omega^2+3},\ x_{\omega^2+4},\ \ldots$$

elemanlarını bulabiliriz.

$X_{\omega^2+\omega}$ kümesi X'in şimdiye kadar bulabildiğimiz tüm elemanlarından oluşsun.

$$x_{\omega^2+\omega},\ x_{\omega^2+\omega+1},\ x_{\omega^2+\omega+2},\ x_{\omega^2+\omega+3},\ \ldots$$

elemanlarının nasıl bulunabileceğini okur tahmin etmiştir: Her biri bir öncekinden hemen sonra gelen elemandır. Bu $x_{\omega^2+\omega+k}$ elemanlarının sonu gelmiyorsa, tüm bu elemanlar kümesine $X_{\omega^2+2\omega}$ diyelim.

Okur herhalde, eğer X tükenmezse,

$$X_{\omega^2+3\omega},\ X_{\omega^2+4\omega},\ X_{\omega^2+5\omega},\ \ldots$$

kümelerinin nasıl bulunduklarını anlamıştır. Bunların bileşimine $X_{2\omega^2}$ diyelim. Gidebildiğimiz kadar gidelim. Eğer X tükenmezse, sırayla

$$X_{2\omega^2},\ X_{3\omega^2},\ X_{4\omega^2},\ \ldots$$

kümelerini elde ederiz. Bunların bileşimine de X_{ω^3} diyelim. Eğer X daha önce tükenmezse, X'in

$$X_{\omega^3},\ X_{\omega^4},\ X_{\omega^5},\ \ldots$$

kümelerini elde ederiz. Bunların bileşimine de X_{ω^ω} diyelim.

Ardından sırayla X_{ω^ω}, $X_{2\omega^\omega}$, $X_{3\omega^\omega}$, ... altkümelerini de bulabiliriz. Bunların bileşimine $X_{\omega\omega^\omega}$, ya da $X_{\omega^{\omega+1}}$ diyelim. Bundan sonra $X_{\omega^{\omega+2}}$, $X_{\omega^{\omega+3}}$, $X_{\omega^{\omega+4}}$ altkümeleri (başlangıç dilimleri) bulunur. Devam edelim ve tüm bu altkümelerin bileşimine $X_{\omega^{\omega+\omega}}$ ya da $X_{\omega^{2\omega}}$ diyelim. Devam edelim. Sırayla $X_{\omega^{3\omega}}$, $X_{\omega^{4\omega}}$, $X_{\omega^{4\omega}}$,... altkümelerini de bulruuz. Bunların bileşimine $X_{\omega^{\omega\omega}}$ ya da $X_{\omega^{\omega^2}}$ diyelim. Eğer X'i hala daha bitirememişsek, $X_{\omega^{\omega^3}}$, $X_{\omega^{\omega^4}}$, $X_{\omega^{\omega^5}}$, ... altkümelerini de bulabiliriz. Bunların bileşimine $X_{\omega^{\omega^\omega}}$ diyelim. X'in hala daha bitmediğini varsayalım.

$$\alpha_1 = \omega,$$
$$\alpha_2 = \omega^\omega,$$
$$\alpha_3 = \omega^{\omega^\omega},$$
$$\alpha_4 = \omega^{\omega^{\omega^\omega}},$$
$$\alpha_5 = \omega^{\omega^{\omega^{\omega^\omega}}}$$

olsun. Genel olarak,

$$\alpha_{n+1} = \omega^{\alpha_n}$$

olarak tanımlansın (α_n^ω olarak değil!) Bu tanımlar şimdilik biçimsel, yani α_n'ler anlamsız şeyler. α_n'leri göstergeç (endis, indeks) olarak kullanacağız. X_{α_1}, X_{α_2}, X_{α_3} altkümelerinin nasıl bulunabileceğini okur tahmin etmiştir. Eğer X izin verirse, devam edip, her $n \in \mathbb{N}$ için, X'in X_{α_n} altkümelerini de bulabiliriz. X'in hiç bitmediğini varsayarak, X_{α_n} altkümelerinin bileşimine X_{ε_0} diyelim.

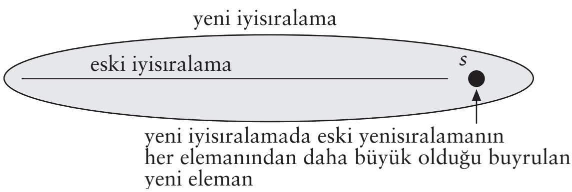
X'te yer kalmışsa devam edebiliriz. İsteyen devam etsin. Ben sıkıldım.

İmkânsız Uğraş. Okur, konunun zevkine daha çok varmak için doğal sayılar kümesinin altkümelerinin kümesi olan $\wp(\mathbb{N})$'nin bir iyisıralamasını bulmaya çalışmalıdır. En az yarım saat kadar. En fazla da bir saat... Bir saati aşmasın çünkü - önceden söyleyelim - başaramayacaktır. $\wp(\mathbb{N})$'nin bir iyisıralaması bulunamaz ama vardır. $\wp(\mathbb{N})$'nin iyisıralanabileceğini (iyisıralamayı bulamadan) ilerde yeni aksiyom yardımıyla kanıtlayacağız.

5. Eski İyisıralamalardan Yeni İyisıralamalar Türetmek

Bu bölümde eski iyisıralamalardan yenilerini elde etmeyi öğreneceğiz. Basitten zora doğru gideceğiz.

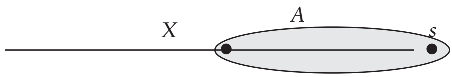
5.1. İyisıralamanın Sonuna Bir Eleman Eklemek. Bu altbölümde, bir iyisıralamanın "en sonuna" yeni bir eleman ekleyeceğiz.



$(X, <)$ bir iyisıralama olsun. s, X'te olmayan bir eleman olsun. X'teki sıralamayı koruyarak ama s'yi X'in her elemanından büyük yaparak $X \cup \{s\}$ kümesini sıralayabiliriz. $X \cup \{s\}$ kümesi üzerine kurulan ve $\prec$ olarak simgeleyeceğimiz bu yeni sıralama biçimsel olarak şöyle tanımlanır: $x, y \in X \cup \{s\}$ için, $x \prec y$ ancak ve ancak

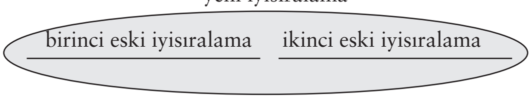
1) $x, y \in X$ ve $x < y$ ise ya da
2) $x \in X$ ve $y = s$ ise.

Bu sıralama da bir iyisıralamadır. Nitekim A, $X \cup \{s\}$ kümesinin boş olmayan bir altkümesi olsun. Eğer $A \cap X \neq \emptyset$ ise, o za-



man $A \cap X$ kümesinin $<$ sıralamasına göre en küçük elemanı A'nın $\prec$ sıralamasına göre en küçük elemanıdır. Öte yandan eğer $A \cap X = \emptyset$ ise o zaman $A = \{s\}$ olmak zorundadır ve s elbette bu durumda A'nın en küçük elemanıdır.

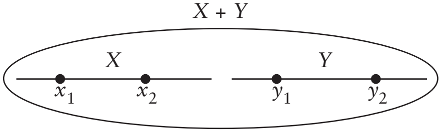
5.2. İki İyisıralamayı Toplamak. Bu altbölümde bir iyisıralamayı bir başka iyisıralamanın "sonuna" ekleyerek bir önceki paragraftaki yöntemi genelleştireceğiz ve yeni bir iyisıralama elde edeceğiz. Bölüm 2.2.4'te bu yöntemden sözetmiştik.



$(X, <)$ ve $(Y, <)$ iki iyisıralama olsun. Şimdilik X ve Y kümelerinin ayrık olduklarını (yani kesişmediklerini) varsayalım. $X \cup Y$ kümesi üzerine, $X + Y$ adını vereceğimiz bir sıralama tanımlayacağız. $X \cup Y$ kümesini, X ve Y'nin sıralamalarını koruyarak, ama Y'nin elemanlarını X'in elemanlarından daha büyük olduklarına hükmederek sıralayalım. Biçimsel tanım şöyle: $u, v \in X \cup Y$ için, $u \prec v$ ancak ve ancak

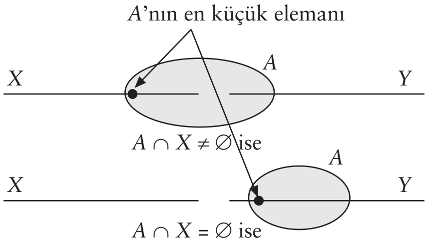
1) $u, v \in X$ ve $u < v$ ise ya da
2) $u, v \in Y$ ve $u < v$ ise ya da
3) $u \in X$ ve $v \in Y$ ise.

$X + Y$ sıralamasının resmi aşağıda.



$X + Y$ sıralaması; $x_1 \prec x_2 \prec y_1 \prec y_2$

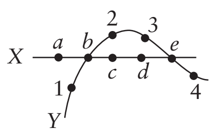
Bu da bir iyisıralamadır. Nitekim A, $X \cup Y$ kümesinin boş olmayan bir altkümesi olsun. Eğer A'nın X'le kesişimi boş değilse, o zaman $A \cap X$ altkümesinin X sıralamasına göre en küçük elemanı A'nın en küçük elemanıdır. Eğer A'nın X'le kesişimi boşsa, o zaman A, Y'nin boş olmayan bir altkümesidir ve



A'nın Y sıralamasındaki en küçük elemanı A'nın $X + Y$'nin sıralamasındaki en küçük elemanıdır.

Eğer X ve Y kümeleri kesişiyorsa, o zaman X yerine $X \times \{0\}$, Y yerine $Y \times \{1\}$ alalım ve X ve Y'nin verilen sıralamalarını sırasıyla $X \times \{0\}$ ve $Y \times \{1\}$ kümelerinin üstüne taşıyalım. Sonra bir önceki paragrafta X ve Y ile yaptığımızı artık ayrık olan $X \times \{0\}$ ve $Y \times \{1\}$ kümeleriyle yapalım.

Bunu bir örnekle gösterelim. X ve Y bir sonraki şekildeki gibi olsunlar.



Yani

$$X = \{a < b < c < d < e\}$$

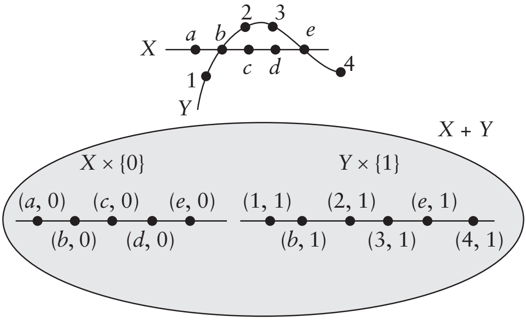
ve

$$Y = \{1 < b < 2 < 3 < e < 4\}$$

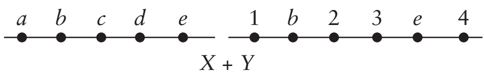
olsun. Bu iki sıralamayı şöyle yazalım:

$$X \times \{0\}: (a,0) < (b,0) < (c,0) < (d,0) < (e,0),$$
$$Y \times \{1\}: (1,1) < (b,1) < (2,1) < (3,1) < (e,1) < (4,1).$$

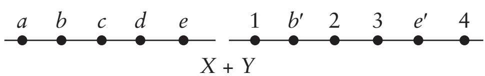
Dikkat ederseniz X'ten $X \times \{0\}$'a geçerken X'in sıralamasını koruduk. Aynı özeni Y için de gösterdik. Şimdi, aşağıdaki şekildeki gibi $X \times \{0\}$'ın elemanlarından hemen sonra $Y \times \{1\}$'in elemanlarını yazalım.



Matematikçi günlük koşuşturma içinde bu kadar çok özen göstermez. X ve Y kesişse bile X ve Y'nin elemanlarını iki kez yazar. Örneğin, profesyonel matematikçi yukardaki örneği,

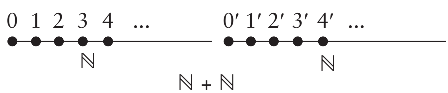


olarak yazar, ama bilir ki birinci b ile ikinci b farklı elemanlardır. Eğer çok başı sıkışırsa, $X + Y$'yi



olarak gösterir.

Örneğin $\mathbb{N} + \mathbb{N}$ iyisıralaması, $\mathbb{N}$ iyisıralamasının sonuna aynı sıralamanın bir kopyası konarak elde edilir. İşte resmi:



5.3. Alfabetik Sıralama ya da İki İyisıralamayı Çarpmak. $(X, <)$ ve $(Y, <)$ iki iyisıralama olsun. Bu paragrafta $X \times Y$ kümesi üzerine Bölüm 2.2.6'da tanımladığımız alfabetik sıralamanın bir iyisıralama olduğunu kanıtlayacağız. Alfabetik sıralamayı anımsatalım: (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) çiftleri $X \times Y$ kümesinin iki elemanı olsun. Eğer

$$x_1 < x_2$$

ise ya da

$$x_1 = x_2 \text{ ve } y_1 < y_2$$

ise, (x_1, y_1)'in (x_2, y_2)'den daha küçük olduğu söylenir ve bu

$$(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$$

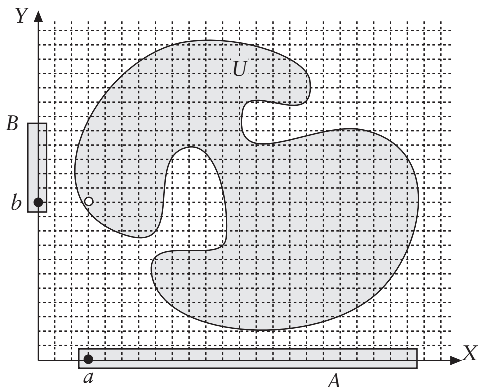
olarak yazılır. Bunun bir sıralama olduğu çok belli. Bir iyisıralama olduğunu kanıtlayalım. Aşağıdaki şekilden takip edin. U, $X \times Y$ kümesininin boş olmayan bir altkümesi olsun.

$$A = \{x \in X : \text{bir } y \in Y \text{ için } (x, y) \in U\}$$

olsun. A, boşküme olamaz. Demek ki A'nın bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana a diyelim.

$$B = \{y \in Y : (a, y) \in U\} = (\{b\} \times Y) \cap U$$

olsun. $a \in A$ olduğundan, B boşküme olamaz. Demek ki B'nin de bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana b diyelim. $b \in B$ olduğundan, $(a, b) \in U$.



Şimdi (a, b)'nin U'nun en küçük elemanı olduğunu kanıtayalım. (x, y), U'nun herhangi bir elemanı olsun. Demek ki $x \in A$. Dolayısıyla $x \geq a$. Eğer $x > a$ ise, elbette $(a, b) < (x, y)$. Eğer $x = a$ ise, o zaman $(a, y) = (x, y)$ in U olduğundan, $y \in B$. Demek ki $y \geq b$. Eğer $y > b$ ise, o zaman elbette $(a, b) = (x, b) < (x, y)$. Eğer $y = b$ ise, o zaman $(a, b) = (x, y)$. Kanıtımız tamamlanmıştır.

6. İyisıralamalarda Tümevarım

Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'de tümevarımla kanıt yapmasını biliyoruz. Anımsayalım:

Olgu 6.1. [Doğal Sayılarda Tümevarım İlkesi 1]. *$A \subseteq \mathbb{N}$ bir altküme olsun. A'nın şu iki özelliği olduğunu varsayalım:*

1) $0 \in A$.

2) *Her n doğal sayısı için, $n \in A$ ise o zaman $n + 1 \in A$.*

Bu durumda $A = \mathbb{N}$'dir.

Bu teoremi doğal sayıları ve doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'yi tanımladığımız [Sİ] ders notlarında kanıtlamıştık. Aynı ders notlarında bir tümevarım ilkesi daha kanıtlamıştık:

Olgu 6.2. [Doğal Sayılarda Tümevarım İlkesi 2]. *$A \subseteq \mathbb{N}$ bir altküme olsun. X'in şu özelliği olduğunu varsayalım:*

Her n doğal sayısı için, eğer

$$\{m \in \mathbb{N} : m < n\} \subseteq A$$

ise, o zaman $n \in A$.

Bu durumda $A = \mathbb{N}$'dir.

Bu teoremlerden en azından biri olmadan doğal sayılar hakkında ele avuca sığan bir teorem kanıtlayamayız.

Birinci teorem doğal sayılarda toplamayla ilgili bir şey söylüyor. İkinci teoremde ise toplama yerine sadece $<$ eşitsizliği var. Birinci teoremi olmasa da ikinci teoremi iyisıralamalara genelleştirebiliriz. En azından ikinci teoremin aynısını iyisıralamalar için formüle edip kanıtlamaya çalışabiliriz.

Birinci teorem de, yazıldığı biçimde değil ama buna yakın bir biçimde iyisıralamalara genelleştirilebilir. Bunu daha sonra ordinaller için yapacağız.

Bu bölümün amacı ikinci tümevarım ilkesini doğal sayılardan iyisıralamalara genelleştirmek.

Teorem 6.3. [İyisıralamalarda Tümevarım İlkesi]. $(X, <)$ *bir iyi sıralama olsun.* $A \subseteq X$ *bir altküme olsun.* A*'nın şu özelliği olduğunu varsayalım*:

Her $x \in X$ *için, eğer*

$$\{y \in X : y < x\} \subseteq A$$

ise, o zaman $x \in A$.

Bu durumda $Y = X$*'dir.*

Kanıt: Diyelim, A, X'e eşit değil. O zaman $X \setminus A$ kümesi boş değildir. Dolayısıyla X iyisıralamasının $X \setminus A$ altkümesinin bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana x diyelim.

x, $X \setminus A$ altkümesinin en küçük elemanı olduğundan, x'ten küçük hiçbir eleman $X \setminus A$ kümesinde olamaz, yani x'ten küçük her eleman A'dadır. Varsayılan koşula göre x, A'da olmalı. Bir çelişki elde ettik. Demek ki A, X'e eşit olmalı. □

Görüldüğü gibi kanıt çok basit. Nasıl doğal sayılarla ilgili en küçük bir gerçeği kanıtlamak için tümevarım kullanılıyorsa, iyisıralamalarda da en küçük bir şeyi kanıtlamak için tümevarım gerekir. İyisıralamalarda tümevarımsız bir şey kanıtlanamaz desek yeridir. Belki şu tuhaf teorem dışında...

Teorem 6.4. *İyisıralı bir kümede sürekli azalan bir dizi yoktur.*

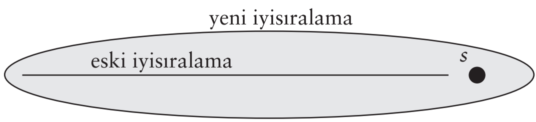
Kanıt: $(X, <)$ iyisıralı bir küme olsun. $(x_n)_n$, X'in sürekli azalan bir dizisi olsun. Demek ki her $n < m$ doğal sayıları için $x_n, x_m \in X$ ve eğer $n < m$ ise $x_m < x_n$. Bir çelişki elde edeceğiz.

$$A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

olsun. A'nın bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana x_n diyelim. Ama o zaman $x_{n+1} \in A$ ve $x_{n+1} < x_n$, bir çelişki. □

Bir Uygulama. İyisıralamalarda tümevarımla kanıt tekniğinin bir uygulamasını görelim şimdi.

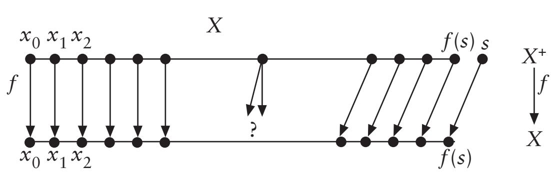
Altbölüm 5.1'de, bir iyisıralamanın sonuna yeni bir eleman ekleyerek yeni bir iyisıralama elde ettik. Yeni iyisıralamanın resmi aşağıdaki gibi.



Eğer X bir iyisıralamaysa, X'in sonuna bir eleman eklenerek elde edilen sıralamaya X^+ diyelim.

Bu bölümde X iyisıralamasıyla X^+ iyisıralamasının gerçekten farklı olduklarını kanıtlayacağız. Daha matematiksel bir deyişle, aralarında bir eşyapı eşlemesi olmadığını kanıtlayacağız. Daha açık bir deyişle, X^+'dan X'e giden ve sıralamayı koruyan (yani artan) bir eşleme olmadığını kanıtlayacağız.

Kanıta girişmeden önce problemi biraz tartışalım. Diyelim X^+'dan X'e giden ve sıralamayı koruyan (yani mutlak artan) bir eşleme var. Bu eşlemeye f diyelim ve f'yi anlamaya çalışalım.



Yukardaki şekilden takip edin. f, X^+ iyisıralamasının ilk elemanlarını (ki bunlar X'in de ilk elemanlarıdır) gene kendilerine götürmeli, yani f başlangıçta her x'i gene kendisine götüren özdeşlik fonksiyonu olmalı. Örneğin X^+'nın ilk elemanı (ki bu X'in ilk elemanıdır) f altında gene X'in ilk elemanına gitmeli, yoksa f hiçbir zaman X'in ilk elemanına değemez ve dolayısıyla örten olamaz.

X'in ilk elemanlarına şekildeki gibi x_n dersek, $f(x_n) = x_n$ eşitliği hemen hemen bariz olmalı. Yani sol tarafta asayiş berkemal, her eleman f altında kendisine gidiyor.

Öte yandan, X^+'nın en son elemanına, şekilde olduğu gibi, s dersek, $f(s)$, X'in en son elemanı olmalı, çünkü eğer $y \in X$ herhangi bir elemansa, belli bir $x \in X^+$ için, $y = f(x)$ olur ve $x \leq s$ olduğundan, $y = f(x) \leq f(s)$ olur.

Şimdi $f(s)$'nin f altında gittiği eleman olan $f(f(s))$'ye, yani $f^2(s)$'ye bakalım. Bu eleman $f(s)$'den hemen önceki eleman olmalı, çünkü $f(s)$, s'den hemen önceki elemandır. Aynı nedenden, $f^2(s)$, $f(s)$'den hemen önce gelen eleman olduğundan, $f^3(s)$, $f^2(s)$'den hemen önce gelen eleman olmalı.

Görüldüğü gibi sol tarafta özdeşlik fonksiyonu olan f, sağ tarafta elemanları bir eksiltiyor... Ortalarda bir yerde sorun çıkmalı... Bir yerde f elemanı kendisine mi götürmek, yoksa eksiltmek mi gerektiğine birtürlü karar verememeli...

Yukardaki parlak fikir ne yazık ki matematiksel olarak beş para etmez. "Ortalarda bir yer" diye bir yerden sözedilemez matematikte.

Söylediğimizi kanıtlayacağız ama tümevarım kullanarak kanıtlayacağız. Tümevarımla, her $x \in X$ için $f(x) = x$ eşitliğini kanıtlayacağız. Böylece s'ye gidecek yer kalmayacak ve bir çelişki elde edeceğiz.

$$A = \{x \in X : f(x) = x\}$$

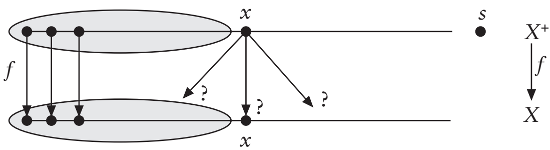
olsun. A'nın X'e eşit olduğunu kanıtlayacağız. Bunun için, X'ten herhangi bir x elemanı alıp,

$$\{y \in X : y < x\} \subseteq A$$

varsayımından yola çıkıp $x \in A$ ilişkisini kanıtlamalıyız.

Demek ki x'ten küçük her elemanın f altında kendisine gittiğini varsayıyoruz ve x'in de f altında kendisine gittiğini kanıtlayacağız.

$f(x)$ elemanına bakalım. Bu elemanın nerede olduğunu anlamaya çalışacağız.



$f(x)$, x'ten küçük olamaz. Aksi takdirde $f(x) \in A$, yani $f(f(x)) = f(x)$ olurdu ve f birebir olduğundan $f(x) = x$ olurdu, bir çelişki.

$f(x)$, x'ten büyük olamaz. Aksi takdirde X^+'nın hiçbir elemanı x'e değemezdi. Nitekim eğer $f(y) = x$ ise, $f(y) = x < f(x)$ ve $y < x$ olur. Ama o zaman da $y \in A$ içindeliği ve $x = f(y) = y < x$ eşitsizliği bize beklediğimiz çelişkiyi verir.

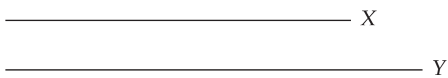
Demek ki $f(x) = x$.

Kanıtladığımızı yazalım.

Teorem 6.5. *Eğer X bir iyisıralamaysa, X ile X^+ iyisıralamalrı eşyapısal olamazlar.*

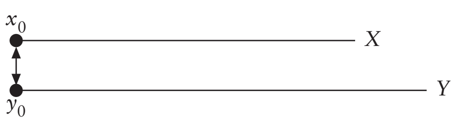
7. İyisıralamaları Birbirine Gömmek

İki iyi sıralama alalım: $(X, <)$ ve $(Y, <)$. Bunlar tamsıralama olduklarından, her ikisini de aşağıdaki şekildeki gibi birer doğru üzerinde temsil ederek çok büyük bir yalan söylemiş

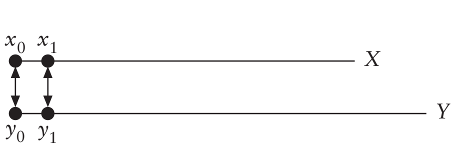


olmayız. (Temsilde sağdaki elemanlar soldakilerden daha büyük olacaklar.)

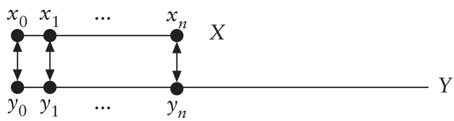
Eğer X ve Y boşküme değillerse her ikisinin de birer en küçük elemanı vardır. Bu elemanlara sırasıyla x_0 ve y_0 diyelim.



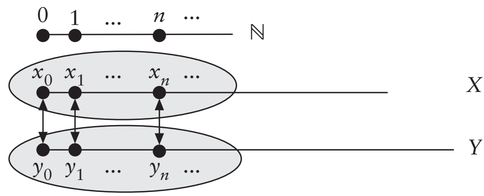
Eğer X ve Y'de eleman kalmışsa o zaman x_0 ve y_0'dan hemen sonra gelen elemanlar vardır. Bu elemanlara sırasıyla x_1 ve y_1 diyelim.



Bunu böyle “sürdürebileceğimiz kadar” sürdürelim. Eğer X ya da Y sonlu adımda biterse, önce bitenden diğerinin başlangıç dilimine giden bir eşyapı fonksiyonu buluruz.



Eğer X ya da Y sonlu adımda bitmezse, o zaman her ikisinde de $\mathbb{N}$’ye eşyapısal olan bir “başlangıç dilimi” var demektir.



Daha fazla devam etmeden (çünkü bu tür akıl yürütmeler tehlikeli sularda yüzmek demektir), biraz teori yapalım, en azından kullandığımız “başlangıç dilimi” terimini tanımlayalım. Önce okurun sezgisine hitap edelim: Amacımız iki iyisiralı kümeyi, ilk elemanlarından başlayarak ve gidebildiğimiz kadar giderek, birbiriyle eşleştirmeye çalışmak. İkisinden birinin diğerinden daha önce tükeneceğini umup tükeneni diğerinin “başlangıç dilimine” gömmek. Okur okumaya devam etsin, her şey zamanla arzulanan matematiksel açıklığa kavuşacak.

7.1. Başlangıç Dilimi

$(X, <)$ bir iyisıralama olsun. $I \subseteq X$ bir altküme olsun. Eğer her $x, y \in X$ için,

$$y \leq x \in I$$

koşulları doğru olduğunda,

$$y \in I$$

oluyorsa, I’ya ***başlangıç dilimi*** (İngilizcesi *initial segment*) adı verilir. Örneğin X’in kendisi bir başlangıç dilimidir. Daha ilginç örnekler: Her $a \in X$ için,

$$\{x \in X : x < a\}$$

ve

$$\{x \in X : x \leq a\}$$

kümeleri X'in birer başlangıç dilimleridir. Bunlardan başka da başlangıç dilimi yoktur, yani eğer bir başlangıç dilimi X'ten değişikse, o zaman bu başlangıç dilimi, belli bir $a \in X$ için,

$$\{x \in X : x < a\}$$

kümesine eşit olmalıdır. Nitekim $I \subset X$ bir başlangıç dilimi olsun. a, $X \setminus I$ kümesinin en küçük elemanı olsun. Elbette

$$\{x \in X : x < a\} \subseteq I$$

olur. İçindeliğin diğer istikametini kanıtlayalım. $x \in I$ olsun. Eğer $a \leq x$ ise, başlangıç diliminin tanımından dolayı $a \in I$ olmalı, ki bunun yanlış olduğunu biliyoruz. Demek ki $x < a$. İstediğimizi kanıtladık.

Eğer $I \neq X$ bir başlangıç dilimi ise, i^+, $X \setminus I$ kümesinin en

küçük elemanını simgeleyecek. Yani i^+, X'in I'nin bütün elemanlarından daha büyük olan en küçük elemanıdır. Demek ki

$$I = \{x \in X : x < i^+\}.$$

Bu arada $I \cup \{i^+\}$ kümesinin de bir başlangıç dilimi olduğuna dikkatinizi çekerim. Eğer başlangıç dilimine J ya da K dersek, bu elemanları j^+ ve k^+ diye anacağız.

Bu bulduğumuzu sık sık kullanacağız; not edelim:

Önsav 7.1. *X'in bir başlangıç dilimi ya X'e eşittir ya da bir a in X için $\{x \in X : x < a\}$ biçiminde bir kümedir.*

Sonuç 7.2. *Eğer I ve J, X'in birer başlangıç kümesiyse, ya $I \subseteq J$ ya da $J \subseteq I$.*

Kanıt: Eğer I ya da J, X ise, sorun yok. Böyle olmadığını varsayalım. Eğer $i^+ \leq j^+$ ise $I \subseteq J$, aksi halde $J \subseteq I$. □

Aşağıdaki sonuç da yukardakinden çıkar ama biz çeşni olsun diye başka bir kanıt vereceğiz.

Önsav 7.3. *$\wp$, elemanları X'in bazı başlangıç dilimlerinden oluşan bir küme olsun. O zaman $\cup\wp$, yani $\bigcup_{I\in\wp} I$ bir başlangıç dilimidir.*

Kanıt: $x \in \bigcup_{I\in\wp} I$ ve $y < x$ olsun. Demek ki bir $I \in \wp$ için $x \in I$. Ama I bir başlangıç dilimi. Demek ki $y \in I$. Dolayısıyla $y \in \bigcup_{I\in\wp} I$. □

Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalarda X iyisıralı bir kümeyi simgeleyecek.

7.1.1. Eğer I ve J, X'in birer başlangıç dilimiyse, ya $I \subseteq J$ ya da $J \subseteq I$ olduğunu kanıtlayın.

7.1.2. $\wp$, her elemanı X'in bir başlangıç dilimi olan bir küme olsun. O zaman $\cap\wp$ kümesinin, yani $\bigcap_{I\in\wp} I$ kümesinin de X'in bir başlangıç dilimi olduğunu kanıtlayın.

7.1.3. Y iyisıralı küme olsun. $f : X \to Y$, X'ten Y'nin bir başlangıç dilimine giden bir eşyapı fonksiyonu olsun. $I \subseteq X$ bir başlangıç dilimiyse, $f(I)$'nın Y'nin de bir başlangıç dilimi olduğunu gösterin.

7.1.4. $\wp \neq \emptyset$, her elemanı X'in bir başlangıç dilimi olan bir küme olsun. $\wp$'nin en küçük bir elemanı olduğunu kanıtlayın; yani öyle bir $I \in \wp$ elemanının varlığını kanıtlayın ki, her $J \in \wp$ için $I \subseteq J$ olsun.

7.1.5. X'in en büyük elemanının olmadığını varsayalım. $\wp$, X'in X'e eşit olmayan başlangıç dilimlerinin kümesi olsun. $\bigcup_{I\in\wp} I = X$ eşitliğini kanıtlayın.

7.1.6. A, X'in bir altkümesi olsun.

$$I(A) = \{x \in X : x,\ A\text{'nın bir elemanından küçükeşit}\}$$

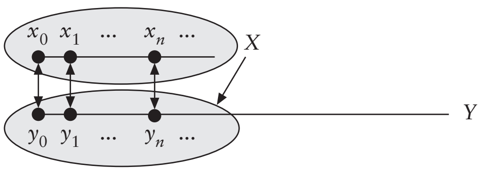
olsun. $I(A)$'nın bir başlangıç dilimi olduğunu kanıtlayın. $I(A)$'nın A'yı içeren başlangıç dilimlerinin en küçüğü olduğunu kanıtlayın. $I(A)$'nın X'in A'yı içeren tüm başlangıç dilimlerinin

7.1.7. $J = \bigcup_{I \in \wp} I$ olsun. $\{i^+ : I \in \wp\}$ kümesiyle j^+ elemanı arasında nasıl bir ilişki vardır?

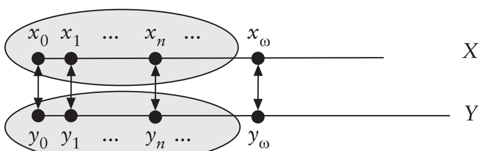
7.1.8. $I \subseteq Y \subseteq X$ olsun ve I, hem X'in hem de Y'nin başlangıç dilimi olsun. i^+ elemanı X'te ve Y'de farklı elemanlar olabilir. Aslında, i^+ yerine $i^+(X)$ ve $i^+(Y)$ yazmak gerekir. $i^+(X) \leq i^+(Y)$ eşitsizliğini kanıtlayın.

7.2. Gömme Teoremi (1)

Bölümün başında tanımladığımız x_n ve y_n elemanlarını anımsayalım. Eğer X ve Y'den biri sadece bu x_n ve y_n elemanlarından oluşmuşsa, o zaman, bu elemanlardan oluşandan (aşağıdaki resimde X'ten) diğerinin başlangıç dilimine giden bir eşyapı fonksiyonu vardır.



Eğer hem X'te hem de Y'de eleman kalmışsa, x_ω ve y_ω kalan elemanların en küçüğü olsun.



Bunu böylecene sürdürebiliriz ve X ya da Y'nin elemanlarını bir zaman sonra tüketebiliriz. Böylece, önce tükeneni diğerinin bir başlangıç dilimine gömebiliriz... gibi bir hisse kapılabilir insan ilk anda ama ikinci anda bundan matematiksel olarak henüz emin olamayacağımızı anlarız...

Yukardaki akıl yürütmenin beyne değil hislere hitap ettiğinin farkına vardınız mı? Matematikte "bunu böylecene sürdürebiliriz" diye bir tümce yazılamaz, böyle bir tümce ancak edebiyat sınıfına girebilir. Oysa burada matematik yapılmaktadır.

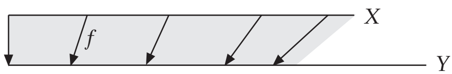
Bu bölümde yukardaki edebiyatı matematiğe dönüştürerek şu teoremi kanıtlayacağız.

Teorem 7.4. $(X, <)$ *ve* $(Y, <)$ *iki iyisıralama olsun. O zaman ikisinden birinden diğerinin bir başlangıç dilimine giden bir eşyapı fonksiyonu vardır ve bu başlangıç dilimi ve eşyapı fonksiyonu birer tanedir. Ayrıca her ikisinden de diğerinin başlangıç dilimine giden eşyapı fonksiyonları varsa, bu eşyapı fonksiyonları eşyapı eşlemeleri (izomorfizma) olmak zorundadır.*

Teoremi şöyle yazmayı tercih ediyoruz:

Teorem 7.4′. $(X, <)$ *ve* $(Y, <)$ *iki iyisıralama olsun. O zaman ikisinden biri diğerinin başlangıç dilimine gömülür. Ayrıca her ikisi de diğerinin başlangıç dilimine gömülüyorsa, bu gömmeler eşyapı eşlemeleri (izomorfizma) olmak zorundadırlar.*

Matematiksel tanımı verelim ki sonradan maraza çıkmasın. $(X, <)$ ve $(Y, <)$ birer iyisıralama olsun. $f : X \to Y$ sıralamayı koruyan bir fonksiyon olsun, yani $x_1 < x_2$ için $f(x_1) < f(x_2)$ ol-



X'in Y'nin bir başlangıç dilimine gömülüşü

sun. Bir de ayrıca $f(X)$'in Y'nin bir başlangıç dilimi olduğunu varsayalım. O zaman f'nin X'in Y'nin bir ***başlangıç dilimine gömülüşü*** olduğunu ya da f'nin X'i Y'nin bir ***başlangıç dilimine gömdüğünü*** ya da X'in Y'nin ***başlangıç dilimine gömüldüğünü*** söyleyeceğiz.

Teoremi kanıtlamak biraz zaman alacak. İyisıralamalarda tümevarımla kanıt ilkesini sık sık kullanacağız. (Bkz. Teorem 6.3.)

Bundan böyle X ve Y, iyisıralanmış birer küme simgeleyecekler.

Bir sonraki önsavın tümevarımda nasıl kullanılacağını görmek için kâhin olmaya gerek yok.

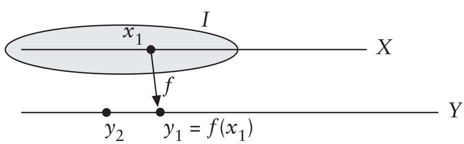
Önsav 7.5. *f, X'in Y'nin bir başlangıç dilimine bir gömülüşü olsun. I, X'in bir başlangıç dilimi olsun.*

i. *O zaman $f(I)$, Y'nin bir başlangıç dilimidir, yani f'nin I'ya kısıtlanışı olan $f_{|I}$ fonksiyonu I'nin Y'nin bir başlangıç dilimine gömülüşüdür.*

ii. *Eğer $I \neq X$ ve $J = f(I)$ ise, $f(i^+) = j^+$* olur.

Kanıt: i. $y_1 \in f(I)$ ve $y_2 < y_1$ olsun. y_2'nin $f(I)$'da olduğunu kanıtlayacağız.

Madem ki $y_1 \in f(I)$, $f(x_1) = y_1$ eşitliğini sağlayan bir $x_1 \in I$ vardır.

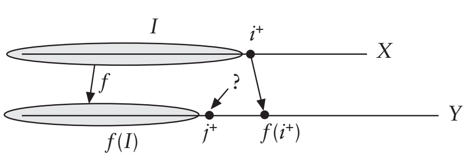


$y_1 \in f(X)$ ve $f(X)$ bir başlangıç dilimi olduğundan, y_1'den küçük olan y_2 de $f(X)$'in bir elemanıdır. $f(x_2) = y_2$ eşitliğini sağlayan bir $x_2 \in X$ elemanı alalım.

$$f(x_2) = y_2 < y_1 = f(x_1)$$

olduğundan, $x_2 < x_1$ olmalı. Ama $x_1 \in I$. Demek ki $x_2 \in I$ ve $y_2 = f(x_2) \in f(I)$.

ii. i^+, I'nin bütün elemanlarından daha büyük olduğundan, $f(i^+)$, $f(I)$'nin bütün elemanlarından daha büyük olmalı. Demek ki $j^+ \leq f(i^+)$. Dolayısıyla ($f(X)$ bir başlangıç dilimi olduğundan) $j^+ \in f(X)$ ve bir $x \in X$ için, $f(x) = j^+$ olmalı. $f(x) = j^+ \leq f(i^+)$ oldu-



ğundan, $x \leq i^+$ olmalı. Eğer $x < i^+$ ise, o zaman $x \in I$ ve $f(x) \in f(I)$ olur ki bu da $f(x) = j^+ \notin f(I)$ ile çelişir. Demek ki $x = i^+$. □

Önsav 7.6. *X'ten Y'nin bir başlangıç dilimine en fazla bir gömme vardır.*

Kanıt: f ve g, X'ten Y'nin bir başlangıç dilimine giden iki gömme olsun. Her $x \in X$ için $f(x) = g(x)$ eşitliğini kanıtlayacağız. Demek ki,

$$A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$$

tanımını yaparsak, A'nın X'e eşit olduğunu kanıtlamamız gerekiyor. Tümevarımla kanıt ilkesini kullanacağız.

$x \in X$ olsun ve $I = \{y \in X : y < x\}$ kümesinin A'nın bir altkümesi olduğunu varsayalım. Eğer x'in de A'da olduğunu kanıtlarsak, tümevarım ilkesine göre A'nın X'e eşit olduğunu kanıtlamış olacağız ve önsavımız kanıtlanmış olacak.

Ama $x = i^+$ ve Önsav 7.5.ii'ye göre, $f(I) = J = g(I) = K$ ise,

$$f(x) = f(i^+) = j^+ = k^+ = g(i^+) = g(x).$$

Demek ki $x \in A$. □

Yukardaki önsava göre X'in bir başlangıç diliminden Y'nin bir başlangıç dilimine en fazla bir tane gömme vardır. Nitekim eğer I, X'in bir başlangıç dilimiyse, Önsav 7.6'yı X yerine I'ya uygulayabiliriz.

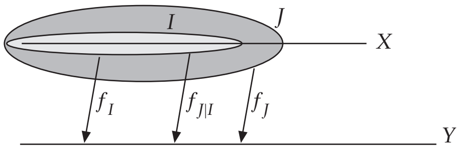
Sonuç 7.7. *Özdeşlik fonksiyonu* Id, *X'ten X'in bir başlangıç dilimine giden bir gömmedir. Önsav 7.6'dan dolayı X'ten X'in bir başlangıç dilimine giden başka da böyle bir gömme yoktur.* □

Teoremin Birinci Yarısının Kanıtı: $\wp$, Y'nin bir başlangıç dilimine gömülen X'in başlangıç dilimleri kümesi olsun. Yani,

$\wp = \{ I \subseteq X : I$, X'in başlangıç dilimi ve I'dan Y'nin bir başlangıç dilimine giden bir gömme var$\}$ olsun.

Önsav 7.6'ya göre, eğer $I \in \wp$ ise, I'dan Y'nin bir başlangıç kümesine giden sadece bir tane gömme vardır. Bu gömmeye f_I adını verelim.

Eğer I ve J, X'in iki başlangıç dilimiyse, Sonuç 7.2'ye göre ya $I \subseteq J$ ya da $J \subseteq I$. Diyelim $I \subseteq J$. Şimdi, f_J gömmesi J'den Y'ye gidiyor, ve $I \subseteq J$ olduğundan, f_J fonksiyonunu I'da değerlendirebiliriz. Önsav 7.5'e göre $f_{J|I}(I)$ de Y'nin bir başlangıç di-



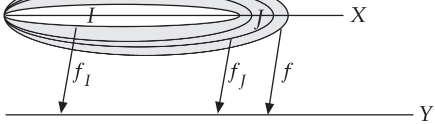
limidir ve $f_{J|I}$ da f_I gibi, I'dan Y'nin bir başlangıç dilimine giden bir gömmedir. Önsav 7.6'ya göre,

$$f_{J|I} = f_I.$$

Demek ki, her $x \in I$ için, $f_I(x) = f_{J|I}(x) = f_J(x)$.

Şimdi $Z = \cup \wp = \bigcup_{I \in \wp} I$ olsun. Z'nin $\wp$'de olduğunu kanıtlayacağız. Bu da Z'nin $\wp$'nin en büyük elemanı olduğunu gösterecek, çünkü ne de olsa Z, $\wp$'nin elemanlarının bileşimi. Yani Z, Y'nin bir başlangıç dilimine gömülen X'in en büyük başlangıç dilimi olacak.

Önsav 7.3'e göre Z, X'in bir başlangıç dilimidir. Z'den Y'ye giden bir f fonksiyonu tanımlayacağız. $x \in Z$ olsun. O zaman bir $I \in \wp$ için $x \in I$. Şimdi $f(x)$'i $f_I(x)$ olarak tanımlayalım. Bu tanım "yasal"dır çünkü, I yerine, x'in içinde bulunduğu bir başka $J \in \wp$ başlangıç dilimi seçseydik, bir üstteki paragrafta yaptıklarımızdan dolayı $f_I(x) = f_J(x)$ olurdu. Yani $f(x)$'in tanımı, seçilen I başlangıç diliminden bağımsızdır, yeter ki x, I'da olsun. Bu da tanımın yasal olduğunu gösterir.

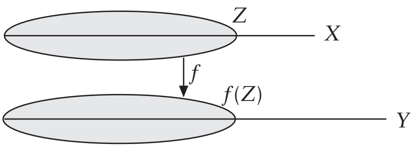


Şimdi f'nin sıralamaya saygı duyan bir fonksiyon olduğunu kanıtlayacağım. Bunun kanıtı oldukça kolay. $y < x \in Z$ olsun. Demek ki bir $I \in \wp$ için $x \in I$. O zaman y de I'da. Demek ki,

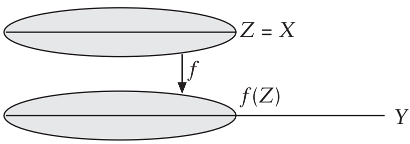
$$f(y) = f_I(y) < f_I(x) = f(x).$$

Böylece f'nin sıralamaya saygı duyduğunu kanıtlamış olduk.

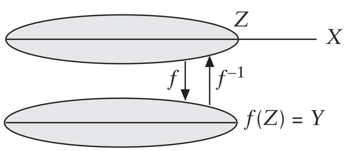
Önsav 7.3'ten dolayı $f(Z)$'nin Y'nin bir başlangıç dilimi olduğunu biliyoruz. Demek ki f, Z'den Y'nin bir başlangıç dilimine bir gömme. Dolayısıyla $Z \in \wp$ ve Z, $\wp$'nin en büyük elemanı. Durum şöyle:



Eğer $Z = X$ ise işimiz bitmiştir, çünkü o zaman X, Y'nin bir başlangıç dilimine gömülür.



Eğer $f(Z) = Y$ ise de işimiz bitmiştir, çünkü o zaman Y, f^{-1} sayesinde X'in bir başlangıç dilimine (Z'ye) gömülür.

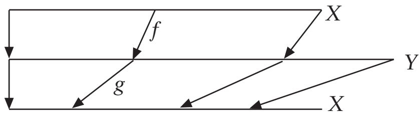


Şimdi $Z \neq X$ ve $f(Z) \neq Y$ varsayımlarını yapalım. Bir çelişki elde edeceğiz. $T = f(Z)$ olsun. Bu durumda z^+ ve t^+ elemanları vardır. Şimdi X'in $Z \cup \{z^+\}$ başlangıç kümesinden Y'nin

$$f(Z) \cup \{t^+\}$$

başlangıç kümesine giden ve sıralamayı koruyan bir fonksiyon bulabiliriz. Bunun için, Z üzerine tanımlı olan f'yi z^+ elemanını t^+ elemanına götürecek biçimde genişletmek yeterli. Ama o zaman da $Z \cup \{z^+\} \in \wp$ olur. Bu da Z'nin $\wp$'nin en büyük ela-

Teoremin İkinci Yarısının Kanıtı: f, X'ten Y'nin bir başlangıç dilimine giden bir gömme olsun. g, Y'den X'in bir başlangıç



dilimine giden bir gömme olsun. O zaman, $g \circ f$, X'ten X'in bir başlangıç dilimine giden bir gömmedir. Önsav 7.6'ya göre

$$g \circ f = \mathrm{Id}_X.$$

Demek ki her $x \in X$ için $g(f(x)) = x$. Dolayısıyla g örtendir, yani bir eşyapı eşlemesidir. (g'nin birebir olduğunu zaten biliyoruz.)

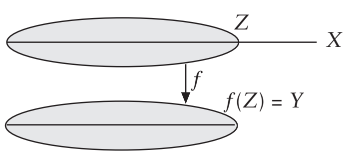
Eğer f örten değilse, o zaman Y'de her $x \in X$ için, $f(x) < u$ eşitsizliğini sağlayan bir u elemanı vardır. Bu eşitsizliğin her iki tarafına da g'yi uygularsak, her $x \in X$ için, $x = g(f(x)) < g(u)$, yani

$$x < g(u)$$

olur. Bu eşitlikte eğer $x = g(u)$ alırsak, ki g örten olduğundan bunu yapabiliriz, bir çelişki elde ederiz. Demek ki f de örtendir, yani f de bir eşyapı eşlemesidir. □

Yukardaki teoremin kanıtından aşağıdaki sonuç çıkar:

Kanıtın Sonucu 7.8. *X ve Y birer iyisıralama olsun. O zaman, Y'nin bir başlangıç dilimine gömülen X'in bir en büyük Z başlangıç dilimi vardır ve bir tanedir. Ayrıca eğer $Z \neq X$ ise bu gömme örten olmak durumundadır, yani $Z \approx Y$'dir.*



Kanıt: Nitekim kanıtta bulunan X'in Z altkümesi tam bu başlangıç dilimidir. □

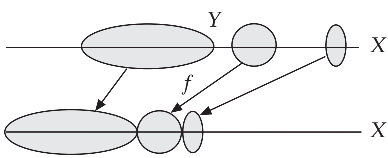
7.3. Gömme Teoremi (2)

Yukarda iyisıralı kümeleri birbirine gömdük. Burada iyisıralı bir kümenin heraltkümesini iyisıralı kümenin bir başlangıç dilimine gömeceğiz.

Teorem 7.9. *İyisıralı bir X kümesinin her altkümesi* (*iyisıralı bir küme olarak*) *X'in tek bir başlangıç dilimine ve tek bir biçimde gömülür*.

Teoremin Tartışması. Gömmenin biricikliği Teorem 7.4'ten çıkar ama gömmenin varlığı aynı teoremden çıkmaz.

İyisıralı küme X olsun, altkümesi de Y olsun. Aşağıdaki şekilden de görüleceği üzere X'in Y altkümesini sola kaydıracağız. Sorun, bu "sola kaydırma"yı matematikçe ifade edip teoremi kanıtlamak. Ve aslında teoremi kanıtlamakta karşılaşılan tek sorun bu.



Teorem, solda her zaman Y için **yeterince** yer olduğunu söylüyor. Yani arka kapıdan binilen bir otobüste, ayaktaki yolcular ön kapıya doğru ilerleyip yanyana durabilirler, yolcular ön kapıya doğru ilerlediklerinde arkada yer açılır, otobüste yer kalmaması diye bir sorun yaşanmaz, yolcu sayısı sonsuz, hatta çok çok sonsuz bile olsa...

Engin deneyimime göre birinci sınıf matematik öğrencileri burada neyin kanıtlanması gerektiğini anlayamıyorlar. "Elbette Y'nin elemanlarını sola doğru itekleyebiliriz" diyorlar. Belki Y sonluysa 'elbette' de, Y sonsuz olduğunda "elbette" kanıtı hafif kaçabilir. Ayrıca, bariz bile olsa, matematikte her şeyin kanıtlanması gerekir.

Bir derste iki saatimi bu "itelemenin" hiç de bariz olmadığını, burada bir şeylerin kanıtlaması gerektiğinin anlaşılmasına harcadığımı anımsıyorum. Öğrencilerden ısrarla "sola kaydırmayı" matematikçeye çevirmelerini istedim. Sonunda buldular. "Sola kaydırmak" demek "f gömmesi artmayan bir fonksiyondur" demektir, yani her $y \in Y$ için $f(y) \le y$ eşitsizliği geçerlidir demektir. "Y'yi sola kaydırmak" edebiyattır, oysa

"her $y \in Y$ için $f(y) \le y$"

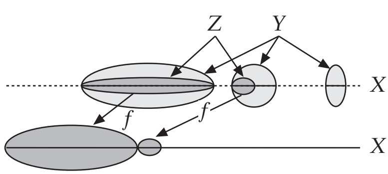
matematiktir. (Bkz. aşağıdaki kanıttaki Arasav.)

Öğretmen arkadaşlarıma yukardaki aşamayı ısrarla öğrencilere atlatmalarını öneririm. Bu alıştırma matematiğin ne olduğunu öğretme konusunda son derece faydalıdır.

Teorem 7.9'un Kanıtı: X'in altkümesine Y diyelim. Y de iyisıralı bir altkümedir (iyisıralamayı X'ten miras almıştır.) Yukarda kanıtladığımız teoreme göre ya X, Y'nin ya da Y, X'in bir başlangıç dilimine gömülür. Dolayısıyla eğer X, Y'nin başlangıç dilimine gömülmüyorsa o zaman teoremimiz kanıtlanmıştır. Ama ne yazık ki X bazen Y'nin başlangıç dilimine gömülebilir. Örnek: $X = \mathbb{N}$ ve $Y = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ise, $f(x) = x + 1$ fonksiyonu X'i Y'ye (ki Y, Y'nin bir başlangıç dilimidir) gömer. Dolayısıyla bu kanıt denemesi fiyaskoyla sonuçlanır.

Bir başka yol bulmalıyız.

Biraz önce çıkardığımız sonucu (Sonuç 7.8'i) kullanacağız. O sonuçta X ile Y'nin yerlerini değiştirelim. O zaman X'in bir başlangıç dilimine gömülen Y'nin en büyük bir başlangıç dilimi vardır. Bu başlangıç dilimine Z diyelim. Z'nin Y'ye eşit olduğunu kanıtlamak istiyoruz.



Z'yi X'in başlangıç dilimine gömen gömmeye f diyelim. Z'nin Y'ye eşit olmadığını varsayıp bir çelişki elde etmeye çalışalım. Eğer $Z \neq Y$ ise, o zaman Sonuç 7.8'e göre $f(Z) = X$ olmalı. (Kanıtı anımsayın: Yoksa f'yi bir adım daha genişleterek Z'den daha büyük bir başlangıç dilimi bulabiliriz ve bu bir çelişki olur.)

Arasav. *Her $z \in Z$ için $f(z) \leq z$.*

Savın Kanıtı: Savı tümevarımla kanıtlayacağız.

$$A = \{z \in Z : f(z) \leq z\}$$

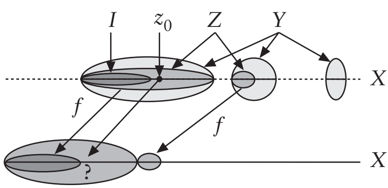
olsun. A'nın Z'ye eşit olduğunu tümevarımla kanıtlayacağız. Bir $z_0 \in Z$ için, Z'nin z_0'dan küçük elemanlarının A'da olduklarını varsayıp, z_0 elemanının A'da olduğunu kanıtlayalım. Yani

$$I = \{z \in Z : z < z_0\} \subseteq A$$

varsayımında bulunup $z_0 \in A$ ilişkisini kanıtlayalım. Ama $i^+ = i^+(Z) = z_0$ ve Önsav 7.5.ii'ye göre, $J = f(I)$ ise,

$$f(z_0) = f(i^+) = j^+.$$

Öte yandan her $z \in I \subseteq A$ için, $f(z) \leq z < z_0$. Demek ki z_0, $f(I)$'nin her elemanından daha büyük, yani $j^+ \leq z_0$. Bundan da $f(z_0) = f(i^+) = j^+ \leq z_0$ çıkar. Arasavımız kanıtlanmıştır.

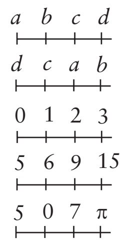


Şimdi teoremin kanıtının sonunu getirebiliriz. Eğer $Z \neq Y$ ise, o zaman $Y \setminus Z$ boşküme değildir. $Y \setminus Z$ kümesinden bir y elemanı alalım. O zaman, her $z \in Z$ için, $f(z) \leq z < y$. Dolayısıyla y, $f(Z)$'de değil. Demek ki $f(Z) \neq X$ ve bu, Sonuç 7.8'le çelişir. □

Sonuç 7.10. *Eğer bir X iyisıralamasından bir Y iyisıralamasına giden sıralamayı koruyan bir fonksiyon varsa,* o *zaman X'ten Y'nin bir başlangıç dilimine giden bir* (*ve bir tek*) *gömme vardır.*

8. Eşyapısallık ve Gömme

Dört elemanlı ve iyisıralı çok küme vardır. Tam 24 tane. Hepsinin resmini yapamayız (yeterince yer ve zaman yok!) ama birkaçının resmini yanda yaptık. Resimde beş tane iyisıralı (ya da tamsıralı, aynı şey) dört elemanlı küme görüyorsunuz. Elemanların soldan sağa doğru sıralandığını varsayıyoruz: Küçükler solda, büyükler sağda. Örneğin sonuncusunda $5 < 0 < 7 < \pi$, doğal sıralamadan farklı bir sıralama belli ki. Dört elemanlı her tamsıralı kümenin elemanlarını küçükten büyüğe doğru,



$$x_0 < x_1 < x_2 < x_3$$

olarak dizebiliriz. Dolayısıyla 4 elemanlı her tamsıralı küme,

$$0 < 1 < 2 < 3$$

olarak tamsıralanmış $\{0, 1, 2, 3\}$ kümesine benzer. Dört elemanlı çok iyisıralı küme var ama hepsi birbirine benzer. Bunların hepsi "eşyapısal"dır.

8.1. Eşyapısallık

X ve *Y* tamsıralanmış iki küme olsun. Her iki sıralamayı da $<$ simgesiyle gösterelim. Aslında *X*'in sıralamasını $<_X$ ile *Y*'nin sıralamasını $<_Y$ ile göstermek gerekiyor, çünkü, örneğin X, Y'ye eşit bile olsa üzerlerindeki sıralamalar farklı olabilir. Eğer bir $f : X \to Y$ fonksiyonu,

$$\text{her } x_1, x_2 \in X \text{ için, } x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

özelliğini sağlıyorsa, f'ye ***eşyapı fonksiyonu*** ya da ***morfizma*** adı verilir. Yani eşyapı fonksiyonları elemanların sıralamalarını değiştirmezler, matematiksel deyimle "sıralamaya saygı duyarlar".

Bir eşyapı fonksiyonu birebir olmak zorundadır, çünkü eğer $f(x_1) = f(x_2)$ ise ne $x_1 < x_2$ olabilir ne de $x_2 < x_1$, demek ki $x_2 = x_1$ olmak zorundadır. Bu yüzden eşyapı fonksiyonlarına ***gömme*** de denir. Eğer f ayrıca örtense, f'ye ***eşyapı eşlemesi*** ya da ***izomorfizma*** denir. Bu durumda tamsıralı X ve Y kümelerine ***eşyapısal tamsıralamalar*** ya da ***izomorfik*** denir ve $X \approx Y$ yazılır.

Eşyapısallığın ortaya çıkarmaya çalıştığı şey şu: Eğer $X \approx Y$ ise, X ve Y tamsıralamaları arasında elemanlarının adları dışında hiçbir fark yoktur.

Eğer n bir doğal sayıysa n elemanlı tüm tamsıralamalar birbirine eşyapısaldır. Nitekim, X ve Y, n elemanlı iki tamsıralama olsunlar. X ve Y'nin elemanlarını küçükten büyüğe doğru

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1}$$

ve

$$y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1}$$

olarak tamsıralayalım. Şimdi $f(x_i) = y_i$ olarak tanımlanmış f fonksiyonu X'le Y arasında bir eşyapı eşlemesidir.

Sonsuz tamsıralamalar çok değişik olabilirler ama. Örneğin, doğal sıralanmış $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ kümeleri birbirinden değişiktirler, yani aralarında eşyapı eşlemesi olamaz. Açıklayalım: Doğal sıralanmış $\mathbb{N}$ kümesi bir iyisıralamadır, örneğin $\mathbb{N}$'nin bir en küçük elemanı vardır: 0. Öte yandan diğerlerinin en küçük elemanı yoktur. Demek ki $\mathbb{N}$ diğerlerinden biriyle (doğal sıralama altında) eşyapısal olamaz. $\mathbb{Q}$ ise ***yoğun*** bir sıralamadır, yani herhangi iki elemanı arasında bir eleman vardır. $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{Z}$ yoğun olmadıklarından bu özellik $\mathbb{Q}$'yü $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{Z}$'den ayrıştırır. Aynı nedenden $\mathbb{R}$ ile $\mathbb{N}$ ya da $\mathbb{Z}$ eşyapısal olamaz. $\mathbb{R}$ ile $\mathbb{Q}$ arasındaki ayrımı görmek için sıralamalar dünyasından çıkmamız lazım. Doğal sıralanmış $\mathbb{R}$ ile $\mathbb{Q}$ kümeleri arasında sıralama bakımından "pek" bir ayrım yoktur. ("Pek bir ayrım yoktur" tümcesine matematiksel bir anlam verilebilir ama konumuz bu değil; okur bu tümceyi hafife alarak okusun.) $\mathbb{R}$ ile $\mathbb{Q}$ sıralı kümeleri arasındaki ayrım sıralamadan değil "eleman sayısından" kaynaklanır: $\mathbb{Q}$ sayılabilir sonsuzluktadır, ama $\mathbb{R}$ sayılabilir sonsuzlukta değildir, dolayısıyla $\mathbb{R}$ ile $\mathbb{Q}$ kümeleri arasında, bırakın bir eşyapı eşlemesini, eşleme bile yoktur!

Şimdi eşyapı fonksiyonlarının ve eşyapısallığın birkaç özelliğini görelim.

E1. Eğer X, Y ve Z tamsıralı üç kümeyse ve
$$f : X \to Y \text{ ve } g : Y \to Z$$
birer eşyapı eşlemesiyse (fonksiyonuysa), o zaman
$$g \circ f : X \to Z$$
bir eşyapı eşlemesidir (fonksiyonudur) elbette. Sonuç: $X \approx Y$ ve $Y \approx Z$ ise $X \approx Z$ olur.

E2. Eğer X ve Y tamsıralı iki kümeyse ve
$$f : X \to Y$$
bir eşyapı eşlemesiyse , o zaman
$$f^{-1} : Y \to X$$
bir eşyapı eşlemesidir. Bunun kanıtı kolaydır ve okura bırakılmıştır. Sonuç: $X \approx Y$ ise $Y \approx X$ olur.

E3. Eğer X tamsıralı bir kümeyse, $\mathrm{Id}_X(x) = x$ olarak tanımlanmış,
$$\mathrm{Id}_X : X \to X$$
özdeşlik fonksiyonu bir eşyapı eşlemesidir. Sonuç: $X \approx X$'tir.

Bu üç özelliği daha simgesel bir yazıyla yazalım:

E1. $X \approx Y$ ve $Y \approx Z$ ise $X \approx Z$.

E2. $X \approx Y$ ise $Y \approx X$.

E3. $X \approx X$'tir.

Görüldüğü üzere tamsıralı kümeler arasında tanımladığımız $\approx$

ilişkisi sanki eşitlikmiş gibi davranıyor. Ama eşitlik olmadığı gibi, denklik ilişkisi bile değildir çünkü tamsıralı kümelerden oluşan bir küme yoktur. Birazdan, iyisıralı kümeler arasında, tamsıralama gibi davranan bir $\preccurlyeq$ ilişkisi bulacağız. (Acele davranıp tanımı hemen verelim: X'ten Y'ye giden bir eşyapı fonksiyonu varsa, bunu $X \preccurlyeq Y$ olarak göstereceğiz.)

Tamsıralanmış bir kümeden gene kendisine giden eşyapı eşlemelerine ***eşyapı eşleşmesi*** ya da ***otomorfizma*** adı verilir. Örneğin Id_X her zaman bir eşyapı eşleşmesidir.

X'in eşyapı eşleşmeleri kümesi Aut X olarak yazılır. Yukardaki üç özellikten şunlar çıkar:

1. $f, g \in \mathrm{Aut}\, X$ ise $f \circ g \in \mathrm{Aut}\, X$.
2. $f \in \mathrm{Aut}\, X$ ise $f^{-1} \in \mathrm{Aut}\, X$.
3. $\mathrm{Id}_X \in \mathrm{Aut}\, X$.

Bir tamsıralamanın tüm eşyapı eşlemelerini bulmak, o tamsıralamayı iyice anlamak demektir. Birkaç örnek verelim:

Örnek 1. X, tamsıralanmış sonlu bir kümeyse, $\mathrm{Aut}\, X = \{\mathrm{Id}_X\}$.

Örnek 2. $\mathrm{Aut}\, \mathbb{N} = \{\mathrm{Id}_\mathbb{N}\}$.

Örnek 3. Daha genel olarak, eğer X iyisıralanmış bir kümeyse, Önsav 7.6'ya göre $\mathrm{Aut}\, X = \{\mathrm{Id}_X\}$ olur.

Örnek 4. $\mathrm{Aut}\, \mathbb{Z} = \{ f_a : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : a \in \mathbb{Z}$ ve $f_a(x) = x + a\}$.

Örnek 5. Aut $\mathbb{Q}$ çok daha karmaşık bir kümedir. Eğer $a, b \in \mathbb{Q}$ ve $a > 0$ ise,

$$f_{a,b}(x) = ax + b$$

kuralıyla tanımlanmış $f_{a,b} : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ fonksiyonlarının herbiri $\mathbb{Q}$'nün bir eşyapı eşleşmesidir. Ama $\mathbb{Q}$'nün çok daha fazla eşyapı eşleşmesi vardır. Örneğin,

$$f(x) = \begin{cases} x & \textit{eğer } x \notin (0,1) \textit{ ise} \\ \dfrac{2x}{x+1} & \textit{eğer } x \in (0,1) \textit{ ise} \end{cases}$$

kuralıyla tanımlanmış fonksiyon bir eşyapı eşlemesidir. (Henüz işlemediğimiz kardinal sayıları bilenler için: $\mathbb{Q}$'nün eşyapı eşlemesi sayısı olabilecek en yüksek sayıda, yani $2^{\aleph_0}$ tanedir.)

Alıştırmalar

1. Tüm bir elemanlı kümeleri içeren bir kümenin olamayacağını kanıtlayın. (İpucu: Aksi halde tüm kümeler kümesi olurdu!) Bundan, tüm tamsıralı ya da iyisıralı kümeleri içeren bir kümenin olamayacağını çıkarın.

2. Eğer X ve Y iyisıralı kümelerse, X'le Y arasında en fazla bir tane eşyapı eşlemesi olabilir.

8.2. İyisıralamaları Birbirine Gömmek

X ve Y iki iyisıralı küme olsun. X'ten Y'ye giden bir eşyapı fonksiyonu varsa (ki bunlara gömme dedik), Sonuç 7.10'a göre X'ten Y'nin bir başlangıç dilimine giden bir ve bir tane gömme vardır.

Eğer X iyisıralaması Y iyisıralamasının içine gömülüyorsa, bunu $X \preccurlyeq Y$ olarak gösterelim. Her X, Y, Z iyisıralaması için,

E4. $X \preccurlyeq X$,

E5. $X \preccurlyeq Y$ ve $Y \preccurlyeq Z$ ise $X \preccurlyeq Z$,

E6. $X \preccurlyeq Y$ ve $Y \preccurlyeq X$ ise $X \approx Y$

olur.

Bunlardan ilk ikisini zaten biliyorduk. Üçüncüsü Sonuç 7.7'den dolayı doğru.

E4, E5, E6'ya dikkat ederseniz, bunlar, $\preccurlyeq$ ilişkisinin iyisıralı kümeler üzerinde bir tür sıralama olduğunu söylüyor.

Teorem 7.4'ün birinci kısmı, $\preccurlyeq$ ilişkisinin iyisıralı kümeleri tamsıraladığını söylüyor: Her X ve Y iyisıralaması için,

E7. Ya $X \preccurlyeq Y$ ya da $Y \preccurlyeq X$.