

Toplama'nın
Yedinci Kitabı'nda
Öklid'in *Porizmalar'*ı İçin
38 Lemmadan
İlk 19 Lemma
TASLAK

İskenderiyeli Pappus
Çeviren: David Pierce

29 Eylül 2015

Matematik Bölümü
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi
<http://mat.msgsu.edu.tr/>

Bu alıřma
Creative Commons Attribution-Gayriticari-ShareAlike 3.0
Unported Lisansı ile lisanslı.

Lisansın bir kopyasını görebilmek için,
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/>
adresini ziyaret edin ya da mektup atın:
Creative Commons,
444 Castro Street, Suite 900,
Mountain View, California, 94041, USA.

CC BY: David Pierce 

dpierce@msgsu.edu.tr

İçindekiler

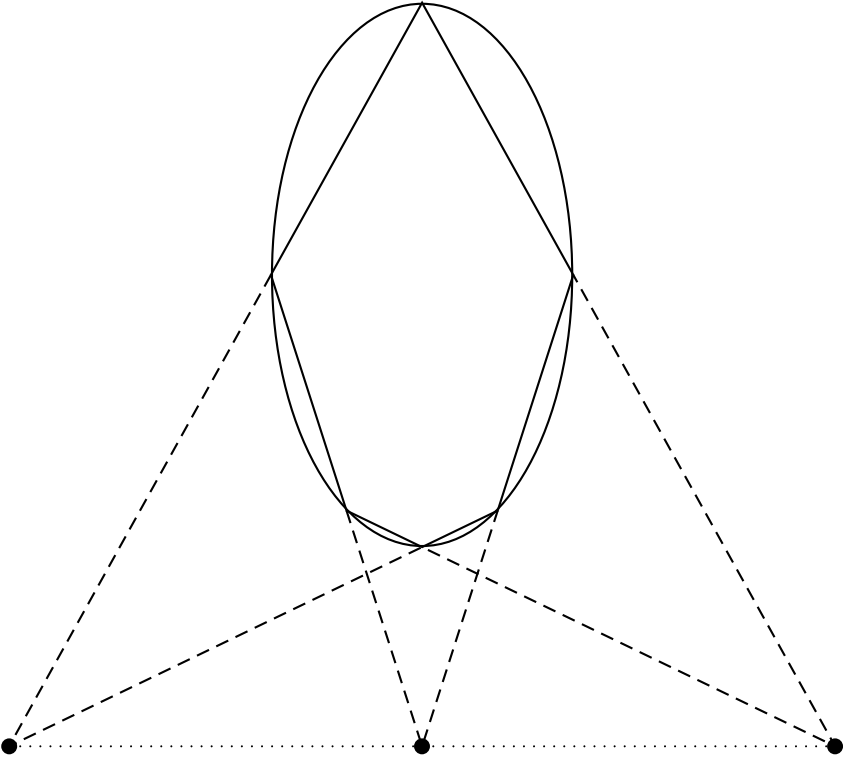
Giriş	5
Pascal Teoremi	5
Pappus Teoremi	7
Büyüklikler ve katları	9
Oranlar ve orantılılık	10
Pappus çevirisi hakkında	14
Pappus'tan 19 Lemma	15
Lemma I (Önerme 127)	16
İkinci kanıtı	17
Lemma II (Önerme 128)	18
Lemma III (Önerme 129)	20
İkinci kanıtı	22
Lemma IV (Önerme 130)	24
Lemma V (Önerme 131)	26
Lemma VI (Önerme 132)	28
Lemma VII (Önerme 133)	30
Lemma VIII (Önerme 134)	32

Lemma IX (Önerme 135)	34
Lemma X (Önerme 136)	36
Lemma XI (Önerme 137)	40
Lemma XII (Önerme 138)	42
Lemma XIII (Önerme 139)	44
Lemma XIV (Önerme 140)	46
Lemma XV (Önerme 141)	48
Lemma XVI (Önerme 142)	50
Lemma XVII (Önerme 143)	52
Lemma XVIII (Önerme 144)	54
Lemma XIX (Önerme 145)	56
Ek	58
Fiiller Sözlüğü	58
Edatlar Sözlüğü	59
Yunan Alfabeti	61
Kaynakça	62
<i>Analiz Hazinesi</i> 'nin içindekiler	64

Giriş

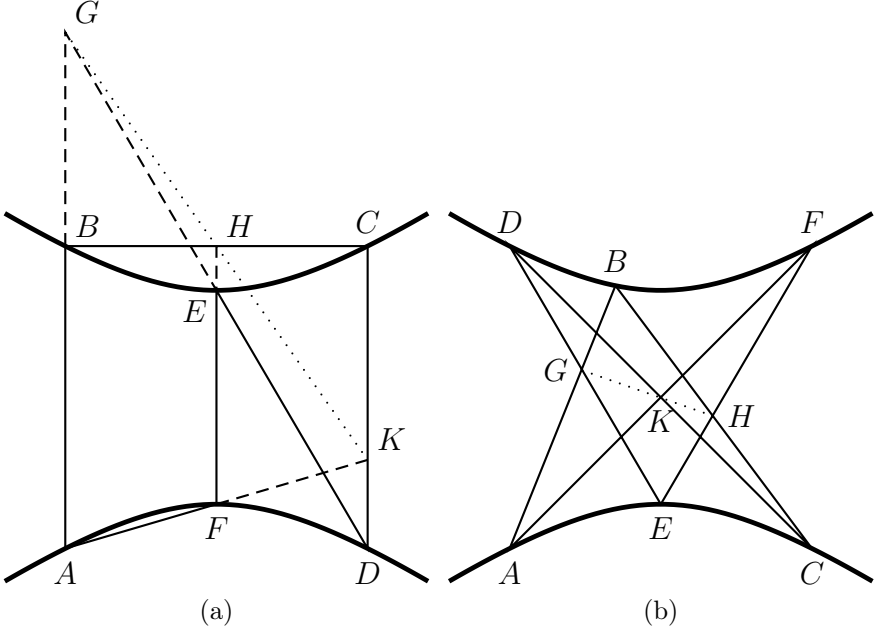
Pascal Teoremi

Bir altıgenin köşeleri bir koni kesitindeyse, altıgenin kenarları Şekil 1'deki gibi uzatılınca, karşı kenarların kesişim noktaları bir doğ-



Şekil 1: Elipste Altıgen Teoremi

rudadır. Altıgen dışbükey olmayabilir; kenarların kendileri zaten keşişebilir. Örneğin Şekil 2'nin her şikkında $A, B, C, D, E,$ ve



Şekil 2: Hiperbolde Altıgen Teoremi

F noktaları bir hiperbolün dallarındadır, ve (sonuç olarak) $G, H,$ ve K bir doğrudadır. Bu sonuç, **Altıgen Teoremi** veya **Pascal Teoremi'dir**: 1640 yılında, 16 yaşında, Blaise Pascal bu teoremi bildirdi. (Pascal'ın Fransızcası, [18] kaynağındadır; İngilizce çevirisi, [15, s. 326–30] ve [17, s. 163–8] kaynaklarındadır.)

Pascal Teoremi'nde, iki paralel doğru *sonsuzdaki noktada* keşişen olarak sayılır. Örneğin Şekil 2'de, AB ve DE birbirine paralel ise, o zaman HK de onlara paraleldir.

Pappus Teoremi

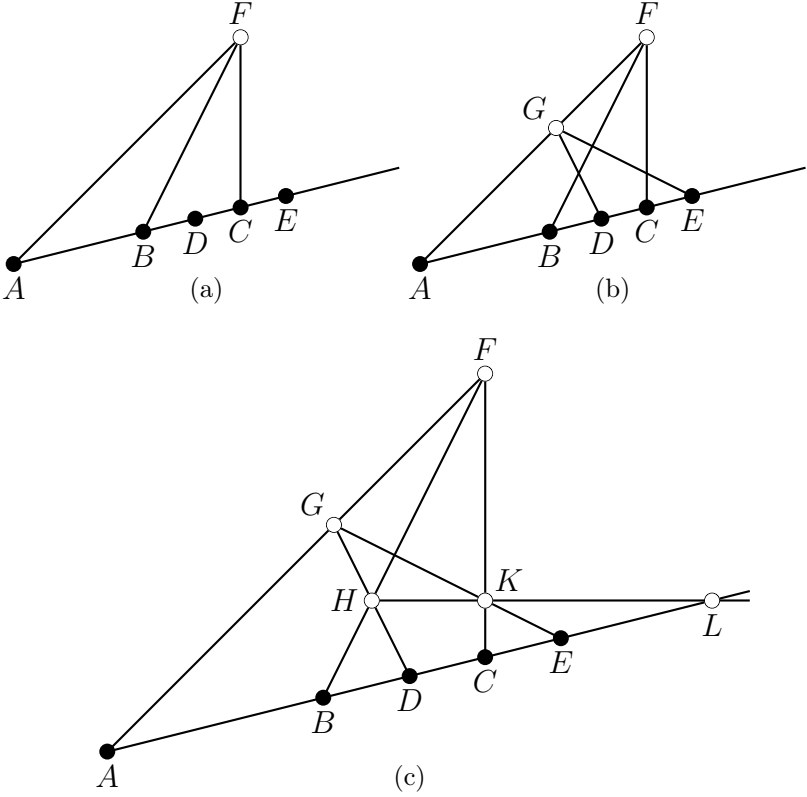
Pascal Teoremi'nde de iki doğru, bir koni kesiti olarak sayılır. Örneğin Şekil 2'nin (b) şikkında, AEC ve DBF doğru olabilir. Teoremin bu durumu, **Pappus Teoremi'dir**. Şekil 2'nin (a) şikkında, AFD ve BEC doğru ise, teorem aşikârdır.

M.S. 300 yılı civarında, *Toplama* (Συναγωγή, *Collection*) adlı eserinde İskenderiyeli Pappus, adının verileceği teoremini kanıtladı. *Toplama*'nın sekiz kitabı vardır. Yedinci kitabı, *Analiz Hazinesi* (Αναλυόμενος τόπος, *Treasury of Analysis*) adlı eserler için bir rehberdir. Pappus'a göre [20, s. 598–601], *Hazine*'nin içindekiler, sayfa 64'teki gibidir. Apollonius'un *Koni Kesitleri* ve Öklid'in *Veriler*'i hariç, *Hazine*'nin çoğu şimdi kaybolmuştur. Özel olarak Öklid'in *Porizmalar*'ı kaybolmuştur. Ama bu eserin okunmasına yardımcı olmak için, Pappus 38 lemmayı verir. Bunların ilk 19'nun çevirisi aşağıdadır. Pappus Altıgen Teoremi'nin bazı durumları, Lemma VIII, XII, ve XIII'tür. Pappus, bugünkü kendisinin adını alan teoremin her durumunu kanıtlamaz, ama kanıtladığı durumların kanıtları, Lemma III, X, ve XI'i kullanır.

Proklus'a göre ([14, s. 236] veya [19, s. 478–81] kaynaklarında), **porizma** sözcüğünün iki anlamı vardır. Porizmanın birinci anlamı, kanıtının başka bir önermenin kanıtından kolayca çıktığı bir önermedir. Örneğin Öklid'in *Öğeler* Kitap VII'nin Önerme 2'si, birbirine asal olmayan iki sayının en büyük ortak bölenini bulma problemidir. Problemin çözümünden, sayıların her ortak böleninin en büyük ortak bölenini böldüğü porizma çıkar.

Porizma sözcüğünün ikinci anlamına göre bir porizma, teorem ve problemin arasındadır. Örneğin verilen açığı ikiye bölmek bir problemdir, ama dairenin merkezini bulmak bir porizmadır, çünkü bulunmadan önce, dairenin merkezinin var olduğu bilinir.

Dört tane nokta verilirse, altı tane doğru noktaların ikisinden geçer. Bu doğruların verilen bir doğruyu nasıl kestiği, Pappus'un Lemma I, II, IV, V, VI, ve VII'sinin konusudur. Örneğin Şekil 3'te A , B , C , D , ve E noktaları bir doğrudaki olsun.



Şekil 3: Tam dörtkenarlı

- (a) Rasgele F noktası seçilsin, ve FA , FB , ve FC doğruları birleştirilsin.
- (b) AF doğrusunda rastgele G noktası seçilsin, ve GD ve GE doğruları birleştirilsin.
- (c) Sırasıyla FB ve FC 'yi H ve K 'de kesince, HK doğrusu birleştirilsin ve AB 'yi L 'de kessin.

O zaman Pappus'un gösterdiğine göre L noktası, F ve G noktalarının seçiminden bağımsızdır.

Aşağıdaki lemmalarda, Pappus sık sık orantıları kullanır. Bunların kuramı şimdi özetlenecektir.

Büyüklikler ve katları

Öklid için “eşit” (ἴσος), “aynı” (αὐτός) değildir. İki farklı sınırlanmış doğru birbirine eşit olabilir. Eşitlik hâlâ bir *denklik bağıntısıdır*. Sınırlanmış bir doğrunun **uzunluğu**, doğrunun eşitlik sınıfı olarak tanımlanabilir. Benzer şekilde bir figürün **alanı**, figürün eşitlik sınıfı olarak tanımlanabilir.

Eğer AB ve $\Gamma\Delta$ doğru ise, genişliği AB’nin uzunluğu olan ve yüksekliği $\Gamma\Delta$ ’nın uzunluğu olan bir dikdörtgen inşa edilebilir, ve bu dikdörtgeni

$$AB \cdot \Gamma\Delta$$

ifadesiyle yazacağız; Pappus

$$\tau\acute{o} \acute{\upsilon}\pi\acute{o} AB \Gamma\Delta$$

(“AB ve $\Gamma\Delta$ altındaki”) ifadesini kullanıyor.

Oranların soyut kuramı, *Öğeler*’in beşinci kitabındadır. Öklid’in tanımladığı her oranı, pozitif gerçel sayı olarak görebiliriz (ama tersi yanlış olabilir).

Bir AB doğrusunun, bir $\Gamma\Delta$ doğrusuna oranı vardır. Bu oranı

$$AB : \Gamma\Delta$$

olarak yazacağız; Pappus

$$\lambda\acute{o}\gamma\omicron\varsigma \acute{\omicron}\nu \acute{\epsilon}\chi\epsilon\iota \acute{\eta} AB \pi\rho\acute{o}\varsigma \tau\acute{\eta}\nu \Gamma\Delta$$

(“AB’nin $\Gamma\Delta$ ’ya oranı,” *ratio that AB has to $\Gamma\Delta$*) ifadesini kullanıyor.

Aynı şekilde bir $AB \cdot \Gamma\Delta$ dikdörtgenin, bir $EZ \cdot H\Theta$ dikdörtgenine oranı vardır. Bu oranı

$$AB \cdot \Gamma\Delta : EZ \cdot H\Theta$$

olarak yazacağız.

Her sınırlanmış doğru veya figür, bir **büyükklüktür** (τὸ μεγέθος). (Cisimler de büyükklüktürler.) Aslında Öklid, iki büyüklüğün oranını (ὁ λόγος) tanımlamaz, ama iki oranın aynılığını (ἀνάλογον) tanımlar. Tanım aşağıdaki gibidir.

Bir büyüklüğün **katı** (πολλαπλάσιον) alınabilir. Örneğin A bir büyüklük ise, katları

$$A, \quad A + A, \quad A + A + A, \quad A + A + A + A,$$

ve sairedir. Bunlar A, 2A, 3A, ve saire olarak yazılabilir. A gibi büyükklüktürler. Aslında A'nın herhangi bir katı

$$kA$$

biçiminde yazılabilir. Buradaki k katsayısı, doğal sayıdır. Doğal sayıların oluşturduğu küme

$$\mathbb{N}$$

olarak yazılabilir. (Bizim için sıfır, doğal sayı değildir.) k 'nın doğal sayı olduğunu göstermek için

$$k \in \mathbb{N}$$

ifadesini yazarız; ama Öklid bunun gibi bir ifade kullanmaz. Öklid için, k ifademiz isim değil, sıfat olurdu. Aslında *Öğeler*'in yedinci kitabındaki tanıma göre bir sayı (ὁ ἀριθμός), birimlerin (τὰ μονάδα) oluşturduğu bir çokluktur (τὸ πλῆθος). Bu tanıma göre bir kA katının kendisi bir sayıdır. Öklid için eğer B A'ya eşit olmayan bir büyüklük ise, o zaman kA ve kB büyüklük olarak birbirine eşit değildir, ama **kat olarak birbirine eşittir**, yani **eşit katlardır** (ἰσάκις πολλαπλασία).

Oranlar ve orantılılık

Herhangi A ve B büyüklükleri karşılaştırabilir: A B'dan büyük veya küçük olabilir, ve (büyüklük olarak) ikisi birbirine eşit olabilir.

Sırasıyla

$$A > B,$$

$$A < B,$$

$$A = B$$

ifadelerini yazarız. İki büyüklüğün her biri doğru veya her biri figür ise, o zaman varsayıma göre büyüklüklerin her birinin bir katı, öteki büyüklükten büyüktür. Bu varsayıma **Arşimet Aksiyomu** denir, çünkü Arşimet onu yazıp kullandı [1, s. 36]; ama Arşimet'ten önce Öklid onu kullandı. Öklid, M.Ö. 300 civarında çalışıyordu; Arşimet, M.Ö. 212 yılında Siraküza'nın Romalılar tarafından alınmasında öldürüldü.

Eğer iki büyüklük Arşimet Aksiyomunu sağlarsa, **büyükliklerin oranı vardır**. Bu şekilde A ve B 'nin oranı vardır ancak ve ancak bir k doğal sayısı için $kA > B$ ve $A < kB$.

Şimdi dört tane büyüklük alınsın. Bunlardan birincinin ve ikincinin oranı olsun; üçüncünün ve dördüncünün de oranı olsun. Büyüklüklerden birincinin ve üçüncünün herhangi eşit katı ve ikincinin ve dördüncünün herhangi eşit katı alınınca, eğer birincinin ve üçüncünün katları sırasıyla aynı zamanda (1) ya ikincinin ve dördüncünün katlarından büyük, (2) ya ikincinin ve dördüncünün katlarına eşit, (3) ya da ikincinin ve dördüncünün katlarından küçük ise, o zaman Öklid'in tanımına göre birincinin ikincine **oranı**, üçüncünün dördüncüne **oranıyla aynıdır**, ve dört büyüklük **orantılıdır**.

Aslında büyüklükler A , B , Γ , ve Δ olsun. Eğer herhangi k ve m doğal sayıları için

$$kA > mB \iff k\Gamma > m\Delta,$$

$$kA = mB \iff k\Gamma = m\Delta,$$

$$kA < mB \iff k\Gamma < m\Delta$$

denklikleri doğru ise, o zaman A , B , Γ , ve Δ orantılıdır, ve $A : B$ ve $\Gamma : \Delta$ oranları birbiriyle aynıdır. Bu durumda

$$A : B :: \Gamma : \Delta$$

ifadesini yazarız. Öklid ve Pappus sadece sözler kullanırlar. Örneğin AB'nın $\Gamma\Delta$ 'ya oranı, $EZ \cdot H\Theta$ 'nın $K\Lambda \cdot MN$ 'ye oranıyla aynıysa

$$AB : \Gamma\Delta :: EZ \cdot H\Theta : K\Lambda \cdot MN$$

ifadesini yazacağız, ama Pappus

$$\begin{aligned} &\omega\varsigma \ \eta \ AB \ \pi\rho\acute{o}\varsigma \ \eta \ \Gamma\Delta, \\ &\omicron\upsilon\tau\omega\varsigma \ \tau\acute{o} \ \acute{\upsilon}\pi\omicron \ EZ \ H\Theta \ \pi\rho\acute{o}\varsigma \ \tau\acute{o} \ \acute{\upsilon}\pi\omicron \ K\Lambda \ MN \end{aligned}$$

yazıyor. (Pappus'un metnini bulduğumuz el yazmasında, kısaltmalar kullanılır, ama matematik kavramları değil, sadece sözcükler için [13, p. 28].)

Herhangi A, B, Γ , ve Δ büyüklükleri için

$$A : B :: \Gamma : \Delta$$

olsun. Oranların aynılığı bir denklik bağıntısı olunca

$$\Gamma : \Delta :: A : B$$

da doğrudur. *Öğeler* Kitap V'e göre

- **tersine** ($\acute{\alpha}\nu\acute{\alpha}\pi\alpha\lambda\iota\nu$) $B : A :: \Delta : \Gamma$,
- **toplamayla** ($\sigma\upsilon\nu\theta\acute{\epsilon}\nu\tau\iota$) $A + B : B :: \Gamma + \Delta : \Delta$,
- **çevirmeye** ($\acute{\alpha}\nu\alpha\sigma\tau\rho\acute{\epsilon}\psi\alpha\nu\tau\iota$) $A - B : B :: \Gamma - \Delta : \Delta$ (burada $A > B$ olmalı),
- **izlemeyle** ($\acute{\epsilon}\nu\alpha\lambda\lambda\acute{\alpha}\xi$) $A : \Gamma :: B : \Delta$ (burada A'nın Γ 'ya ve B'nin Δ 'ya oranı var olmalı).

Ayrıca, eğer $A : B :: \Delta : E$ ve $B : \Gamma :: E : Z$ ise, o zaman **esitlikten** ($\delta\iota' \ \acute{\iota}\sigma\omicron\upsilon$)

$$A : E :: \Gamma : Z.$$

Daha genelde, eğer A_1, \dots, A_n ve A_1, \dots, B_n büyüklükleri verilirse, ve her durumda

$$A_k : A_{k+1} :: B_k : B_{k+1}$$

ise, o zaman eşitlikten

$$A_1 : A_n :: B_1 : B_n;$$

herhalde Öklid “eşitlikten” diyor çünkü çokluklar olarak A_k ’lerin ve B_k ’lerin sayıları birbirine eşittir.

Şimdi A , B , ve Γ doğru olsun. O zaman *Öğeler* Kitap VI’nın Önerme 1’ine göre

$$A : B :: A \cdot \Gamma : B \cdot \Gamma.$$

Ayrıca, tanıma göre $A : B$ ve $B : \Gamma$ oranlarının **bileşimi** ($\sigma\upsilon\nu\eta\mu\acute{\epsilon}\nu\omicron\varsigma$, $\sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\pi\tau\omega$ fiilinden), $A : \Gamma$ oranıdır, ama bu tanım *Öğeler*’de değildir. Eğer $B : \Gamma :: \Delta : E$ ise, o zaman $A : \Gamma$ oranı, $A : B$ ve $\Delta : E$ oranlarının bileşimiyle aynıdır. Bu orantıyı

$$A : \Gamma :: A : B \ \& \ \Delta : E$$

biçiminde yazacağız. Örneğin aşağıdaki Lemma I’de Pappus

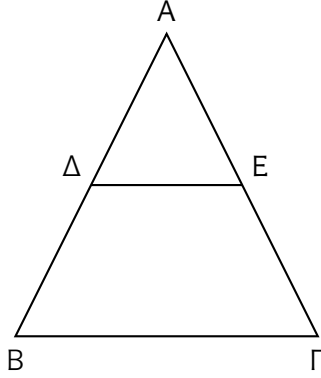
ὁ τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΔΖ συνῆται
ἐκ τε τοῦ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ
καὶ τοῦ τῆς ΕΘ πρὸς ΘΗ

orantısını yazıyor; bunu

$$ΑΔ : ΔΖ :: ΑΒ : ΒΕ \ \& \ ΕΘ : ΘΗ$$

olarak yazacağız. Lemma III’te Pappus

τοῦ ὑπὸ ΘΕ ΗΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΗ ΖΕ συνῆται λόγος
ἐκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἢ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΖ
καὶ τοῦ ὄν ἔχει ἢ ΖΗ πρὸς τὴν ΗΘ



Şekil 4: Öğeler VI.2

orantısını yazıyor; bunu

$$\Theta E \cdot HZ : \Theta H \cdot ZE :: \Theta E : EZ \ \& \ ZH : H\Theta$$

olarak yazacağız.

Son olarak, Şekil 4'te, eğer $\Delta E B\Gamma$ 'ya paralel ise, o zaman

$$B\Delta : \Delta A :: \Gamma E : EA;$$

ve tersi de doğrudur. Bu sonuç, *Öğeler* Kitap VI'nın Önerme 2'sidir.

Pappus çevirisi hakkında

Aşağıdaki çeviri için Hultsch'un [12] edisyonunu kullandım. Sadece bittikten sonra Jones'un [13] edisyonunu bulup onunla yaptığımı düzelttim.

Hultsch, *Toplama* Kitap VII'nin tüm önermelerine Arap rakamları koyar, ve oradaki Öklid'in *Porizmalar*'ı hakkındaki lemmalara Romen rakamları koyar. Yukarıda bahsettiğimiz gibi Pappus, oran ve orantılar için özel işaretler kullanmaz. Ayrıca şekillerinde tüm çizgilerin kalınlığı aynıdır. Lemmaların kanıtlarını “*Kanıt*” ve \square arasında yazıyorum; Pappus bunun gibi ifadeler kullanmaz.

Pappus'un *Toplama*'sının
Yedinci Kitabı'nda
Öklid'in *Porizmalar*'ı İçin
38 Lemmasından
İlk 19 Lemma

Lemma I (Önerme 127)

Diyagram ABΓΔEZΗ olsun (Ἔστω καταγραφή ἡ ABΓΔEZΗ), ve

$$AZ : ZH :: AΔ : ΔΓ$$

olsun, ve ΘΚ birleştirilmiş olsun. O zaman

ΘΚ, ΑΓ'ya paraleldir.

Kant. Z'dan ΒΔ'ya paralel olan ΖΛ ilerletilmiş olsun. Dolayısıyla

$$AZ : ZH :: AΔ : ΔΓ$$

olduğundan tersine ve toplamayla ve izlemeyle (ve paralellerden)

$$\frac{\Delta A : AZ}{BA : A\Lambda} :: \Gamma A : A\text{H}.$$

Böylece

ΛΗ, ΒΓ'ya paraleldir.

Böylece (paralellerden)

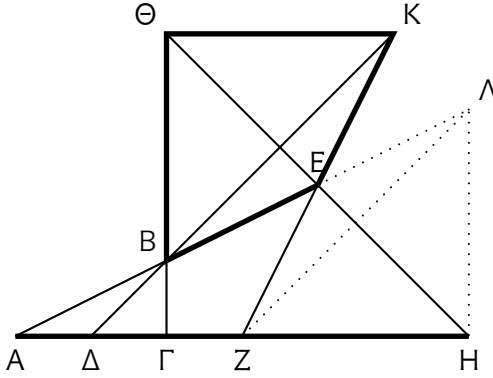
$$EB : B\Lambda :: \begin{cases} EK : KZ \\ E\Theta : \Theta H. \end{cases}$$

Böylece

$$EK : KZ :: E\Theta : \Theta H.$$

Böylece

ΘΚ, ΑΓ'ya paraleldir. □



Bileşik oranları kullanan kanıt.

$$AZ : ZH :: A\Delta : \Delta\Gamma$$

olduğundan, tersine

$$HZ : ZA :: \Gamma\Delta : \Delta A.$$

Toplamayla ve izlemeyle ve çevirmeyle

$$A\Delta : \Delta Z :: A\Gamma : \Gamma H.$$

Ama

$$A\Delta : \Delta Z :: AB : BE \ \& \ E\Theta : \Theta H,$$

böylece

$$AB : BE \ \& \ EK : KZ :: AB : BE \ \& \ E\Theta : \Theta H.$$

Ortak $AB : BE$ oranı kovulmuş olsun. Böylece kalan

$$EK : KZ :: E\Theta : \Theta H.$$

Böylece

ΘK , $A\Gamma$ 'ya paraleldir.

□

Lemma II (Önerme 128)

Diyagram $AB\Gamma\Delta EZH\Theta$ [olsun], ve AZ ΔB 'ya paralel olsun, ve

$$AE : EZ :: \Gamma H : HZ$$

[olsun]. O zaman

Θ , K , ve Z 'dan [geçen çizgi] doğrudur.

Kant. H 'dan ΔE boyunca $H\Lambda$ ilerletilmiş olsun, ve birleştirilmiş olan ΘK Λ 'ya uzatılmış olsun.

$$AE : EZ :: \Gamma H : HZ$$

olduğundan, izlemeyle

$$AE : \Gamma H :: EZ : ZH.$$

Ayrıca

$$AE : \Gamma H :: E\Theta : H\Lambda$$

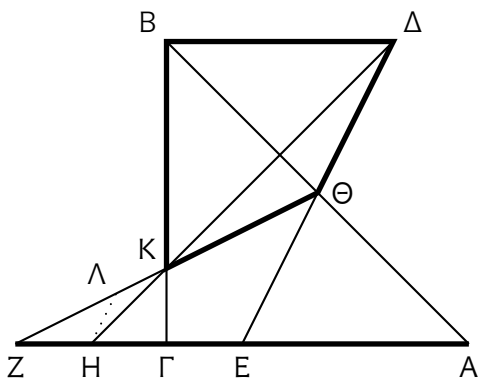
(çünkü iki doğru iki doğruya paralel, ve izlemeyle). Böylece

$$EZ : ZH :: E\Theta : H\Lambda.$$

Ayrıca $E\Theta$ $H\Lambda$ 'ya paraleldir. Böylece

Θ , Λ , Z 'dan [geçen çizgi] doğrudur,

yani Θ , K , Z 'dan. □



Lemma III (Önerme 129)

Üç doğru AB, ΓA, ve ΔA üzerine iki doğru ΘE ve ΘΔ sürdürülmüş olsun. O zaman

$$\Theta E \cdot HZ : \Theta H \cdot ZE :: \Theta B \cdot \Delta \Gamma : \Theta \Delta \cdot B\Gamma.$$

Kanıt.

- Θ'dan geçen ve ZΓA'ya paralel olan KΛ ilerletilmiş olsun, ve ΔA ve AB bununla kesilmiş olsun K ve Λ noktalarında;
- Λ'dan da geçen ve ΔA'ya paralel olan ΛM de [ilerletilmiş olsun], ve EΘ ile kesilmiş olsun M'de.

Dolayısıyla,

$$EZ : ZA :: E\Theta : \Theta\Lambda,$$

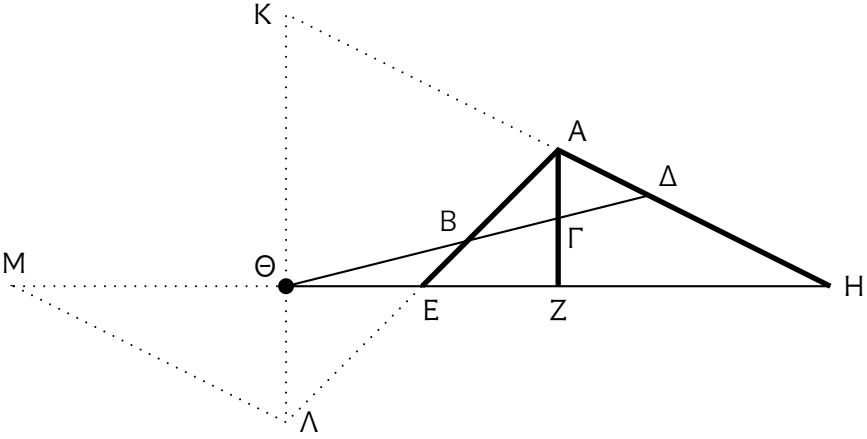
$$AZ : ZH :: \Theta\Lambda : \Theta M$$

(çünkü ikisi, ΘK : ΘH ile aynı, paralellerden), [ve bunlar] olduğundan, böylece eşitlikten

$$EZ : ZH :: E\Theta : \Theta M.$$

Böylece

$$\Theta E \cdot HZ = EZ \cdot \Theta M.$$



EZ · ΘH da başka rasgele bir [çarpımıdır]. Böylece

$$\begin{aligned} E\Theta \cdot HZ : EZ \cdot H\Theta &:: EZ \cdot \Theta M : EZ \cdot H\Theta \\ &:: \Theta M : \Theta H \\ &:: \Lambda\Theta : \Theta K. \end{aligned}$$

Aynı [şekil]de

$$K\Theta : \Theta\Lambda :: \Theta\Delta \cdot B\Gamma \cdot \Theta B \cdot \Gamma\Delta.$$

Böylece tersine

$$\Lambda\Theta : \Theta K :: \Theta B \cdot \Gamma\Delta : \Theta\Delta \cdot B\Gamma.$$

Ve

$$\Lambda\Theta \cdot \Theta K :: E\Theta \cdot HZ : EZ \cdot H\Theta$$

gösterilmiş oldu. Ve böylece

$$E\Theta \cdot HZ : EZ \cdot H\Theta :: \Theta B \cdot \Gamma\Delta : \Theta\Delta \cdot B\Gamma. \quad \square$$

Lemma III (Önerme 129)

Bileşik oranları kullanan kanıt.

$$\begin{aligned}\Theta E \cdot HZ : \Theta H \cdot ZE &:: \Theta E : EZ \ \& \ ZH : H\Theta, \\ \Theta E : EZ &:: \Theta A : ZA, \\ ZH : H\Theta &:: ZA : \Theta K\end{aligned}$$

olduğundan, böylece

$$\Theta E \cdot HZ : \Theta H \cdot EZ :: \Theta \Lambda : ZA \ \& \ ZA : \Theta K.$$

Ayrıca

$$\Theta \Lambda : ZA \ \& \ ZA : \Theta K :: \Theta \Lambda : \Theta K.$$

Böylece

$$\Theta E \cdot HZ : \Theta H \cdot ZE :: \Theta \Lambda : \Theta K.$$

Aynı [sebeple]

$$\Theta \Delta \cdot B\Gamma : \Theta B \cdot \Gamma \Delta :: \Theta K : \Theta \Lambda.$$

Ve tersine

$$\Theta B \cdot \Gamma \Delta : \Theta \Delta \cdot B\Gamma :: \Theta \Lambda : \Theta K.$$

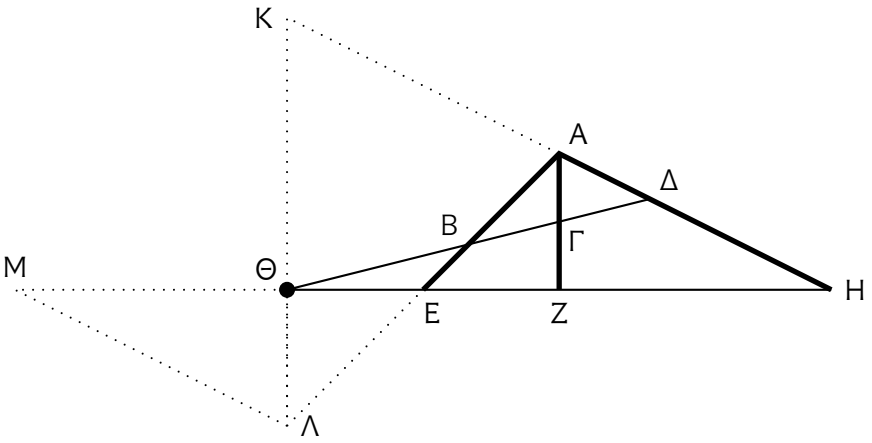
Ama

$$\Theta E \cdot ZH : \Theta H \cdot ZE :: \Theta \Lambda : \Theta K$$

oldu. Ve böylece

$$\Theta E \cdot ZH : \Theta H \cdot ZE :: \Theta B \cdot \Gamma \Delta : \Theta \Delta \cdot B\Gamma.$$

□



Lemma IV (Önerme 130)

Diyagram ABΓΔEZHΘKΛ [olsun], ve

$$AZ \cdot B\Gamma : AB \cdot \Gamma Z :: AZ \cdot \Delta E : A\Delta \cdot EZ$$

olsun. O zaman

Θ, H, ve Z noktalarından [geçen çizgi] doğrudur.

Kant. AZ · BΓ : AB · ΓZ :: AZ · ΔE : AΔ · EZ olduğundan izlemeyle

$$\underbrace{AZ \cdot B\Gamma : AZ \cdot \Delta E}_{B\Gamma : \Delta E} :: AB \cdot \Gamma Z : A\Delta \cdot EZ.$$

Ama (eğer K'dan AZ'ya paralel olan KM ilerletilmiş ise)

$$B\Gamma : \Delta E :: B\Gamma : KN \ \& \ KN : KM \ \& \ KM : \Delta E, \\ AB \cdot \Gamma Z : A\Delta \cdot EZ :: BA : A\Delta \ \& \ \Gamma Z : ZE.$$

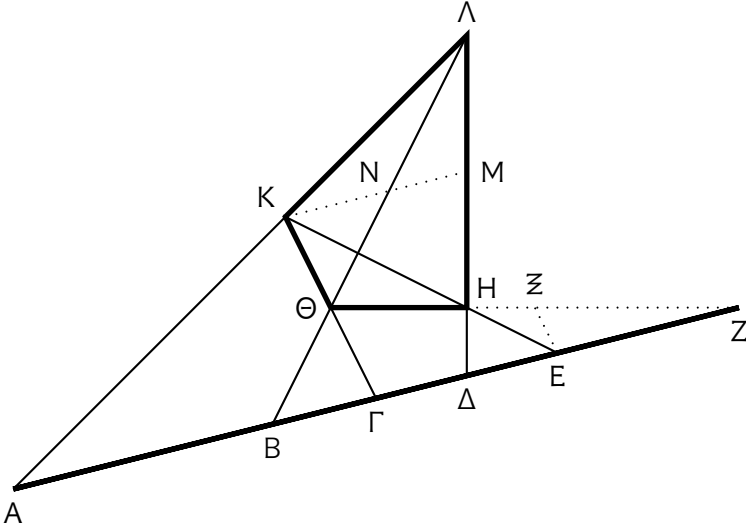
NK : KM ile aynı olan ortak BA : AΔ kovulmuş olsun, Böylece

$$\text{kalan } \Gamma Z : ZE :: \underbrace{B\Gamma : KN}_{\Theta\Gamma : K\Theta} \ \& \ \underbrace{KM : \Delta E}_{KH : HE}.$$

Böylece

Θ, H, ve Z'dan [geçen çizgi] doğrudur.

Zira eğer E'dan ΘΓ'ya paralel olan EZ'yi ilerlersem, ve birleştirilmiş olan ΘH Z'ye uzatılmış olursa,



- $KH : HE :: K\Theta : EZ$,
- $\Gamma\Theta : \Theta K$ & $\Theta K : EZ$ bileşimi $\Theta\Gamma : EZ$ oranıyla değiştirilir,
ve

$$\Gamma Z : ZE :: \Gamma\Theta : EZ.$$

$\Gamma\Theta$ EZ 'ye paralel olunca, böylece

Θ , Z , ve Z 'dan [geçen çizgi] doğrudur

(zira bu apaçıktır), öyleyse ayrıca

Θ , H , ve Z 'dan [geçen çizgi] doğrudur. □

Lemma V (Önerme 131)

Eğer diyagram $AB\Gamma\Delta EZH\Theta$ ise [ve özel olarak A, H, ve Θ 'dan geçen çizgi doğru ise],

$$A\Delta : \Delta\Gamma :: AB : B\Gamma$$

meydana gelir. Dolayısıyla $A\Delta : \Delta\Gamma :: AB : B\Gamma$ olsun. O zaman

A, H, ve Θ 'dan [geçen çizgi] doğrudur.

Kanıt. H'dan $A\Delta$ 'ya paralel olan $K\Lambda$ ilerletilmiş olsun. Dolayısıyla

$$A\Delta : \Delta\Gamma :: AB : B\Gamma$$

olduğundan, ama

$$A\Delta : \Delta\Gamma :: K\Lambda : \Lambda H,$$

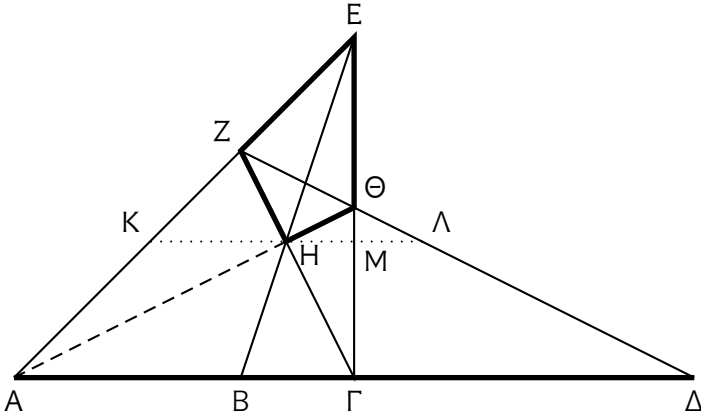
$$AB : B\Gamma :: KH : HM$$

olduğundan, böylece ayrıca

$$K\Lambda : \Lambda H :: KH : HM,$$

ve

$$\begin{aligned} \text{kalan } H\Lambda : \text{kalan } \Lambda M &:: K\Lambda : \Lambda H \\ &:: A\Delta : \Delta\Gamma. \end{aligned}$$



İzlemeyle

$$\begin{aligned} A\Delta : H\Lambda &:: \Gamma\Delta : \Lambda M \\ &:: \Delta\Theta : \Theta\Lambda, \end{aligned}$$

ve $H\Lambda$ $A\Delta$ 'ya paraleldir. Böylece

A, H, ve Θ noktalarından [geçen çizgi] doğrudur;

zira bu apaçıktır. □

Lemma VI (Önerme 132)

Yine eğer diyagram $[AB\Gamma\Delta EZH]$ ise, ve ΔZ $B\Gamma$ 'ya paralel ise,

$$AB = B\Gamma$$

meydana gelir. Dolayısıyla eşit olsun; o zaman

$[\Delta Z$ $B\Gamma$ 'ya] paraleldir.

Kanıt. Olur da. Zira eğer EB 'da HB 'ya eşit olan $B\Theta$ 'yı koyarsam, ve $A\Theta$ ve $\Theta\Gamma$ 'yı birleştirirsem,

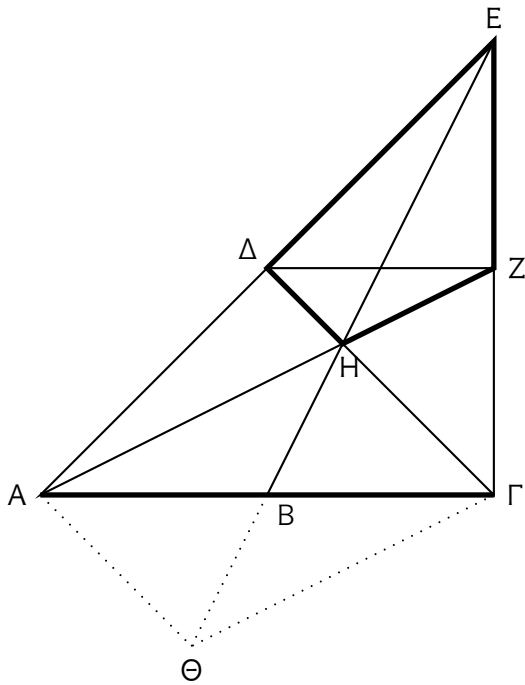
paralelkenar $A\Theta\Gamma H$ meydana gelir,

ve bundan

$$A\Delta : \Delta E :: \Gamma Z : ZE$$

(zira söylenmiş [iki oranın] her biri $\Theta H : HE$ oranıyla aynıdır).
Öyleyse

ΔZ $A\Gamma$ 'ya paraleldir. \square



Lemma VII (Önerme 133)

Diyagram olsun, ve ΔB ve $B\Gamma$ 'nin orta orantılısı BA olsun ($\tau\omega\nu \Delta B$ $B\Gamma$ μέση ἀνάλογον ἔστω ἡ BA).¹ O zaman

ZH $A\Gamma$ 'ya paraleldir.

Kant. EB uzatılmış olsun, ve A 'dan ΔZ doğrusuna paralel olan AK ilerletilmiş olsun, ve ΓK birleştirilmiş olsun. Dolayısıyla

$$\Gamma B : BA :: AB : B\Delta,$$

$$AB : B\Delta :: KB : B\Theta$$

olduğundan, ayrıca

$$\Gamma B : BA :: KB : B\Theta.$$

Böylece

$A\Theta$ $K\Gamma$ 'ya paraleldir.

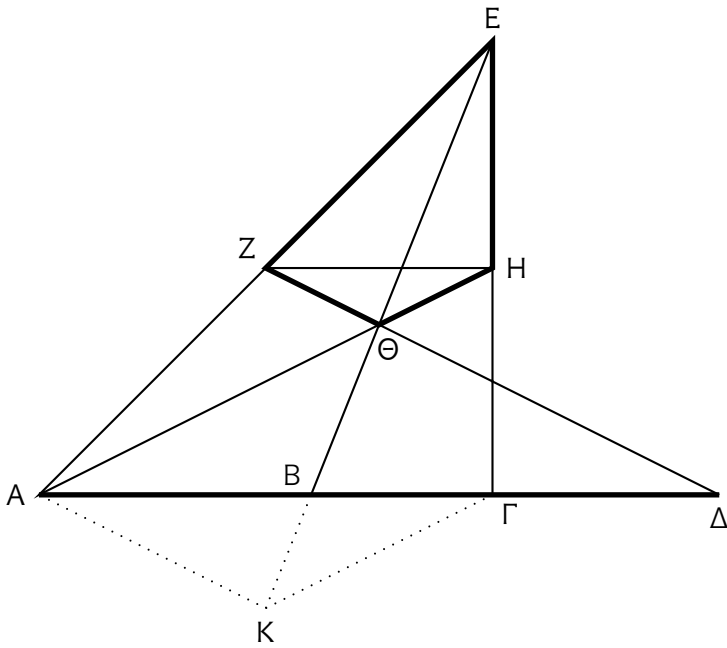
Dolayısıyla yine

$$AZ : ZE :: \Gamma H : HE$$

(zira her oran $K\Theta : \Theta E$ oranıyla aynıdır). Öyleyse

ZH $A\Gamma$ 'ya paraleldir. □

¹Yani $\Delta B : BA :: BA : B\Gamma$ olsun. *Öğeler* Önerme VI.13'üne bakın. Yunan ἡ μέση ἀνάλογον teriminin İngilizcesi *mean proportional*'dir, örneğin lisede kullandığım geometri ders kitabında [21, s. 239]. Türkçe'de Demirtaş "orta orantılı" kullanır [4, s. 214], ama Atatürk "ortakoran" kullandı [2, s. 35].



Lemma VIII (Önerme 134)

Diyagram (ó βωμίσκος “küçük sunak”) ABΓΔΕΖΗ olsun, ve

ΔΕ ΒΓ'ya, ve ΕΗ ΒΖ'ya, paralel olsun.

O zaman

ΔΖ da ΓΗ'ya paraleldir.

Kanıt. BE, ΔΓ, ve ΖΗ birleştirmiş olsun. Böylece

ΔBE üçgeni ΔΓE üçgenine eşittir.

Ortak ΔAE üçgeni eklenmiş olsun. Böylece

ABE üçgeninin tümü, ΓΔA üçgeninin tümüne eşittir.

Yine ΒΖ ΕΗ'ya paralel olduğundan

BZE üçgeni ABZ üçgenine eşittir.

Ortak ABZ üçgeni ayrılmış olsun. Böylece

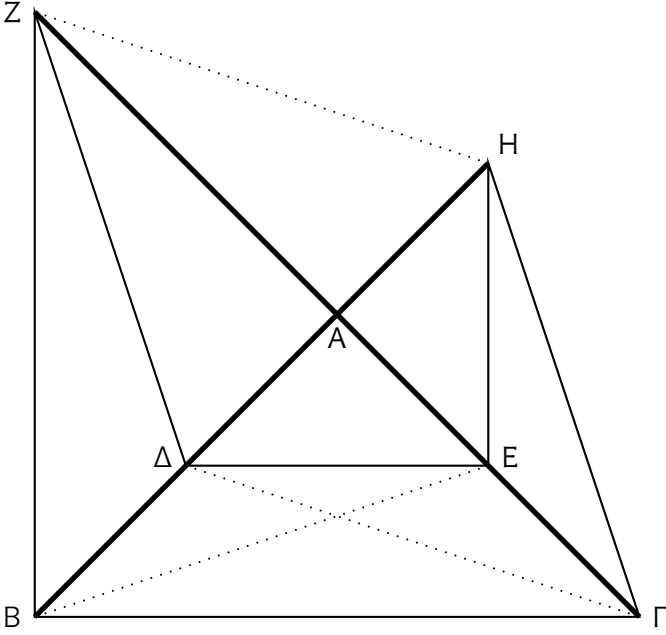
kalan ABE üçgeni, kalan AHZ üçgenine eşittir.

Ama

ABE üçgeni ΑΓΔ üçgenine eşittir.

Böylece

ΑΓΔ üçgeni de, AHZ üçgenine eşittir.



Ortak $A\Gamma H$ üçgeni eklenmiş olsun. Böylece

$\Gamma\Delta H$ üçgeninin tümü, ΓZH üçgeninin tümüne eşittir.

Ve aynı ΓH tabanıdadırlar. Böylece

$\Gamma H \Delta Z$ 'ya paraleldir.

□

Lemma IX (Önerme 135)

Üçgen $AB\Gamma$ olsun, ve orada $A\Delta$ ve AE sürdürülmüş olsun, ve $B\Gamma$ 'ya paralel olan ZH ilerletilmiş olsun, ve $Z\Theta H$ eğilmiş olsun, ve

$$B\Theta : \Theta\Gamma :: \Delta\Theta : \Theta E$$

olsun. O zaman

$K\Lambda$ $B\Gamma$ 'ya paraleldir.

Kanıt. Zira

$$B\Theta : \Theta\Gamma :: \Delta\Theta : \Theta E$$

olduğundan, böylece

$$\text{kalan } BD : \text{kalan } GE :: \Delta\Theta : \Theta E.$$

Ve

$$B\Delta : E\Gamma :: ZM : NH;$$

böylece ayrıca

$$ZM : NH :: \Delta\Theta : \Theta E.$$

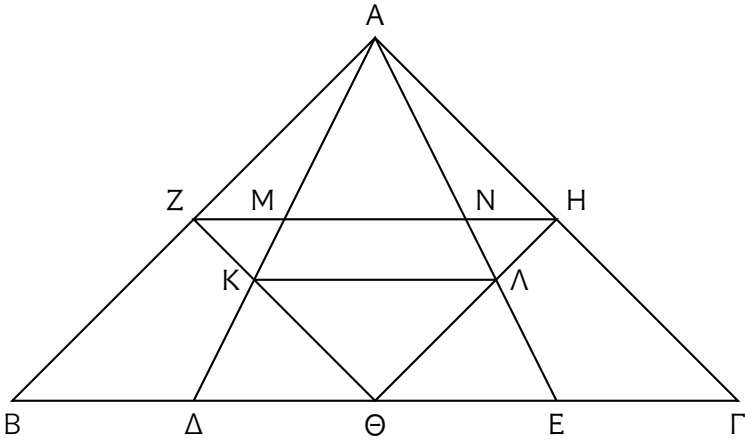
İzlemeyle

$$ZM : \Delta\Theta :: NH : \Theta E.$$

Ama paralellerden

$$ZM : \Delta\Theta :: ZK : K\Theta,$$

$$HN : \Theta E :: H\Lambda : \Lambda\Theta,$$



ve böylece

$$ZK : KΘ :: HΛ : ΛΘ.$$

Böylece

$KΛ$ HZ 'ya paraleldir,

öyleyse $ΓB$ 'ya.

□

Lemma X (Önerme 136)

İki doğru BAE ve ΔAH üzerine, Θ noktasından geçen iki doğru $\Delta\Theta$ ve ΘE sürdürülmüş olsun, ve

$$\Delta\Theta \cdot B\Gamma : \Delta\Gamma \cdot B\Theta :: \Theta H \cdot ZE : \Theta E \cdot ZH$$

olsun. O zaman

Γ , A, ve Z'dan geçen [çizgi] doğrudur.

Kanıt.

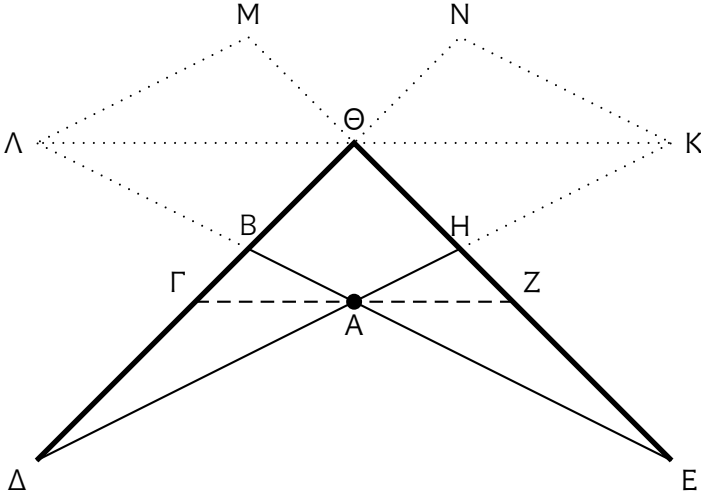
- Θ 'dan ve ΓA 'ya paralel olan $K\Lambda$ ilerletilmiş olsun,
- AB ve A Δ ile K ve Λ noktalarında kesişmiş olsun,
- Λ 'dan A Δ 'ya paralel olan ΛM ilerletilmiş olsun,
- E Θ M'ye uzatılmış olsun,
- K'dan AB'ya paralel olan KN ilerletilmiş olsun,
- $\Delta\Theta$ N'ye uzatılmış olsun.

Dolayısıyla paralellerden

$$\Delta\Theta : \Theta N :: \Delta\Gamma : \Gamma B$$

olmuş olduğundan, böylece

$$\Delta\Theta \cdot \Gamma B = \Delta\Gamma \cdot \Theta N.$$



$\Delta\Gamma \cdot B\Theta$ da başka rasgele bir [çarpımıdır]. Böylece

$$\begin{aligned} \Delta\Theta \cdot B\Gamma : \Delta\Gamma \cdot B\Theta &:: \Gamma\Delta \cdot \Theta N : \Delta\Gamma \cdot B\Theta \\ &:: \Theta N : \Theta B. \end{aligned}$$

Ama

$$\Theta\Delta \cdot B\Gamma : \Delta\Gamma \cdot B\Theta :: \Theta H \cdot ZE : \Theta E \cdot ZH$$

varsayılır, ve

$$\begin{aligned} \Theta N : \Theta B &:: K\Theta : \Theta\Lambda \\ &:: H\Theta : \Theta M && \text{(paralellerden)} \\ &:: \Theta H \cdot ZE : \Theta M \cdot ZE. \end{aligned}$$

Ve böylece

$$\Theta H \cdot ZE : \Theta E \cdot ZH :: \Theta H \cdot ZE : \Theta M \cdot ZE.$$

Böylece

$$\Theta E \cdot ZH = \Theta M \cdot ZE.$$

Lemma X (Önerme 136)

Ve böylece

$$\Theta M : \Theta E :: HZ : ZE.$$

Toplamayla ve izlemeyle

$$ME : EH :: \Theta E : EZ.$$

Ama

$$ME : EH :: \Lambda E : EA,$$

ve böylece

$$\Lambda E : EA :: \Theta E : EZ.$$

Böylece

AZ, KΛ'ya paraleldir.

Ama

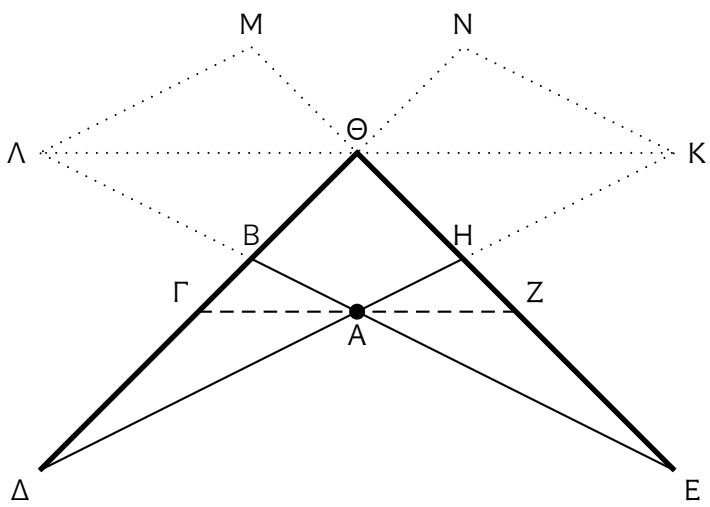
ΓA da [KΛ'ya paraleldir].

Böylece

ΓAZ doğrudur.

□

Bunun durumları, tersi olan önceden yazılmışları [yani Lemma III'ün durumları] gibidir.



Lemma XI (Önerme 137)

Üçgen $AB\Gamma$ [olsun], ve $A\Delta$ $B\Gamma$ 'ya paralel [olsun], ve sürdürülmüş olan ΔE , $B\Gamma$ ile E noktada kesilmiş olsun. O zaman

$$\Delta E \cdot ZH : EZ \cdot H\Delta :: \Gamma B : BE.$$

Kanıt. Γ 'dan AE 'a paralel olan $\Gamma\Theta$ ilerletilmiş olsun, ve AB Θ 'ya uzatılmış olsun. Dolayısıyla

$$\Gamma A : AH :: \Gamma\Theta : ZH,$$

$$\Gamma A : AH :: E\Delta : \Delta H$$

olduğundan, dahi

$$E\Delta : \Delta H :: \Theta\Gamma : ZH.$$

Böylece

$$\Gamma\Theta \cdot \Delta H = E\Delta \cdot ZH.$$

$EZ \cdot H\Delta$ da başka rasgele bir [çarpımıdır]. Böylece

$$\Delta E \cdot ZH : \Delta H \cdot EZ :: \Gamma\Theta \cdot \Delta H : \Delta H \cdot EZ$$

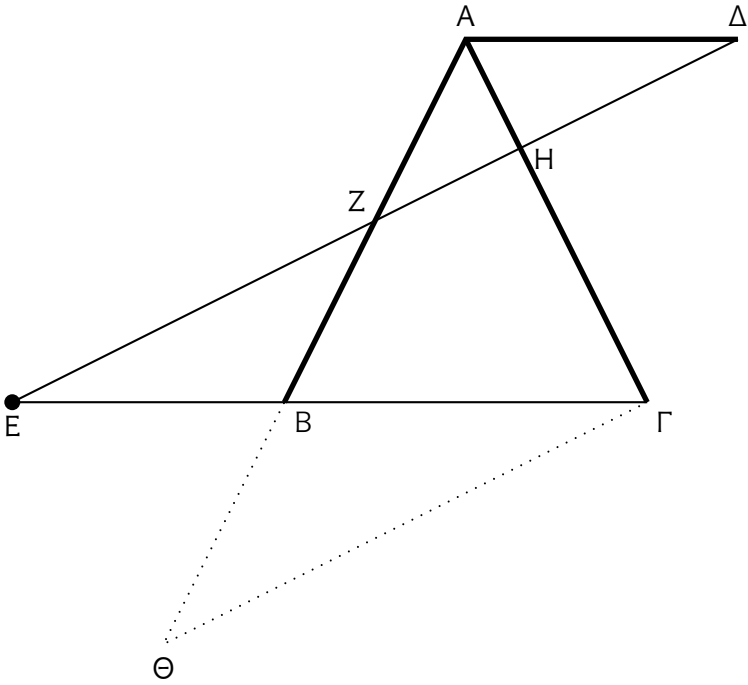
$$:: \Gamma\Theta : EZ$$

$$:: \Gamma B : BE.$$

Dolayısıyla

$$\Delta E \cdot ZH : EZ \cdot H\Delta :: \Gamma B : BE.$$

Eğer $A\Delta$ paraleli diğer tarafa da ilerletilmiş ise, ve ΔE Δ 'dan Γ 'nın ötesine sürdürülmüş ise, aynı şey [doğrudur]. \square



Lemma XII (Önerme 138)

Bunlar şimdi kanıtlanmış olunca, eğer AB ve $\Gamma\Delta$ paralel ise, ve bunların üzerine bazı doğrular $A\Delta$, AZ, B Γ , ve BZ düşerse, ve E Δ ve E Γ birleştirilirse, o zaman

H, M, ve K'dan geçen [çizgi'nin] doğru olduğu gösterilecek.

Kanıt. Zira ΔAZ üçgen olduğundan, ve AE ΔZ 'ya paralel olduğundan, ve ΔZ 'ya Γ 'da düşen E Γ sürdürülmüş olduğundan, önceden yazılmışlara göre

$$\Delta Z : Z\Gamma :: \Gamma E \cdot H\Theta : \Gamma H \cdot \Theta E$$

meydana gelir. Yine ΓBZ üçgen olduğundan, ve $\Gamma\Delta$ 'ya paralel olan BE ilerletilmiş olduğundan, ve $\Gamma Z\Delta$ 'ya Δ 'da düşen ΔE sürdürülmüş olduğundan

$$\Gamma Z : Z\Delta :: \Delta E \cdot \Lambda K : \Delta K \cdot \Lambda E$$

meydana gelir. Böylece tersine

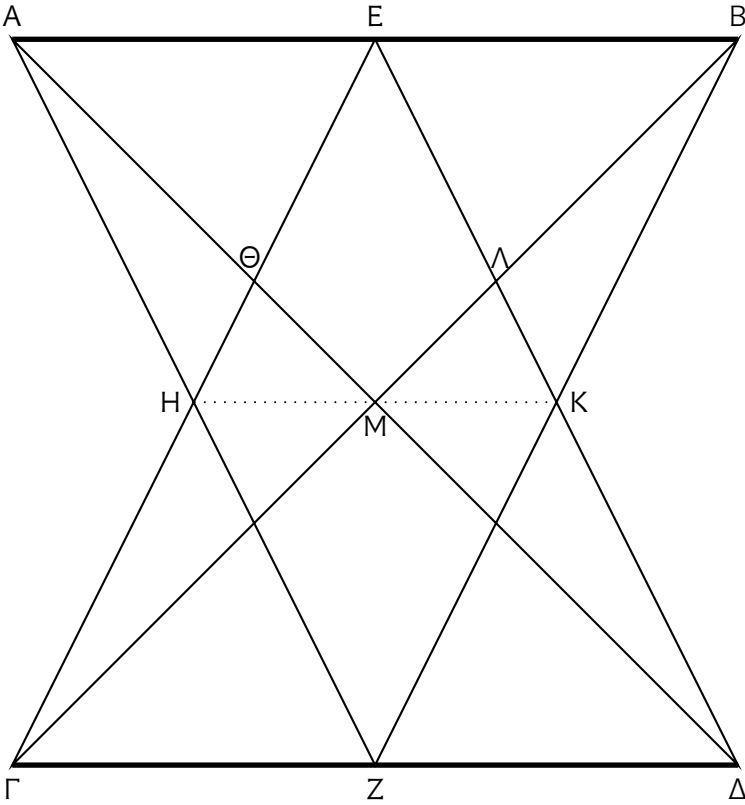
$$\Delta Z : Z\Gamma :: \Delta K \cdot \Lambda E : \Delta E \cdot \Lambda K$$

meydana gelir.

$$\Delta Z : Z\Gamma :: \Gamma E \cdot H\Theta : \Gamma H \cdot \Theta E$$

da oldu. Ve böylece

$$\Gamma E \cdot H\Theta : \Gamma H \cdot \Theta E :: \Delta K \cdot \Lambda E : \Delta E \cdot \Lambda K.$$



Dolayısıyla iki doğru $E\Gamma$ ve $E\Delta$, iki doğru $\Gamma M\Lambda$ ve $\Delta M\Theta$ 'ya sürdü-
rölmüş olduğundan, ve

$$\Gamma E \cdot H\Theta : \Gamma H \cdot \Theta E :: \Delta K \cdot E\Lambda : \Delta E \cdot \Lambda K$$

oldüğundan, böylece

H, M, ve K'dan [geçen çizgi] doğrudur;

zira bu gösterilmiş oldu. □

Lemma XIII (Önerme 139)

Ama o halde AB ve $\Gamma\Delta$ paralel olmasın, ama N'de kesişmiş olsun. O zaman yine

H, M, ve K'dan geçen [çizgi] doğrudur.

Kant. Üç doğru AN, AZ, ve A Δ üzerine aynı Γ noktasından iki doğru ΓE ve $\Gamma\Delta$ sürdürülmüş olduğundan,

$$\Gamma E \cdot H\Theta : \Gamma H : \Theta E :: \Gamma N \cdot Z\Delta : N\Delta \cdot \Gamma Z$$

meydana gelir. Yine aynı Δ noktasından, üç doğru BN, B Γ , ve BZ üzerine iki doğru ΔE ve ΔN sürdürülmüş olduğundan

$$N\Gamma \cdot Z\Delta : N\Delta : Z\Gamma :: \Delta K \cdot E\Lambda : \Delta E \cdot K\Lambda.$$

Ama

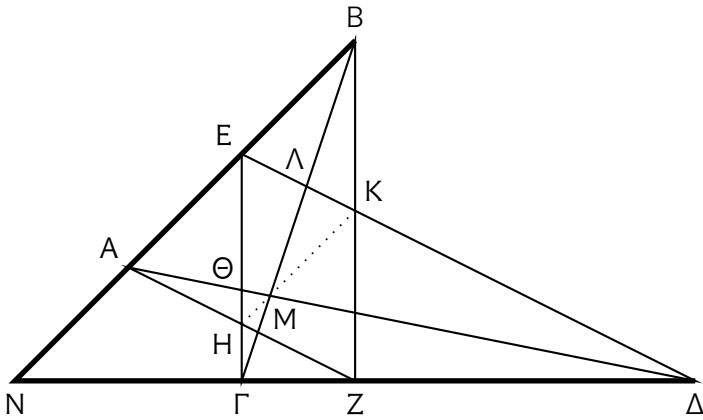
$$N\Gamma \cdot Z\Delta : N\Delta \cdot \Gamma Z :: \Gamma E \cdot H\Theta : \Gamma H \cdot \Theta E$$

gösterilmiş oldu. Ve dolayısıyla

$$\Gamma E \cdot \Theta H : \Gamma H \cdot \Theta E :: \Delta K \cdot E\Lambda : \Delta E \cdot K\Lambda.$$

O halde önceden yazılmışlara göre

H, M, ve K'dan geçen [çizgi] doğrudur. □



Lemma XIV (Önerme 140)

AB $\Gamma\Delta$ 'ya paralel olsun, ve AE ve ΓB sürdürülmüş olsun, ve [öyle] bir nokta BH'da Z [olsun] ki

$$\Delta E : E\Gamma :: \Gamma B \cdot HZ : ZB \cdot \Gamma H$$

[olsun]. O zaman

A, Z, ve Δ 'dan [geçen çizgi] doğrudur.

Kanıt.

- Δ 'dan $B\Gamma$ 'ya paralel olan $\Delta\Theta$ ilettilmiş olsun, ve AE Θ 'ya uzatılmış olsun,
- Θ 'dan $\Gamma\Delta$ 'ya paralel olan ΘK [ilettilmiş olsun], ve $B\Gamma$ K 'ya uzatılmış olsun.

Dolayısıyla

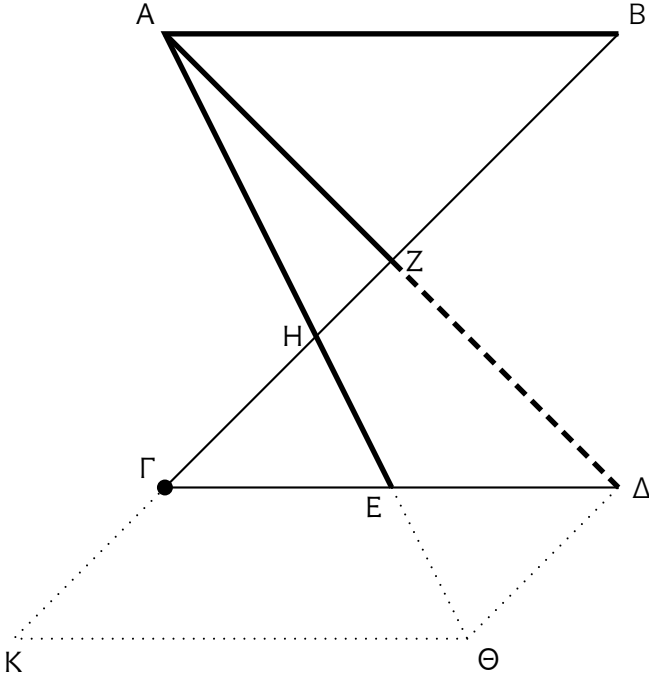
$$\Delta E : E\Gamma :: \Gamma B \cdot ZH : ZB \cdot \Gamma H,$$

$$\Delta E : E\Gamma :: \Delta\Theta : \Gamma H$$

$$:: \Delta\Theta \cdot BZ : \Gamma H \cdot BZ$$

olduğundan, böylece

$$B\Gamma \cdot ZH :: \Delta\Theta \cdot BZ.$$



Böylece

$$\begin{aligned} \Gamma B : BZ &:: \Delta \Theta : HZ \\ &:: \Gamma K : HZ \end{aligned}$$

orantı vardır. Böylece ayrıca

$$\begin{aligned} KB \text{ tümü} : BH \text{ tümü} &:: K\Gamma : ZH \\ &:: \Delta\Theta : ZH. \end{aligned}$$

Ama paralellerden

$$KB : BH :: \begin{cases} \Theta A : AH, \\ \Delta\Theta : ZH. \end{cases}$$

Ve $\Delta\Theta$ ve ZH paraleldir. Böylece

A, Z, ve Δ noktalarından [geçen çizgi] doğrudur. \square

Lemma XV (Önerme 141)

Bu önceden bakılmış olunca, AB $\Gamma\Delta$ 'ya paralel olsun, ve bunların üzerine doğrular AZ, ZB, ΓE , ve $E\Delta$ düşmüş olsun, ve B Γ ve HK birleştirilmiş olsun. O zaman

A, M, ve Δ 'dan [geçen çizgi] doğrudur.

Kant. ΔM birleştirilmiş olsun ve Θ 'ya uzatılmış olsun. Dolayısıyla B ΓZ üçgeninin B tepe noktasından $\Gamma\Delta$ 'ya paralel olan BE ilerletilmiş olduğundan ve ΔE sürdürülmüş olduğundan,

$$\Gamma Z : Z\Delta :: \Delta E \cdot K\Lambda : E\Lambda \cdot K\Delta$$

meydana gelir. Ayrıca

$$\Delta E \cdot K\Lambda : \Delta K \cdot \Lambda E :: \Gamma H \cdot \Theta E : \Gamma E \cdot H\Theta$$

(zira üç doğru $\Gamma\Lambda$, $\Delta\Theta$, ve HK üzerine aynı E noktasından iki doğru E Γ ve $E\Delta$ sürdürülmüştür). Böylece

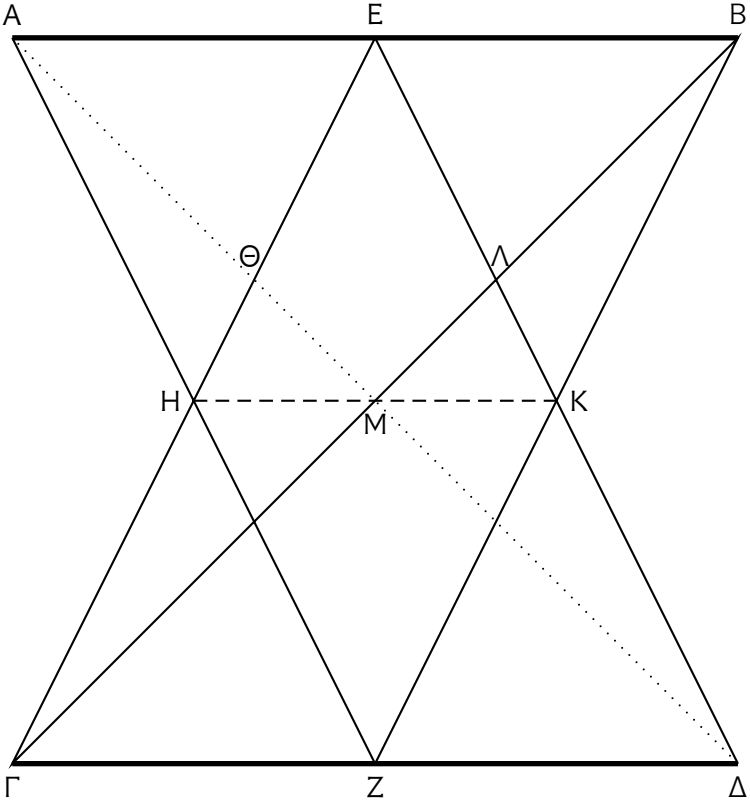
$$\Delta Z : Z\Gamma :: \Gamma E \cdot H\Theta : \Gamma H \cdot \Theta E.$$

Ayrıca

Θ , M, ve Δ 'dan [geçen çizgi] doğrudur.

Böylece önceden yazılmıştan ayrıca

A, M, ve Δ 'dan [geçen çizgi] doğrudur. \square



Lemma XVI (Önerme 142)

İki doğru AB ve AΓ üzerine aynı A noktasından ΔB ve ΔE sürdü-
rölmüş olsun, ve bunlarda H ve Θ noktaları alınmış olsun, ve

$$EH \cdot Z\Delta : \Delta E \cdot HZ :: B\Theta \cdot \Gamma\Delta : B\Delta \cdot \Gamma\Theta$$

olsun. O zaman

A, H, ve Θ'dan [geçen çizgi] doğrudur.

Kant. H'dan BΔ'ya paralel olan KΛ ilerletilmiş olsun. Dolayısıyla

$$EH \cdot Z\Delta : \Delta E \cdot ZH :: B\Theta \cdot \Gamma\Delta : B\Delta \cdot \Gamma\Theta$$

olduğundan, ama

$$\begin{aligned} EH \cdot Z\Delta : \Delta E \cdot HZ :: HE : E\Delta \ \& \ \Delta Z : ZH \\ & :: KH : B\Delta \ \& \ \Gamma\Delta : H\Lambda \end{aligned}$$

olduğundan, ve ayrıca

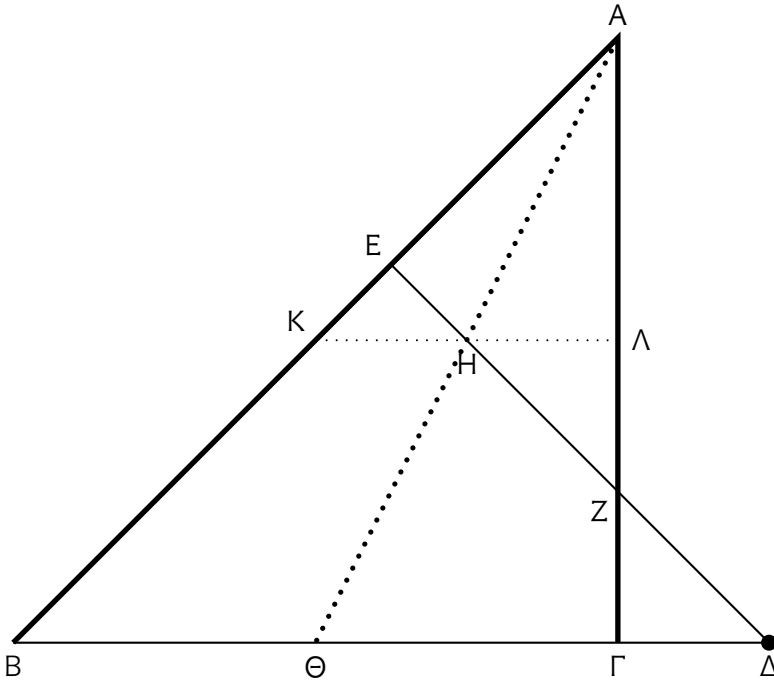
$$B\Theta \cdot \Gamma\Delta : B\Delta \cdot \Gamma\Theta :: \Theta B : B\Delta \ \& \ \Delta\Gamma : \Gamma\Theta$$

olduğundan, böylece

$$KH : B\Delta \ \& \ \Gamma\Delta : H\Lambda :: B\Theta : B\Delta \ \& \ \Delta\Gamma : \Gamma\Theta.$$

Ve

$$KH : B\Delta :: KH : B\Theta \ \& \ B\Theta : B\Delta;$$



böylece

$$KH : B\Theta \ \& \ B\Theta : B\Delta \ \& \ \Gamma\Delta : H\Lambda :: B\Theta : B\Delta \ \& \ \Delta\Gamma : \Gamma\Theta.$$

Ortak $B\Theta : B\Delta$ oranı kovulmuş olsun. Böylece kalan

$$\begin{aligned} KH : B\Theta \ \& \ \Gamma\Delta : H\Lambda :: \Delta\Gamma : \Gamma\Theta \\ &:: \Delta\Gamma : H\Lambda \ \& \ H\Lambda : \Theta\Gamma. \end{aligned}$$

Ve yine ortak $\Delta\Gamma : H\Lambda$ oranı kovulmuş olsun. Böylece kalan

$$KH : B\Theta :: H\Lambda : \Theta\Gamma.$$

İzlemeyle

$$KH : H\Lambda :: B\Theta : \Theta\Gamma,$$

ve $K\Lambda$ ve $B\Gamma$ paraleldir. Böylece

A, H, ve Θ noktalarından [geçen çizgi] doğrudur. □

Lemma XVII (Önerme 143)

Ama o halde AB ve $\Gamma\Delta$ paralel olmasın, ama N'de kesilmiş olsun.

Kanıt. Dolayısıyla aynı A noktasından üç doğru BN, B Γ , ve BZ üzerine iki doğru ΔE ve ΔN sürdürülmüş olduğundan,

$$N\Delta \cdot \Gamma Z : N\Gamma \cdot \Delta Z :: \Delta E \cdot K\Lambda : E\Lambda \cdot K\Delta.$$

Ve

$$E\Delta \cdot K\Lambda : E\Lambda \cdot K\Delta :: E\Theta \cdot \Gamma H : E\Gamma \cdot \Theta H$$

(zira yine üç doğru $\Gamma\Lambda$, $\Delta\Theta$, ve HK üzerine aynı E noktasından sürdürülmüştür iki doğru E Γ ve E Δ). Ayrıca

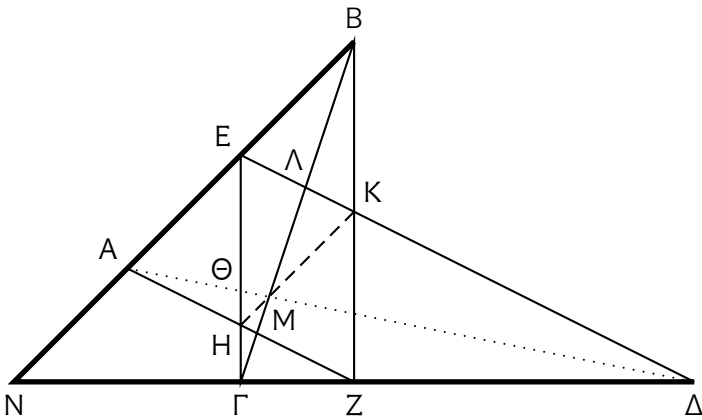
$$E\Theta \cdot \Gamma H : E\Gamma \cdot \Theta H :: N\Delta \cdot \Gamma Z : N\Gamma \cdot Z\Delta.$$

O halde önceden yazılmıştan

A, Θ , ve Λ 'dan [geçen çizgi] doğrudur.

Böylece

A, M, ve Λ 'dan [geçen çizgi] doğrudur. \square



Lemma XVIII (Önerme 144)

Üçgen $AB\Gamma$ [olsun], ve $B\Gamma$ 'ya paralel olan $A\Delta$ ilerletilmiş olsun, ve ΔE ve ZH sürdürülmüş olsun. Ayrıca

$$EB^2 : E\Gamma \cdot \Gamma B :: BH : H\Gamma$$

olsun ($\xi\sigma\tau\omega$ δὲ ὡς τὸ ἀπὸ EB πρὸς τὸ ὑπὸ $E\Gamma B$, οὕτως ἢ BH πρὸς τὴν $H\Gamma$). O zaman $B\Delta$ birleştirilirse,

Θ , K , Γ 'dan [geçen çizgi] doğru olur.

Kant. $EB^2 : E\Gamma \cdot \Gamma B :: BH : H\Gamma$ olduğundan, $E\Gamma \cdot \Gamma B : EB \cdot B\Gamma$ ile aynı olan ortak $\Gamma E : EB$ oranı eklenmiş olsun. Böylece eşitlikten

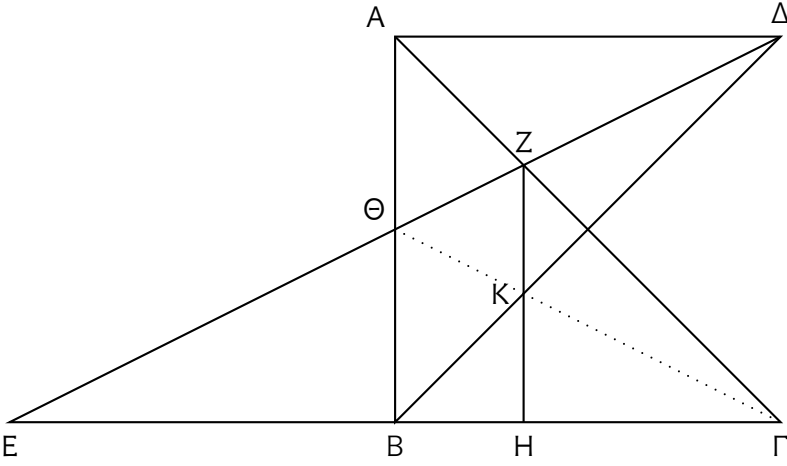
$$\left. \begin{array}{l} EB^2 : EB \cdot B\Gamma \\ EB : B\Gamma \end{array} \right\} :: BH : H\Gamma \quad \& \quad \underbrace{E\Gamma \cdot \Gamma B : EB \cdot B\Gamma}_{E\Gamma : EB}.$$

Öyleyse

$$\begin{aligned} EB^2 : EB \cdot B\Gamma &:: BH : H\Gamma \quad \& \quad E\Gamma : EB \\ &:: E\Gamma \cdot BH : EB \cdot \Gamma H. \end{aligned}$$

Önceden yazılmış lemmadan

$$EB : B\Gamma :: \Delta Z \cdot \Theta E : \Delta E \cdot Z\Theta,$$



ve böylece

$$\Gamma E \cdot BH : \Gamma H \cdot EB :: \Delta Z \cdot \Theta E : \Delta E \cdot Z\Theta.$$

Böylece

Θ , K , ve Γ 'dan [geçen çizgi] doğrudur,

zira bu, [Lemma X'un] karşıt tersinin durumlarındadır. \square

Lemma XIX (Önerme 145)

Üç doğru AB, AΓ, AΔ üzerine bir E noktasından iki doğru EZ ve EB sürdürülmüş olsun. Ayrıca

$$EZ : ZH :: \Theta E : \Theta H$$

olsun. O zaman

$$BE : B\Gamma :: E\Delta : \Delta\Gamma$$

meydana gelir.

Kant. H'dan BE'ya paralel olan AK ilerletilmiş olsun. Dolayısıyla

$$EZ : ZH :: E\Theta : \Theta H$$

olduğundan, ama

$$EZ : ZH :: E\Theta : \Theta H,$$

$$E\Theta : \Theta H :: \Delta E : H\Lambda$$

olduğundan, böylece ayrıca

$$BE : HK :: \Delta E : H\Lambda.$$

İzlemeyle

$$EB : E\Delta :: KH : H\Lambda.$$

Ve

$$KH : H\Lambda :: B\Gamma : \Gamma\Delta.$$

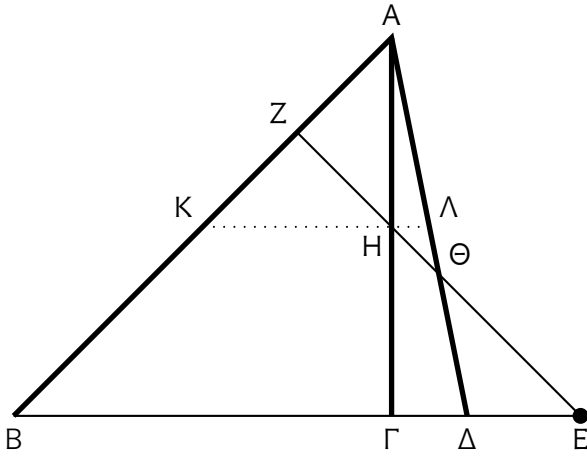
Böylece ayrıca

$$BE : E\Delta :: B\Gamma : \Gamma\Delta.$$

İzlemeyle

$$EB : B\Gamma :: E\Delta : \Delta\Gamma.$$

□



[Diğer] durumlar da benzerdir.

Ek

Fiiller Sözlüğü

ἄγω ilerle= (örneğin Lemma I'de: **Ἦχθω** διὰ τοῦ Ζ τῆ ΒΔ παράλληλος ἢ ΖΛ, “Z'dan BΔ'ya paralel olan ΖΛ *ilerletilmiş olsun*”)

ἀγάγω (sadece Lemma IV'te: Ἐὰν γὰρ διὰ τοῦ Ε τῆ ΘΓ παράλληλον **ἀγάγω** τὴν ΕΖ, “Eğer E'dan ΘΓ'ya paralel olan ΕΖ *ilerlersem*”)

διάγω sürdür= (örneğin Lemma III'te: Εἰς τρεῖς εὐθείας τὰς ΑΒ ΓΑ ΔΑ **διήχθωσαν** δύο εὐθεῖαι αἱ ΘΕ ΘΔ, “Üç doğru ΑΒ, ΓΑ, ve ΔΑ üzerine iki doğru ΘΕ ve ΘΔ *sürdürülmüş olsun*”)

αἱρέω

ἀφαιρέω ayır= (Lemma VIII)

βάλλω

ἐκβάλλω uzat=

μεταβάλλω değiştir=

γινόμεαι ol= (doğ=, meydana gel=)

γράφω

προγράφω önceden yaz=

δείκνυμι göster=

ἀποδείκνυμι kanıtla= (Lemma XII)

εἶμι ol=

ἔρω söyle= (λέγω'nun gelecek zamanı olarak kullanılır. Lemma VI'da sadece: ἐκατέρων γὰρ τῶν **εἰρημένων** ὁ αὐτός ἐστιν τῷ τῆς ΘΗ πρὸς τὴν ΗΕ λόγος, “zira *söylenmiş* [iki oranın] her biri, ΘΗ : ΗΕ oranıyla aynıdır”)

ἔχω -i ol=

ζεύγνυμι birleştir=

ἐπιζεύγνυμι birleştir=

θεωρέω

προθεωρέω önceden bak= (Sadece Lemma XV'te: Τούτου προτεθεωρημένου [*genitivus absolutus*], "Bu önceden bakılmış olunca")

κεῖμαι otur=

προσκέμαι eklen=

ὑποκέμαι varsayı=

κλάω eğ= (Lemma IX: κεκλάσθω ἢ ΖΘΗ, "ΖΘΗ *eğilmiş olsun*")

κρούω

ἐκκρούω kov=

λαμβάνω al= (Lemma XVI'da: ἐπ' αὐτῶν εἰλήφθω σημεῖα τὰ Η Θ, "bunlarda Η ve Θ noktaları *alınmış olsun*")

πίπτω

ἐμπίπτω üzerine düş=

συμπίπτω kesiş= (her zaman συμπιπτέτω [tekil] veya συμπιπτέωσαν [çoğul], "*kesişmiş olsun*")

τίθημι koy= (Lemma VI: ἐὰν γὰρ ἐπὶ τῆς ΕΒ θῶ τῆ ΗΒ ἴσην τὴν ΒΘ, "zira eğer ΕΒ'da ΗΒ'ya eşit olan ΒΘ'yu *koyarsam*")

τυγχάνω rastla= (τυχόν, "rasgele": aşağıya bakın)

Edatlar Sözlüğü

ἀλλά ama

ἄλλο δέ τι τυχόν τὸ ὑπὸ τῶν da başka rasgele bir [çarpımıdır] (örneğin Lemma III'e bakın)

ἄρα böylece

διὰ ταῦτά aynı [sebepl]e

γάρ zira

Ek

[*genitivus absolutus*] -ince

δέ de, ve

δή o halde

ἐπεὶ -diğinden

καί de, dahi, ve, ayrıca—örneğin Lemma I'de:

ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Εβ πρὸς τὴν ΒΛ,
οὕτως ἐν παραλλήλῳ ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΖ,
καὶ ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΗ,

Ama paralellerden $KB : BH :: \begin{cases} \Theta A : AH, \\ \Delta \Theta : ZH. \end{cases}$

κατὰ τὰ αὐτά aynı [şekil]de

μέν... δέ •...•... de

οὖν dolayısıyla

πάλιν yine

τούτέστιν yani—örneğin Lemma I'de:

ἔστιν ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΖ,
τούτέστιν ἐν παραλλήλῳ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΛ,
οὕτως ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΗ,

$\underbrace{\Delta A : AZ} :: \Gamma A : AH,$
 $BA : AL$

ve Lemma III'te:

ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΘ ΗΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΖ ΗΘ,
 οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΖ ΘΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΖ ΗΘ,
ΤΟΥΤΕΣΤΙΝ ἢ ΘΜ πρὸς ΘΗ,
ΤΟΥΤΕΣΤΙΝ ἢ ΛΘ πρὸς τὴν ΘΚ,

$$\begin{aligned} \text{ΕΘ} \cdot \text{ΗΖ} : \text{ΕΖ} \cdot \text{ΗΘ} &:: \text{ΕΖ} \cdot \text{ΘΜ} : \text{ΕΖ} \cdot \text{ΗΘ} \\ &:: \text{ΘΜ} : \text{ΘΗ} \\ &:: \text{ΛΘ} : \text{ΘΚ}. \end{aligned}$$

ὥστε öyleyse

Yunan Alfabeti

A	α	alfa	N	ν	nü
B	β	beta	Ξ	ξ	ksi
Γ	γ	gamma	Ο	ο	omikron (“küçük o”)
Δ	δ	delta	Π	π	pi
E	ε	epsilon (“çıplak e”)	Ρ	ρ	rho
Z	ζ	zeta	Σ	σ, ς	sigma
H	η	eta	Τ	τ	tau
Θ	θ	theta	Υ	υ	üpsilon
I	ι	iota	Φ	φ	phi
K	κ	kappa	Χ	χ	khi
Λ	λ	lambda	Ψ	ψ	psi
M	μ	mü	Ω	ω	omega (“büyük o”)

Harfler, Yunan Font Derneği'nin “NeoHellenic” fontundan alınır.
 Bu font

$$\delta = \lambda, \quad \text{E} = \text{E}, \quad \zeta = \varsigma, \quad \Xi = \Xi = \text{I}, \quad \Omega = \omega$$

alternatif biçimlerini sağlar. Sigmmanın küçük ς biçimi sadece bir sözcüğün sonunda kullanılır.

Kaynakça

- [1] Archimedes. *The Two Books On the Sphere and the Cylinder*, volume I of *The Works of Archimedes*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004. Translated into English, together with Eutocius' commentaries, with commentary, and critical edition of the diagrams, by Reviel Netz.
- [2] Mustafa Kemal Atatürk. *Geometri*. Türk Dil Kurumu, Ankara, 2000. 4. baskı. 1. baskı 1971.
- [3] Güler Çelgin. *Eski Yunanca–Türkçe Sözlük*. Kabalıcı, İstanbul, 2011.
- [4] Abdurrahman Demirtaş. *Matematik Sözlüğü*. Bilim Teknik Kültür Yayınları, Ankara, 1986.
- [5] Euclid. *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Dover Publications, New York, 1956. Translated from the text of Heiberg with introduction and commentary by Thomas L. Heath. In three volumes. Republication of the second edition of 1925. First edition 1908.
- [6] Euclid. *Öklid'in Öğeler'inin 13 Kitabından Birinci Kitap*. Mathematics Department, Mimar Sinan Fine Arts University, Istanbul, 4th edition, September 2014. The first of the 13 books of Euclid's Elements. Greek text, with Turkish version by Özer Öztürk & David Pierce.
- [7] Thomas Heath. *A History of Greek Mathematics. Vol. I. From Thales to Euclid*. Dover Publications Inc., New York, 1981. Corrected reprint of the 1921 original.
- [8] Thomas Heath. *A History of Greek Mathematics. Vol. II. From Aristarchus to Diophantus*. Dover Publications Inc., New York, 1981. Corrected reprint of the 1921 original.
- [9] Morris Kline. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Press, New York, 1972.
- [10] Henry George Liddell and Robert Scott. *A Greek-English Lexicon*. Clarendon Press, Oxford, 1996. Revised and augmented throughout by Sir Henry Stuart Jones, with the assistance of Roderick McKenzie and with the cooperation of many scholars. With a revised supplement.

- [11] James Morwood and John Taylor, editors. *Pocket Oxford Classical Greek Dictionary*. Oxford University Press, Oxford, 2002.
- [12] Pappus of Alexandria. *Pappus Alexandrini Collectionis Quae Supersunt*, volume II. Weidmann, Berlin, 1877. E libris manu scriptis edidit, Latina interpretatione et commentariis instruxit Fridericus Hultsch.
- [13] Pappus of Alexandria. *Book 7 of the Collection. Part 1. Introduction, Text, and Translation*. Springer Science+Business Media, New York, 1986. Edited With Translation and Commentary by Alexander Jones.
- [14] Proclus. *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*. Princeton Paperbacks. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992. Translated from the Greek and with an introduction and notes by Glenn R. Morrow. Reprint of the 1970 edition. With a foreword by Ian Mueller.
- [15] David Eugene Smith. *A Source Book in Mathematics*. 2 vols. Dover Publications Inc., New York, 1959. Unabridged republication of the first edition, 1929, published by McGraw-Hill.
- [16] Herbert Weir Smyth. *Greek Grammar*. Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1980. Revised by Gordon M. Messing, 1956. Eleventh Printing. Original edition, 1920.
- [17] D. J. Struik, editor. *A Source Book in Mathematics, 1200–1800*. Princeton Paperbacks. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1986. Reprint of the 1969 edition.
- [18] Rene Taton. L' « Essay pour les Coniques » de Pascal. *Revue d'histoire de science et de leurs applications*, 8(1):1–18, 1955. http://www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/rhs_0048-7996-1955_num_8_1_3488.
- [19] Ivor Thomas, editor. *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics. Vol. I. From Thales to Euclid*. Number 335 in Loeb Classical Library. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1951. With an English translation by the editor.
- [20] Ivor Thomas, editor. *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics. Vol. II. From Aristarchus to Pappus*. Number 362 in Loeb Classical Library. Harvard University Press, Cambridge, Mass, 1951. With an English translation by the editor.
- [21] Arthur W. Weeks and Jackson B. Adkins. *A Course in Geometry: Plane and Solid*. Ginn and Company, Lexington, Massachusetts, 1970.

yazar	eserinin adı	Yunancası	İngilizcesi	
Öklid	<i>Veriler</i>	Δεδώμενα	<i>Data</i>	1
Apollonius	<i>Oranın Kesilmesi</i>	Λόγου ἀποτομή	<i>Cutting-off of a Ratio</i>	2
Apollonius	<i>Alanın Kesilmesi</i>	Χωρίου ἀποτομή	<i>Cutting-off of an Area</i>	2
Apollonius	<i>Belirli Kesit</i>	Διωρισμένης τομή	<i>Determinate Section</i>	2
Apollonius	<i>Teğetler</i>	Ἐπαφαί	<i>Tangencies</i>	2
Öklid	<i>Porizmalar</i>	Πορίσματα	<i>Porisms</i>	3
Apollonius	<i>Yönelmeler</i>	Νεύσεις	<i>Vergings</i>	2
Apollonius	<i>Düzlem Yerleri</i>	Τόποι ἐπιπέδοι	<i>Plane Loci</i>	2
Apollonius	<i>Koni Kesitleri</i>	Κωνικά	<i>Conics</i>	8
Aristaeus	<i>Cisim Yerleri</i>	Τόποι στερεοί	<i>Solid Loci</i>	5
Öklid	<i>Yüz Yerleri</i>	Τόποι τῶν πρὸς ἐπιφανείᾳ	<i>Surface Loci</i>	2
Eratosthenes	<i>Ortalar hakkında</i>	Περὶ μεσοτήτων	<i>On Means</i>	2

Analiz Hazinesi'nin içindekiler (son sütun, eserin kitap [cilt] sayısını verir)