

Cebir ile Geometri

David Pierce

25 Mayıs 2025 taslağı

`mat.msgsu.edu.tr/~dpierce`

`david.pierce@msgsu.edu.tr`

Bu notlar, 2025 bahar döneminin analitik geometri derslerinde anlatılanlar için bir hatırlatmadır. Burada hata yapmamaya çalışıyorum, ama yazının matematiğinde veya Türkçesinde bir hata bulursanız lütfen bana haber verin.

İçindekiler

0	Öklid	6
1	Eksenler	9
2	Doğrular	11
3	Paralelkenarlar	16
4	Üçgenler	29
5	Çemberler	32
6	Açılar	34
7	Uzaklıklar	39
8	Uzay	44
9	Alanlar	52
10	Hacimler	54

11 Kutupsal koordinatlar	57
12 Koni Kesitleri	65
12.1 Parabol	67
12.2 Merkezli Koni Kesitleri	73
12.2.1 Elips	74
12.2.2 Hiperbol	81
13 Derecesi İki Olan Denklemler	88

Şekil Listesi

1	Desargues Teoremi, paralel durum	17
2	Paralelkenar	19
3	Paralelkenar	22
4	İki vektörün toplamı	26
5	İki paralel vektörün toplamı	27
6	Pappus Teoremi, paralel durum	28
7	Arşimet spirali	59
8	Logaritmik spiral	61
9	4-yapraklı gül	62
10	3-yapraklı gül	63
11	Parabol, odağı, ve doğrultmanı	68
12	Elips, merkezi, odakları, ve doğrultmanları	75
13	Elipsteki eksiklik	78
14	Elips, merkezi, odakları, ve doğrultmanları	82
15	Hiperbol, merkezi, odakları, ve doğrult- manları	83
16	Hiperboldeki fazlalık	85
17	Kenarları bir hiperbolün eksenlerine olan bir dikdörtgen	90

18	Eğik bir hiperbol	93
19	Eğik diyametreleri ile bir hiperbol	98
20	Eğik bir elips	103

0 Öklid

Öklid'in *Öğeler*'inin konuları,

- kitaplar I–IV'te bir düzlemdir;
- kitap V'te uzunlukların ve alanların *oranlarıdır*;
- kitap VI'da oranları kullanan *Thales Teoremidir*;
- kitaplar VII–IX'da sayma sayılarıdır;
- kitap X'da aynı birim ile ölçülmeyen uzunluklardır;
- kitaplar XI–XIII'te bir uzaydır.

Buradaki düzlem ve uzay, **Öklid düzlemi** ve **Öklid uzayıdır**.

Öklid'in oranları, bugünkü *gerçel sayılardır*. Oranlar çarpılıp toplanabilir, ve bu şekilde gerçel sayıların cebirsel özellikleri çıkar. Bundan dolayı, René Descartes'ın gösterdiği gibi geometri, cebir için bir temeldir.

Bu notlarda diğerk yöne gideceğiz. Richard Dedekind'in gösterdiği gibi gerçel sayıları, geometriyi kullanmadan inşa edebiliriz. Aslında inşa etmeyeceğiz, ama gerçel sayıların cebirsel özelliklerini kabul ederek

- $\mathbb{R}^2$ 'yi bir Öklid düzlemi,
- $\mathbb{R}^3$ 'ü bir Öklid uzayı

yapacağız. Bu şekilde cebir, geometri için bir temel olacak.

Analitik geometri, cebiri kullanan geometridir. Gördüğümüz gibi bunun mantıksal temeli ya geometri ya da cebir olarak anlaşılabilir. Analitik geometri kitaplarının çoğunda kabul edilen temel açık değildir. Bizim temelimiz cebir olacak.

Aslında Öklid'in oran tanımı, tamamen geometrik değildir, çünkü *Arşimet Aksiyomunu* varsayar. Bu aksiyoma göre iki uzunluk veya alan verildiğinde, küçüğünün bir katı, büyüğünden büyüktür.

Gerçel sayılar, bir *tam sıralı cisim*i oluşturur. Kısaca

- bir *cismin* elemanları toplanıp çarpılabilir;
- *sıralı* bir cisimde pozitif elemanların toplamı ve çarpımı da pozitifdir;
- *tam* sıralı bir cisimde her boş olmayan, üstsınırı olan kümenin en küçük üstsınırı vardır.

David Hilbert'in gösterdiği gibi saf geometriden bir *Öklid cismi* elde edilebilir. Bir Öklid cismi, sıralı bir cisimdir, ve ayrıca her pozitif eleman, bir elemanın karesidir. O zaman $\mathbb{R}$ bir Öklid cismidir, ama bazı tam olmayan sıralı cisimler Öklid cismidir. Bu notlarda $\mathbb{R}$ 'nin yerine rastgele bir Öklid cismi kullanılabilir.

Tarihler

Öklid aktif M.Ö. 300

Arşimet M.Ö. 287–212

René Descartes M.S. 1596–1650

Richard Dedekind 1831–1916

David Hilbert 1862–1943

1 Eksenler

$\mathbb{R}^2$ 'nin elemanları, girdileri gerçel sayı olan sıralı ikililerdir. Bunlardan biri

$$(a, b)$$

olduğunda

- a , onun **x koordinatıdır**, ve yeri, yatay **x eksenindedir**;
- b , onun **y koordinatıdır**, ve yeri, dikey **y eksenindedir**.

Eksenlerin kesişim noktası, her birinin 0 noktasıdır. Eğer a ve b 'nin her biri 0'dan farklı ise, o zaman x ekseninin a noktası, y ekseninin b noktası, ve eksenlerin ortak 0 noktası, bir dikdörtgenin üç köşesidir, ve dördüncü köşe, (a, b) 'dir.

Öyle düşünüyoruz, ama düşüncemizi kesinleştirmek zorundayız. Eğer a , b , c , ve d gerçel sayı olduğunda

$$a + d = b + c$$

ise, o zaman eksenlerin birinde uç noktaları a ve b olan doğru parçası, uç noktaları c ve d olan doğru parçasına

eşittir. Bu şekilde toplamının geometrik anlamı çıkar.
Çarpmanın geometrik anlamı daha zordur.

2 Doğrular

Resmi tanımımıza göre $\mathbb{R}^2$ 'nin **doğruları**,

$$(a, b) \neq (0, 0)$$

olmak üzere

$$ax + by = c$$

lineer denklemlerinin çözüm kümeleridir. Bir denklem, onun çözüm kümesini **tanımlar**.

Eğer iki doğru kesişmezse, o zaman bu doğrular birbirine **paraleldir**. Bir doğru, kendisine de paralel olsun.

Teorem 1. $\mathbb{R}^2$ 'de denklemleri

$$ax + by = e, \tag{1}$$

$$cx + dy = f \tag{2}$$

olan doğruların paralel olması için gerek ve yeter bir koşul,

$$ad - bc = 0. \tag{3}$$

Bir (g, h) noktasından geçen, denklemi (1) olan doğruya paralel olan tek bir doğru vardır, ve bu doğrunun bir denklemi,

$$ax + by = ag + bh. \tag{4}$$

Eğer koşul (3) sağlanmazsa, o zaman denklemleri (1) ve (2) olan doğruların tek bir kesişim noktası vardır, ve bu nokta,

$$\left(\frac{de - bf}{ad - bc}, \frac{af - ce}{ad - bc} \right). \quad (5)$$

Aıştırma 1. Teoremi kanıtlayın.

Aıştırma 2. a, b, c, d, e , ve f için değerler seçip denklemler (1) ve (2)'nin ortak çözümlerini bulun. Bunu (5)'i kullanmadan yapabilirsiniz.

Teorem 1'de (4), bir doğrunun *bir* denklemdir, çünkü öyle bir denklem, 0 olmayan gerçel bir sayı ile çarpılırsa, yeni denklem aynı doğruyu tanımlar.

Tanım olarak

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad (6)$$

alınsın. Bu gerçel sayı,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

matrisinin **determinantıdır**. O zaman (1) ve (2)'nin (5)'teki çözümü,

$$\left(\frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \right).$$

Teoremin bu parçası, **Cramer Kuralıdır.**

Teorem 2. $\mathbb{R}^2$ 'de eğer

$$(a, b), \quad (c, d)$$

birbirinden farklı ise, o zaman onlardan geçen tek bir doğru vardır, ve bu doğrunun bir denklemi,

$$(d - b)x + (a - c)y = ad - bc. \quad (7)$$

Alıştırma 3. Teoremi kanıtlayın.

Eğer $a \neq c$ ise, o zaman teoremdaki doğrunun başka bir denklemi,

$$\frac{y - b}{x - a} = \frac{d - b}{c - a}.$$

Genelde Teorem 2'deki doğrunun denklemi, öyle bir

$$ex + fy = g$$

ki (e, f, g) ,

$$\begin{cases} ax + by = z, \\ cx + dy = z \end{cases}$$

sistemini çözer.

Alıştırma 4. $\mathbb{R}$ 'den a, b, c , ve d için değerler seçip $\mathbb{R}^2$ 'de (a, b) ve (c, d) 'den geçen doğrunun bir denklemini bulun.

Tanım ve teoremlerimiz sayesinde $\mathbb{R}^2$ 'de *Öğeler* Kitap I'den alınmış aşağıdaki önermeler doğrudur.

1. İki farklı noktadan bir ve tek bir doğru geçer. (Postulat 1)
2. Verilen bir noktadan, verilen bir doğruya paralel olan bir ve tek bir doğru geçer. (Önermeler 29 ve 31)
3. Aynı doğruda olmayan en az üç nokta vardır. (Önerme 1'de bile varsayılan bir postulat)

Bu şekilde $\mathbb{R}^2$ bir **afin düzlemdir**.

Alıştırma 5. $\mathbb{R}^2$ 'de (a, b) , (c, d) , ve (e, f) noktalarının aynı doğruda olması için uygun bir yeter ve gerek koşul bulun.

Öğeler Kitap I Önerme 30'a göre paralellik geçişlidir. Bu teorem her afin düzlemde doğrudur:

Teorem 3. *Bir afin düzlemin doğruları kümesinde, paralellik bir denklik bağıntısıdır, yani*

- yansımalıdır (*bir doğru, kendisine paraleldir*);
- simetriktir (*bir doğru, başka bir doğruya paralel ise, o zaman her biri diğerine paraleldir*);
- geçişlidir (*iki doğru aynı doğruya paralel ise, o zaman birbirine de paraleldir*).

Kanıt. Yansımahlılık ve simetriklik aşıkârdır. Geçişliliği göstermek için

$$\ell \parallel m, \qquad m \parallel n$$

olsun. Eğer ℓ ve n kesişmezse, o zaman paraleldir. Kesişirse, kesişim noktasından m 'ye paralel olan tek bir doğru geçtiğinden ℓ ve n aynı doğrudur, dolayısıyla paraleldir. $\square$

Teorem 4. *Bir afin düzlemde her doğruya en az bir nokta vardır.*

Kanıt. Bir afin düzlemde A , B , ve C , aynı doğruya olmayan noktalar olsun. O zaman AB ve AC , birbirinden farklı olan, A 'dan geçen doğrulardır. Bu durumda ikisi aynı doğruya paralel olamaz, dolayısıyla her doğru ya AB ya da AC ile bir nokta paylaşır. $\square$

3 Paralelkenarlar

Teorem 5. *Bir afin düzlemde eğer ABC bir üçgen ise (yani A , B , ve C noktaları aynı doğruda değilse), o zaman bir ve tek bir D noktası için $ABCD$ bir paralelkenardır.*

Alıştırma 6. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 5'e göre, bir afin düzlemde, eğer Şekil 1'deki gibi ABE ve EBC üçgenler ise, o zaman bir ve tek bir şekilde $ABED$ ve $EBCF$ paralelkenarları vardır. Bu durumda

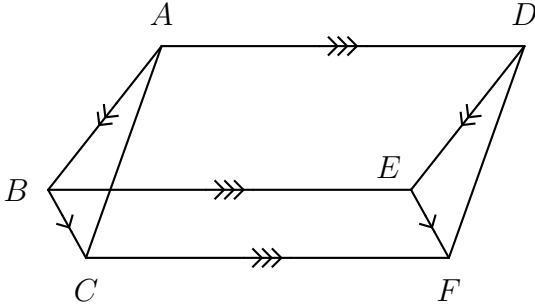
$$AD \parallel BE, \quad BE \parallel CF,$$

dolayısıyla Teorem 3 sayesinde

$$AD \parallel CF.$$

Ayrıca

$$AB \parallel DE, \quad BC \parallel EF. \quad (8)$$



Şekil 1: Desargues Teoremi, paralel durum

Eğer afin düzlemimiz $\mathbb{R}^2$ ise, o zaman **Desargues Teoreminin** bir durumuna göre

$$AC \parallel DF \quad (9)$$

paralelliği çıkar. Bunu göstereceğiz; her afin düzlemde doğru değildir.

Teorem 6. $\mathbb{R}^2$ 'de her

$$(x, y) \mapsto (x + e, y + f)$$

işleminin tersi vardır, ve işlem her doğrunun noktalarını paralel bir doğrunun noktalarına gönderir.

Kanıt. Verilen işlemin tersi,

$$(x, y) \mapsto (x - e, y - f).$$

Eğer (a, b) ve (c, d) birbirinde farklı ise, o zaman

$$(a + e, b + f), \quad (c + e, d + f)$$

noktaları da birbirinden farklıdır, ve bu durumda, Teorem 2 sayesinde, onlardan geçen doğrunun denklemi

$$\begin{aligned} (d - b)x + (a - c)y \\ = (a + e)(d + f) - (b + f)(c + e). \end{aligned} \quad (10)$$

Teorem 1 sayesinde bu doğru, (7)'nin tanımladığı doğruya paraleldir. Ayrıca, eğer (g, h) , (7)'yi sağlarsa, o zaman $(g + e, h + f)$, (10)'u sağlar. $\square$

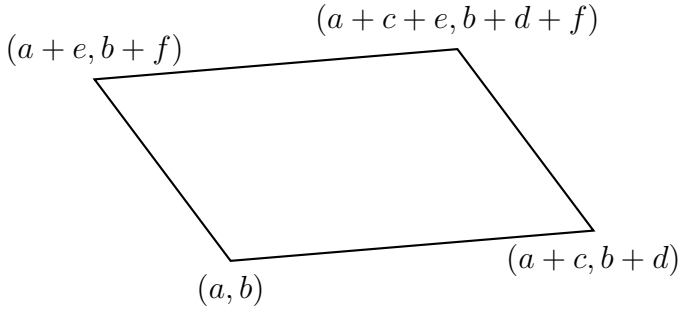
Denklem (10)'da istenirse

$$\begin{aligned} (a + e)(d + f) - (b + f)(c + e) \\ = ad + af + de + ef - (bc + be + cf + ef) \\ = ad + af + de - (bc + be + cf) \\ = ad - bc + (d - b)e + (a - c)f \end{aligned}$$

kullanılabilir.

Teorem 6'daki işlem, (a, b) ile **ötelemedir**. O zaman Şekil 2'deki dörtkenar bir paralelkenardır, çünkü Teorem 6 sayesinde

- aynı öteleme gönderir
– (a, b) noktasını $(a + c, b + d)$ noktasına,



Şekil 2: Paralelkenar

- $(a + e, b + f)$ noktasını $(a + c + e, b + d + f)$ noktasına;
- aynı öteleme gönderir
 - (a, b) noktasını $(a + e, b + e)$ noktasına,
 - $(a + c, b + d)$ noktasını $(a + c + e, b + d + f)$ noktasına.

Şimdi Desargues Teoreminin bahsettiğimiz durumunu kanıtlayabiliriz. Bunu kolaylaştırmak için, bazı kısaltmalar tanımlayacağız.

Bir afin düzlemin noktaları için A , B , ve C gibi harfler kullanıyoruz. Eğer o afin düzlem $\mathbb{R}^2$ ise, o zaman A ,

$$(a_1, a_2)$$

olsun. Bu sıralı ikiliyi, kısaltma olarak

a

biçiminde yazalım. El yazısında bu siyah harf

$$\underline{a} \text{ veya } \vec{a}$$

olarak yazılabilir. Kısaca

$$A = (a_1, a_2) = \mathbf{a} \quad (11)$$

olsun. Benzer şekilde

$$B = (b_1, b_2) = \mathbf{b},$$

$$C = (c_1, c_2) = \mathbf{c},$$

vesaire; ayrıca

$$O = (0, 0) = \mathbf{0} \quad (12)$$

olsun. Bazen (x, y) yerine (x_1, x_2) ve $\mathbf{x}$ ifadesini kullanacağız.

Şimdi $\mathbb{R}^2$ 'de tanım olarak

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

olsun. Örneğin

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{a} \quad (13)$$

bir ötelemedir. Bunun tersini ifade etmek için, başka bir tanım olarak

$$-\mathbf{a} = (-a_1, -a_2)$$

olsun. O zaman

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$$

kısaltmasını kullanabiliriz. Bu durumda, Teorem 6 sayesinde, (13)'teki ötelemenin tersi,

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - \mathbf{a}.$$

Benzer bir şekilde, sonraki teorem doğrudur.

Teorem 7. $\mathbb{R}^2$ 'de

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c},$$

$$\mathbf{b} + \mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{b},$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a},$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Alıştırma 7. Teoremi kanıtlayın.

Alıştırma 8. $\mathbb{R}^2$ 'de sadece Teorem 7'yi kullanarak, her

$$\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

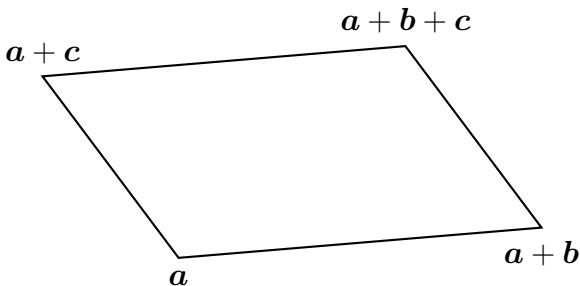
denkleminin bir ve tek bir çözümü olduğunu gösterin. Benzer bir şekilde, veya sonuç olarak,

$$\mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{d} \implies \mathbf{c} = \mathbf{d}$$

gerektirmesini gösterin.

Şimdi Şekil 3'teki dörtkenar bir paralelkenardır.

Alıştırma 9 (Desargues Teoremi, paralel durum). $\mathbb{R}^2$ 'de Şekil 1'in durumunda (9)'u kanıtlayın.



Şekil 3: Paralelkenar

Teorem 7 sayesinde, tanımladığımız toplama işlemi ile, $\mathbb{R}^2$ bir **abelyan gruptur**. O zaman

- toplama ile $\mathbb{R}$ ve
- çarpma ile $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,

abelyan grupturlar. $\mathbb{R}^3$ hariç başka abelyan gruplara bakmayacağız.

Bir afin düzlemde, girdileri iki farklı nokta olan bir sıralı ikili, bir **yönlü doğru parçasıdır**. Eğer bu girdiler A ve B ise, o zaman yönlü doğru parçasını, (A, B) yerine

$$\overrightarrow{AB}$$

olarak yazacağız. O zaman her $\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçasından, kural (11)'i kullanarak, uç noktalarının $a - b$ farkını elde edebiliriz. Bu durumda, eğer iki yönlü doğru

parçasından her birinin uç noktalarının farkı aynı ise, o zaman bu yönlü doğru parçaları **eşit** olarak sayılsın. Kısaca tanım olarak

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathbf{d} \quad (14)$$

olsun. Buradaki

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathbf{d}$$

eşitliğine göre $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ ve $\mathbf{c} - \mathbf{d}$, $\mathbb{R}^2$ 'nin *aynı* elemanıdır, ama aynı zamanda

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

eşitliğinde $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{CD}$ birbirinden farklı olabilir. Bununla beraber yönlü doğru parçalarının eşitliği bir denklik bağıntısıdır.

Aslında her durumda eğer

$$f: A \rightarrow B$$

(yani f , A kümesinden B kümesine giden bir fonksiyon) ise, o zaman A 'da

$$a R b \iff f(a) = f(b)$$

kuralı bir R denklik bağıntısını tanımlar. Eğer f de örten ise, o zaman B 'nin elemanları ile A 'nın elemanlarının R sınıfları (yani R 'ye göre denklik sınıfları) arasında bir eşleme (yani birebir örten fonksiyon) vardır.

$\mathbb{R}^2$ 'de $\mathbf{0}$ hariç her $\mathbf{a}$ elemanı, $\overrightarrow{OA}$ 'nın uç noktalarının farkıdır. Şimdi

$$\overrightarrow{AA},$$

yoğ bir yönlü doğru parçası olarak sayılsın. Her yönlü doğru parçasının eşitlik sınıfına **vektör** denir. Bu şekilde her yönlü doğru parçası bir vektörü **temsil eder**. O zaman $\mathbb{R}^2$ 'nin elemanları ve $\mathbb{R}^2$ 'nin vektörleri arasında bir eşleme vardır.

Kural (11) ile dediğimiz gibi, $\mathbb{R}^2$ 'nin aynı (a_1, a_2) elemanını

- hem bir afin düzlemin A noktası olarak,
- hem bir abelyan grubun $\mathbf{a}$ elemanı olarak

düşünebiliriz. Şimdi $\mathbf{a}$ 'yı da

- $\overrightarrow{OA}$ 'nın temsil ettiği vektör olarak

şağıdaki şekilde düşünebiliriz. Dediğimiz gibi her doğru kendisine paraleldir.

- Eğer A ve B , O ile aynı doğruda ise, o zaman bu doğruyu ya OA ya da OB olarak yazabiliriz, ve sonuç olarak

$$OA \parallel OB.$$

O zaman $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ de birbirine **paralel** olsun:

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}.$$

- Diğer durumda $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ birbirine paralel değildir:

$$\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}.$$

Alıştırma 10. $\mathbb{R}^2$ 'de her $\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçası için, her C noktası için,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

koşulunu sağlayan bir ve tek bir D noktasının olduğunu gösterin.

Şimdi *Öğeler* Kitap I Önerme 33'ün benzerini kanıtlayabiliriz:

Teorem 8. $\mathbb{R}^2$ 'de ABC bir üçgen ve D bir nokta olsun. $ABDC$ 'nin bir paralelkenar olması için gerek ve yeter bir koşul,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.$$

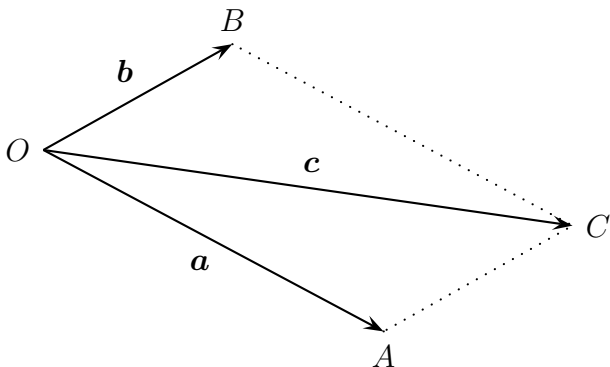
Özel olarak bu eşitlik

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$$

eşitliğini gerektirir.

Alıştırma 11. Teoremi kanıtlayın.

Sonraki teorem sayesinde, $\mathbb{R}^2$ 'nin afin yapısından ve $\mathbf{0}$ elemanından $\mathbb{R}^2$ 'nin abelyan grup yapısını elde edebiliriz. İki duruma bakmak gerekecek.



Şekil 4: İki vektörün toplamı: $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$

Teorem 9. $\mathbb{R}^2$ 'de $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$, $\mathbf{0}$ 'dan farklı olsun.

1. Eğer Şekil 4'teki gibi $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ ise, o zaman

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

olmak üzere $AOBC$ bir paralelkenardır.

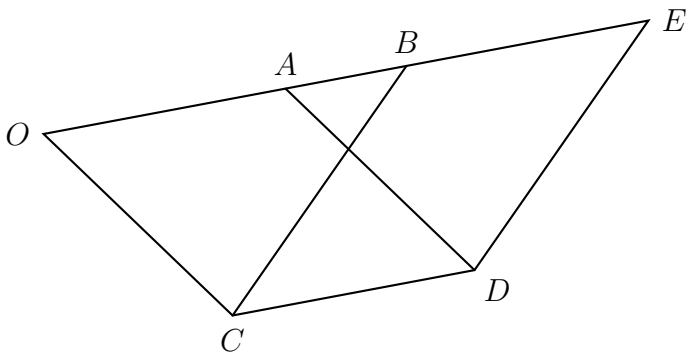
2. Eğer Şekil 5'teki gibi $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ ise, ama $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{c}$ ise, o zaman

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} + \mathbf{c},$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

olmak üzere $BCDE$ bir paralelkenardır.

Alıştırma 12. Teoremi kanıtlayın.



Şekil 5: İki paralel vektörün toplamı

Alıştırma 13. Eğer $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$, bir $\mathbf{c}$ vektörü ile aynı doğruya değilse, o zaman

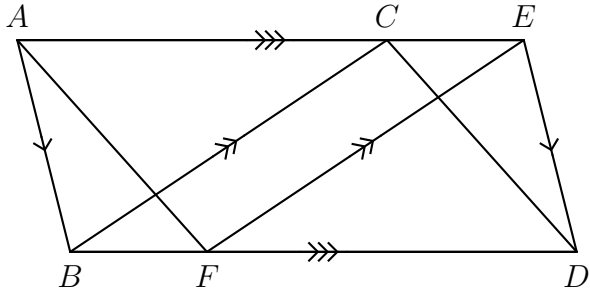
$$\mathbf{d} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$$

olmak üzere $ACBD$ 'nin bir paralelkenar olduğunu gösterin.

Alıştırma 14 (Pappus Teoremi, paralel durum). $\mathbb{R}^2$ 'de, eğer Şekil 6'daki gibi A , C , ve E bir doğruya ise, ve B , D , ve F farklı ve paralel bir doğruya ise, ve paralellikler (8) doğru ise, o zaman

$$CD \parallel FA \quad (15)$$

paralellüğünü gösterin.



Şekil 6: Pappus Teoremi, paralel durum

Bir afin düzlemde, eğer Desargues Teoreminin paralel durumu doğru ise, o zaman Pappus Teoreminin paralel durumu da doğrudur; ayrıca, eğer bir $\mathbf{0}$ noktasını seçersek, o zaman Teorem 9'daki gibi düzlemimiz bir abelyan grup olur.

4 Üçgenler

$\mathbb{R}$ 'nin her b elemanı için, $\mathbb{R}^2$ 'nin her $\mathbf{a}$ elemanı için,

$$b \cdot \mathbf{a} = (ba_1, ba_2)$$

olsun. Zaten $\mathbf{a}$ 'nin bir vektör olduğunu söyledik; şimdi b bir **skaler**dir.

Teorem 10. $\mathbb{R}^2$ 'de

$$(b + c) \cdot \mathbf{a} = b \cdot \mathbf{a} + c \cdot \mathbf{a},$$

$$c \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = c \cdot \mathbf{a} + c \cdot \mathbf{b},$$

$$(bc) \cdot \mathbf{a} = b \cdot (c \cdot \mathbf{a}),$$

$$1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}.$$

Alıştırma 15. Teoremi gösterin.

Teorem 7 ve 10 sayesinde $\mathbb{R}^2$ bir **vektör uzayı**dır.

Alıştırma 16. $\mathbb{R}^2$ 'de sadece Teorem 7 ve 10'u (ve Alıştırma 8'i) kullanarak

$$-(b \cdot \mathbf{a}) = (-b) \cdot \mathbf{a}$$

eşitliğini ve

$$b \cdot \mathbf{a} \neq \mathbf{0} \iff b \neq 0 \ \& \ \mathbf{a} \neq \mathbf{0},$$

denkliğini gösterin, ve $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ olmak üzere her

$$x \cdot \mathbf{a} = b \cdot \mathbf{a}$$

denkleminin bir ve tek bir çözümünün olduğunu gösterin.

Teorem 11. $\mathbb{R}^2$ 'de, farklı A ve B noktalarından geçen doğrunun noktaları, $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$(1 - t) \cdot \mathbf{a} + t \cdot \mathbf{b} \tag{16}$$

elemanlarıdır.

Alıştırma 17. Teoremi gösterin.

Eğer

$$\mathbf{a} \neq \mathbf{b}, \qquad \mathbf{d} \neq \mathbf{e},$$

ve

$$(1 - t) \cdot \mathbf{a} + t \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c},$$

$$(1 - t) \cdot \mathbf{d} + t \cdot \mathbf{e} = \mathbf{f}$$

ise, (A, C, B) ve (D, F, E) sıralı üçlüleri *denk* olsun. Bu denklik için, bir işaret kullanmayacağız, ama (A, C, B) 'nin denklik sınıfı

$$AC : AB$$

olacak; bu sınıf bir **orandır**. Eğer $AC : AB$ ve $DF : DE$ aynı ise, o zaman

$$AC : AB :: DF : DE$$

orantısını yazarız.

Teorem 12 (Thales). $\mathbb{R}^2$ 'de eğer ABC bir üçgen ise, ve ayrıca A 'dan farklı olan E ve F , sırasıyla AB ve AC 'nin noktası ise, o zaman

$$EF \parallel BC \iff AE : AB :: AF : AC.$$

Alıştırma 18. Teoremi gösterin.

Alıştırma 19 (Desargues Teoremi, kesişen durum). $\mathbb{R}^2$ 'de, eğer ABC ve DEF üçgenlerinin ortak köşesi yoksa, ama AD , BE , ve EF doğrularının ortak noktası varsa, ve paralellikler (8)'i doğru ise, o zaman paralellik (9)'un da doğru olduğunu gösterin.

Alıştırma 20 (Pappus Teoremi, kesişen durum). $\mathbb{R}^2$ 'de, eğer A , C , ve E bir doğruda ise, ve B , D , ve F paralel olmayan bir doğruda ise, ve paralellikler (8) doğru ise, o zaman paralellik (15)'in de doğru olduğunu gösterin.

Bir afin düzlemde, eğer Pappus Teoreminin kesişen durumu doğru ise, o zaman Desargues Teoreminin kesişen durumu da doğrudur; ayrıca, eğer bir $\mathbf{0}$ noktasını seçersek, o zaman düzlemimiz bir vektör uzayı olur.

5 Çemberler

$\mathbb{R}^2$ 'de, resmi tanımımıza göre, **merkezi** (a, b) olan, (c, d) noktasından geçen **çember**,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = (c - a)^2 + (d - b)^2$$

denkleminin çözüm kümesidir. Öklid'den öğrendiğimiz tanıma göre, uç noktalarının biri çemberde olan, biri merkez olan doğru parçaları eşittir. Ortak bir kavrama göre eşitlik bir denklik bağıntısıdır. O zaman $\mathbb{R}^2$ 'de doğru parçalarının eşitliğini

$$AB = CD \iff$$

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 = (c_1 - d_1)^2 + (c_2 - d_2)^2 \quad (17)$$

denkliği ile tanımlarız. Burada, denklik (14)'teki gibi

$$AB = CD$$

eşitliğinde doğru parçası olarak AB ve CD farklı olabilir, ama (17)'nin sağındaki eşitlik doğru ise, o zaman AB ve CD 'nin **uzunluğu** aynıdır. Bu uzunluğu $|AB|$ ile gösterebiliriz; ayrıca

$$|AB| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

ile tanımlayabiliriz. Şimdi (17),

$$AB = CD \iff |AB| = |CD| \quad (18)$$

olur.

Alıştırma 21. Ötelemelerin, uzunlukları değiştirmediğini gösterin.

6 Açılar

Açıların eşitliğini de tanımlamak isteriz. Pisagor Teoreminin koşulundan

$$\begin{aligned} |OA|^2 + |OB|^2 &= |AB|^2 \\ \iff a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 &= (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 \\ \iff 0 &= -2a_1b_1 - 2a_2b_2 \\ \iff 0 &= a_1b_1 + a_2b_2. \end{aligned}$$

Son toplam, **$\mathbf{a}$** ve **$\mathbf{b}$** 'nin **skaler çarpımıdır**. Ona **nokta çarpımı** da denir çünkü tanım olarak

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

eşitliğini yazarız.

Teorem 13. $\mathbb{R}^2$ 'de

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \\ \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}, \\ \mathbf{a} \cdot (t \cdot \mathbf{b}) &= t(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} &\geq 0, \\ |\mathbf{a}| &= \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}. \end{aligned}$$

Ayrıca

$$|\mathbf{a}| = 0 \implies \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Alıştırma 22. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 7, 10, 13 sayesinde $\mathbb{R}^2$, bir **iççarpımlı** vektör uzayıdır, kısaca bir **iççarpım uzayıdır**.

Teorem 14. $\mathbb{R}^2$ 'de

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 &= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \\ |t \cdot \mathbf{a}| &= |t||\mathbf{a}|. \end{aligned} \quad (19)$$

Ayrıca

$$\mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{b} \neq \mathbf{0}, \quad (20)$$

$$s > 0, \quad t > 0, \quad (21)$$

$$s \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c}, \quad t \cdot \mathbf{b} = \mathbf{d} \quad (22)$$

ise

$$\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}}{|\mathbf{c}||\mathbf{d}|}. \quad (23)$$

Alıştırma 23. Teoremi, sadece Teorem 13'ü kullanarak kanıtlayın.

Koşullar (20) altında açı olarak AOB ve COD aynıdır, ve bu açı, ve (23) sayesinde, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}/|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$ bölümünü belirtir. Bundan dolayı O 'dan farklı olan herhangi A , B , C , ve D için

$$\angle AOB = \angle COD \iff \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}}{|\mathbf{c}||\mathbf{d}|}$$

denkliğini, açıların eşitliğinin tanımı olarak kabul edebiliriz. O zaman açıların dikliğini

$$AO \perp OB \iff \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$$

ile tanımlayabiliriz. Ötelemelerin, açıları değiştirmediğini varsayıyoruz.

Teorem 15 (KAK ve KKK). $\mathbb{R}^2$ 'de

$$AB = DE, \quad BC = EF$$

olduğunda

$$\angle ABC = \angle DEF \iff AC = DF.$$

Alıştırma 24. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 16. $\mathbb{R}^2$ 'de $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ 'dan farklı olduğunda

$$t = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} \tag{24}$$

olsun. O zaman

$$\mathbf{a} - t \cdot \mathbf{b} \perp \mathbf{b}. \tag{25}$$

Ayrıca

$$|\mathbf{a} - t \cdot \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 - \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}{|\mathbf{b}|^2},$$

dolayısıyla

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|. \tag{26}$$

Teorem, kendi kanıtıdır, ama aşağıdaki gibi türeyebilir. Diklik (25)'ten

$$0 = (\mathbf{a} - t \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - t|\mathbf{b}|^2$$

çıkar, ve bundan (24).

Eğer AOB açısının eşitlik sınıfını θ olarak yazarsak, o zaman tanım olarak

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \quad (27)$$

olsun. Bu durumda (26) sayesinde

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1.$$

Ayrıca (19)'dan

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta.$$

Bu eşitlik, **kosinüs teoremidir**.

Alıştırma 25. Aşağıdaki iki durumda ABC ve DEF üçgenlerinin açılarının hangi açıları birbirine eşittir?

A	B	C	D	E	F
(6, 0)	(1, 0)	(0, 6)	(0, 4)	(3, 0)	(7, 3)
(0, 1)	(5, 0)	(9, 7)	(0, 23)	(17, 17)	(11, 0)

Alıştırma 26. Alıştırma 25 gibi kendi alıştırmalarınızı yaratın. Bu alıştırma için aşağıdaki yöntemi kullandım. Herhangi θ açısı için

$$\rho_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$$

olsun. O zaman ρ_θ , uzunlukları değiştirmez, dolayısıyla açıları da değiştirmez. Örneğin

$$\cos \theta = \frac{3}{5}, \quad \sin \theta = \frac{4}{5}$$

olabilir. şimdi ***a*** ve ***b***, paralel olmayan vektörler olduğunda, ve *s* ve *t*, birbirinden farklı olan pozitif skalerler olduğunda,

$$\mathbf{c} = s \cdot \mathbf{a}, \quad \mathbf{d} = t \cdot \mathbf{b}$$

olsun. O zaman

$$C' = \rho_\theta(C), \quad D' = \rho_\theta(D)$$

olduğunda

$$\angle AOB = \angle C'OD'.$$

AOB ve *C'OD'* üçgenlerini farklı ötelemeler altında alın.

7 Uzaklıklar

Eğer bir doğru bir OA doğrusuna paralel ise, o zaman ilk doğru, $\mathbf{a}$ vektörüne de **paralel** olsun.

Teorem 17. $\mathbb{R}^2$ 'de $\mathbf{0}$ 'dan farklı olan bir $\mathbf{a}$ 'ya paralel olan, bir $\mathbf{b}$ 'den geçen doğrunun noktaları,

$$\mathbf{b} + t \cdot \mathbf{a}$$

elemanlarıdır.

Alıştırma 27. Teoremi kanıtlayın. Teorem 11'i kullanabilirsiniz.

Teorem 18. *Denklemini*

$$ax + by = c \tag{28}$$

olan doğru, (a, b) vektörüne diktir.

Kanıt. Doğru, denklemi

$$ax + by = 0$$

olan doğruya paraleldir. Bu doğrunun denklemini

$$(a, b) \cdot (x, y) = 0$$

biçiminde yazabiliriz, dolayısıyla bu doğru, (a, b) vektörüne diktir. Ayrıca paralel doğrular, aynı doğrulara ve vektörlere diktir. $\square$

Sonuç olarak denklem (28)'i

$$(a, b) \cdot (x, y) = c$$

biçiminde yazmak faydalı olabilir.

Teorem 19. *Bir AB doğru parçasının orta dikmesi,*

$$(a - b) \cdot (x, y) = (a - b) \cdot \frac{a + b}{2} \quad (29)$$

tarafından tanımlanır.

Alıştırma 28. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 20. $\mathbb{R}^2$ 'de denklemi

$$a \cdot (x, y) = b \quad (30)$$

olan doğruya, c noktasından geçen dikmenin ayağı

$$c + \frac{b - a \cdot c}{|a|^2} \cdot a. \quad (31)$$

Sonuç olarak

1) denklemi (30) olan doğrudan $\mathbf{c}$ noktasının uzaklığı

$$\frac{|b - \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}|}{|\mathbf{a}|};$$

2) denklemi (30) olan doğruya göre $\mathbf{c}$ noktasının yansımaları

$$\mathbf{c} + 2 \frac{b - \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{a}|^2} \cdot \mathbf{a}.$$

Kanıt. Teorem 17 ve 18 sayesinde

- denklemi (30) olan doğru $\mathbf{a}$ 'ya diktir;
- $\mathbf{c}$ 'den ve (31)'deki verilen noktadan geçen doğru $\mathbf{a}$ 'ya paraleldir.

Ayrıca (31)'deki verilen nokta (30)'u sağlar. □

Teorem 20'yi ezberlemek zorunda olmamak için, onu türetebiliriz. Teorem 17 ve 18 sayesinde istediğimiz dikmenin ayağı

$$\mathbf{c} + t \cdot \mathbf{a}$$

biçimindedir. Bu nokta, (30)'u sağlar, dolayısıyla

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} + t \cdot \mathbf{a}) = b,$$

ve bundan

$$t = \frac{b - \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{a}|^2}. \quad (32)$$

Teorem 20'yi türetmek için başka bir yöntem de vardır. Denklemi (30) olan doğrudaki bir $\mathbf{d}$ noktası seçilsin. Teorem 16'nın türemesindeki gibi

$$\mathbf{d} - \mathbf{c} - t \cdot \mathbf{a} \perp \mathbf{a},$$

dolayısıyla

$$t = \frac{(\mathbf{d} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}.$$

Bundan (32) çıkar çünkü

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{d} = b.$$

Teorem 20'nin ikinci sonucunu Teorem 19'u kullanarak kontrol edebiliriz. Uç noktaları $\mathbf{c}$ ve $\mathbf{c} + 2t \cdot \mathbf{a}$ olan doğru parçasının orta dikmesinin denklemi,

$$2t \cdot \mathbf{a} \cdot (x, y) = 2t \cdot \mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} + t \cdot \mathbf{a})$$

veya

$$\mathbf{a} \cdot (x, y) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} + t \cdot \mathbf{a}).$$

Eğer (32) doğru ise, o zaman

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} + t \cdot \mathbf{a}) = b,$$

dolayısıyla orta dikmenin denklemi (30) olur.

Örneğin uç noktaları $(1, 1)$ ve $(3, -3)$ olan doğru parçasının orta dikmesi

$$(2, -4) \cdot (x, y) = 8$$

tarafından tanımlanır. Ayrıca bu doğru verilirse, buna $(1, 1)$ 'ten indirilen dikmesinin ayağı, öyle

$$(1, 1) + t \cdot (2, -4)$$

ki

$$8 = (2, -4) \cdot ((1, 1) + t \cdot (2, -4)) = -2 + 20t,$$

$$t = \frac{1}{2},$$

dolayısıyla ayak

$$(1, 1) + \frac{1}{2} \cdot (2, -4),$$

$$(1, 1) + (1, -2),$$

$$(2, -1).$$

Sonuç olarak

- doğrudan $(1, 1)$ noktasına uzaklık

$$|(1, -2)|,$$

$$\sqrt{5};$$

- noktanın doğruya göre yansıması

$$(1, 1) + (2, -4),$$

$$(3, -3).$$

8 Uzay

Yukarıdakilerin çoğu, $\mathbb{R}^2$ 'nin yerine $\mathbb{R}^3$ ile yapılabilir.

$\mathbb{R}^3$ 'ün elemanları, girdileri gerçel sayı olan sıralı üçlülerdir. Bunlardan biri

$$(a, b, c)$$

olduğunda

- a , onun x koordinatıdır, ve yeri, x eksenindedir;
- b , onun y koordinatıdır, ve yeri, y eksenindedir;
- c , onun **z koordinatıdır**, ve yeri, **z eksenindedir.**

Eğer (11)'in yerinde

$$A = (a_1, a_2, a_3) = \mathbf{a}$$

gibi kısaltmalar kullanırsak, o zaman

$$\begin{aligned}\mathbf{a} + \mathbf{b} &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3), \\ \mathbf{0} &= (0, 0, 0), \\ -\mathbf{a} &= (-a_1, -a_2, -a_3), \\ b \cdot \mathbf{a} &= (b \cdot a_1, b \cdot a_2, b \cdot a_3), \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\end{aligned}$$

tanımları ile $\mathbb{R}^3$, bir iççarpım uzayı olur. Özellikle Teorem 7, 10, 13, 14, ve 16, $\mathbb{R}^3$ 'te de doğrudur. Teorem 11, $\mathbb{R}^3$ 'ün doğrularının tanımı olarak kabul edilebilir. Bu durumda

$$(x, y, z) \mapsto (x + a, y + b, z + c)$$

veya

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{a}$$

işlemi için Teorem 6 doğrudur, ve $\mathbb{R}^3$ 'te Teorem 17 doğrudur. Ayrıca açıları ölçmek için (27) kabul edilebilir.

Eğer $\mathbf{0}$ 'dan farklı olan bir $\mathbf{a}$ 'ya paralel olan, bir $\mathbf{b}$ elemanından geçen doğrunun $\mathbf{b} + t \cdot \mathbf{a}$ noktalarını (x, y, z) olarak yazarsak, o zaman

$$x = b_1 + a_1t, \quad y = b_2 + a_2t, \quad z = b_3 + a_3t.$$

Eğer ayrıca

$$a_1a_2a_3 \neq 0$$

ise, o zaman

$$\frac{x - b_1}{a_1} = \frac{y - b_2}{a_2} = \frac{z - b_3}{a_3}. \quad (33)$$

Burada üç lineer denklem vardır ama ikisi, üçüncüsünü gerektirir. Diğer durumlarda, örneğin

$$a_1 a_2 \neq 0, \quad a_3 = 0$$

ise, o zaman

$$\frac{x - b_1}{a_1} = \frac{y - b_2}{a_2}, \quad z = b_3 \quad (34)$$

denklemleri çıkar. Eğer

$$a_1 \neq 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0$$

ise, o zaman

$$y = b_2, \quad z = b_3 \quad (35)$$

denklemleri çıkar.

Yukarıdaki sistemler (33), (34), ve (35)'teki denklemlerin her biri, bir **düzlem** tanımlar. Aslında $\mathbb{R}^3$ 'ün her düzlemi,

$$(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

olmak üzere bir

$$ax + by + cz = d \quad (36)$$

lineer denkleminin çözüm kümesidir. Aynı (36) denklemi

$$(a, b, c) \cdot (x, y, z) = d$$

biçiminde yazılabilir.

Eğer denklemi

$$\mathbf{a} \cdot (x, y, z) = b \quad (37)$$

olan düzlemde birbirinden farklı olan $\mathbf{c}$ ve $\mathbf{d}$ oturursa, o zaman

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{d}) = 0,$$

dolayısıyla $\mathbf{c}$ ve $\mathbf{d}$ 'den geçen doğru $\mathbf{a}$ 'ya diktir. Bu şekilde Teorem 18'in benzeri $\mathbb{R}^3$ 'te doğrudur, ve $\mathbf{a}$, denklemi (37) olan düzlemin bir dikmesidir. Bunun için **normal** de kullanılır çünkü Latince *norma* bir gönyedir.

Şimdi $\mathbb{R}^3$ 'te Teorem 19 ve 20 doğrudur ama (29) ve (30)'da (x, y) 'nin yerine (x, y, z) konulmalı çünkü $\mathbb{R}^3$ 'te bu denklemler düzlem tanımlar.

Şimdi

$$\mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{b} \neq \mathbf{0} \quad (38)$$

olmak üzere denklemleri sırasıyla

$$\mathbf{a} \cdot (x, y, z) = c, \quad \mathbf{b} \cdot (x, y, z) = d$$

olan düzlemler veriliğinde

- $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ ise düzlemler **paraleldir** çünkü kesişmez veya aynıdır;

- $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ ise düzlemler kesişir, ve bir lineer cebir dersindeki gibi düzlemlerin denklemlerinden (33), (34), ve (35) gibi bir sistem elde edilebilir. Özellikle düzlemlerin kesişimi bir doğrudur.

Bu şekilde Teorem 1 ve 3'ün benzerleri $\mathbb{R}^3$ 'te doğrudur.

Örneğin

$$t \cdot (1, -2, 3) + (5, 0, 3) \quad (39)$$

noktaları, bir doğrunun noktalarıdır ve

$$x - 5 = \frac{y}{-2} = \frac{z - 3}{3}$$

denklerini sağlar. Bunlardan ikisi,

$$3x - z = 12, \quad 3y + 2z = 6 \quad (40)$$

veya

$$(3, 0, -1) \cdot (x, y, z) = 12, \quad (0, 3, 2) \cdot (x, y, z) = 6$$

biçiminde yazılabilir, ve bu denklemlerin her biri bir düzlem tanımlar.

Tersine

$$(2, 1, 0) \cdot (x, y, z) = 10, \quad (3, 3, 1) \cdot (x, y, z) = 18 \quad (41)$$

tarafından tanımlanan düzlemler verilsin. Denklemlerin

ortak çözümlerini hesaplayacağız.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 10 \\ 3 & 3 & 1 & 18 \end{pmatrix}, \quad (42)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 10 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 3 & 24 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & -1 & 12 \end{pmatrix}. \quad (43)$$

O zaman istediğimiz çözüm kümesi, zaten (40) tarafından tanımlar. Oradan başlayarak

$$\begin{cases} 2z = -3y + 6 = -3(y - 2), \\ 2z = 6x - 24 = 6(x - 4) \end{cases}$$

sistemini elde ederiz, ve bundan

$$x - 4 = \frac{y - 2}{-2} = \frac{z}{3}.$$

Bu şekilde (40) veya (41) sistemi tarafından doğrunun noktaları

$$t \cdot (1, -2, 3) + (4, 2, 0)$$

biçiminde de yazılabilir.

Alıştırma 29. Yukarıdaki örneği yaratmak için (39) ile başlayıp sistem (40)'ı elde ettim. Bunun matris (43)'ten matris (42)'de ve sistem (41)'i elde ettim. Aynı şekilde kendi örneklerinizi yaratabilirsiniz.

Koşullar (38) altında $\mathbf{a}$ 'ya paralel olan $\mathbf{c}$ 'den geçen doğrunun ve $\mathbf{b}$ 'ye paralel olan $\mathbf{d}$ 'den geçen doğrunun kesişmesi için gerek ve yeter koşul,

$$s \cdot \mathbf{a} + \mathbf{c} = t \cdot \mathbf{b} + \mathbf{d}$$

denkleminin çözümünün olmasıdır. Bu sistem, değişkenleri x , y , ve z olan üç-denklemlili bir lineer sistem olarak yazılabilir.

Alıştırma 30. Noktaları sırasıyla

$$\begin{aligned} &t \cdot (11, -14, 4) + (-4, 16, -2), \\ &t \cdot (8, -17, 7) + (15, -15, 9) \end{aligned}$$

olan doğruların ortak noktası var mı? Varsa bulun.

Teorem 2'nin benzeri için $\mathbb{R}^3$ 'te $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, ve $\mathbf{c}$ aynı doğruda olmasın, yani

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} \nparallel \mathbf{a} - \mathbf{c}$$

olsun. Eğer $\mathbf{d}$, hem $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 'ye hem de $\mathbf{a} - \mathbf{c}$ 'ye dik ise, o zaman $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, ve $\mathbf{c}$, denklemi

$$\mathbf{d} \cdot (x, y, z) = \mathbf{d} \cdot \mathbf{a} \tag{44}$$

olan düzlemde dirler. O zaman $\mathbf{d}$,

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (x, y, z) = 0, \quad (\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot (x, y, z) = 0$$

lineer sisteminin sıfır olmayan bir çözümüdür. Öyle bir çözüm bulmak için genel bir yöntemi sonraki bölümlerde elde edeceğiz. Bu şekilde Teorem 2'nin benzeri $\mathbb{R}^3$ 'te doğru olacak.

9 Alanlar

$\mathbb{R}^2$ 'de, eşitlik (27)'de, $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ 'nin yerine (a, b) ve (c, d) 'yi kullanalım. Eğer

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

eşitiğini kabul edersek, o zaman

$$\begin{aligned}\sin^2 \theta &= 1 - \cos^2 \theta \\ &= \frac{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2}{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \\ &= \frac{a^2 d^2 + b^2 c^2 - 2abcd}{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \\ &= \frac{(ad - bc)^2}{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}.\end{aligned}$$

Şimdi

$$\sin \theta = \frac{ad - bc}{|(a, b)|| (c, d)|}$$

ile **sinüs** fonksiyonunu tanımlayabiliriz. Ayrıca tanım (6) sayesinde $(0, 0)$ 'a bitişik köşeleri

$$(a, b), \quad (c, d) \quad (45)$$

olan paralelkenarın **alanı**,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

determinantının mutlak değeridir.

Aynı sonucu başka bir şekilde elde edebiliriz, çünkü

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \Delta$$

ise, o zaman

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = -\Delta, \quad \begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} = t\Delta, \quad \begin{vmatrix} a+tc & b+td \\ c & d \end{vmatrix} = \Delta.$$

Eğer 45'teki köşeler aynı şekilde değiştirilirse, o zaman paralelkenarın alanı, sırasıyla

- değişmez,
- $|t|$ ile çarpılır,
- değişmez.

Ayrıca

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

ve $(0, 0)$ 'a bitişik köşeleri

$(1, 0),$

$(0, 1)$

olan paralelkenarın alanı 1'dir.

10 Hacimler

Benzer şekilde $\mathbb{R}^3$ 'te $(0, 0)$ 'a bitişik köşeleri

$$(a, b, c), \quad (d, e, f), \quad (g, h, k)$$

olan paralelyüzünün alanı,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$$

determinantının mutlak değeridir. Determinantın değeri,

$$\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} g - \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} h + \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} k,$$

yani

$$\left(\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \right) \cdot (g, h, k).$$

Tanım olarak

$$\left(\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \right) = (a, b, c) \times (d, e, f)$$

olsun. Bu vektör, (a, b, c) ve (d, e, f) 'nin **çapraz çarpımıdır**. Bu çarpım $\mathbb{R}^2$ 'de değil, sadece $\mathbb{R}^3$ 'te tanımlanır. Çapraz çarpımın tanımı ile

$$((a, b, c) \times (d, e, f)) \cdot (x, y, z) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

eşitlik bir özdeşliktir (yani her durumda doğrudur). O zaman $\mathbb{R}^3$ 'te

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b}.$$

Ayrıca $(0, 0, 0)$ 'a bitişik köşeleri $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ olan paralelkenarın alanı

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|.$$

Şimdi denklem (44)'te

$$\mathbf{d} = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{c})$$

olabilir. Ayrıca $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ 'ye paralel olan, $\mathbf{c}$ 'yi içeren düzlemin denklemi

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (x, y, z) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$$

Eğer iki düzlemin denklemleri sırasıyla

$$\mathbf{a} \cdot (x, y, z) = c, \quad \mathbf{b} \cdot (x, y, z) = d$$

ise, o zaman onların kesişimi $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 'ye paralel bir doğrudur.

Alıştırma 31. $(2, 1, 0) \times (3, 3, 1)$ çapraz çarpımını hesaplayarak sistem (41) 'in çözümünü kontrol edin. Benzer şekilde Alıştırma 29'da yarattığımız örnekleri kontrol edin.

11 Kutupsal koordinatlar

$\mathbb{R}^2$ 'de şimdiye kadar **dik** veya **kartezyan** koordinatları kullandık. Her P noktası için, eğer

$$O = (0, 0), \quad I = (1, 0), \quad s = |OP|, \quad \varphi = \angle IOP$$

ise, o zaman P 'nin **kutupsal koordinatları**

$$(s; \varphi)$$

olur. Bu koordinatların dik olmadığını göstermek için, virgölün yerine noktalı virgülü kullanıyoruz. O zaman genelde

$$(r; \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Tersine

- eğer $x \neq 0$ ise, o zaman

$$(x, y) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}; \arctan \frac{y}{x} \right);$$

- diğer durumda

$$(0, y) = \left(y; \frac{\pi}{2} \right),$$

ve burada y negatif olabilir.

Bir noktanın kutupsal koordinatları tek değildir; aslında

$$(r; \theta) = (-r; \theta + \pi) \quad (46)$$

ve

$$(r; \theta) = (r; \theta + 2\pi).$$

Örnekler

- Kutupsal denklemi

$$r = a$$

olan eğri, merkezi O olan, yarıçapı $|a|$ olan, dik denklemi

$$x^2 + y^2 = a^2$$

olan çemberdir.

- Kutupsal denklemi

$$\theta = \varphi$$

olan eğri, O 'dan geçen, dik denklemi

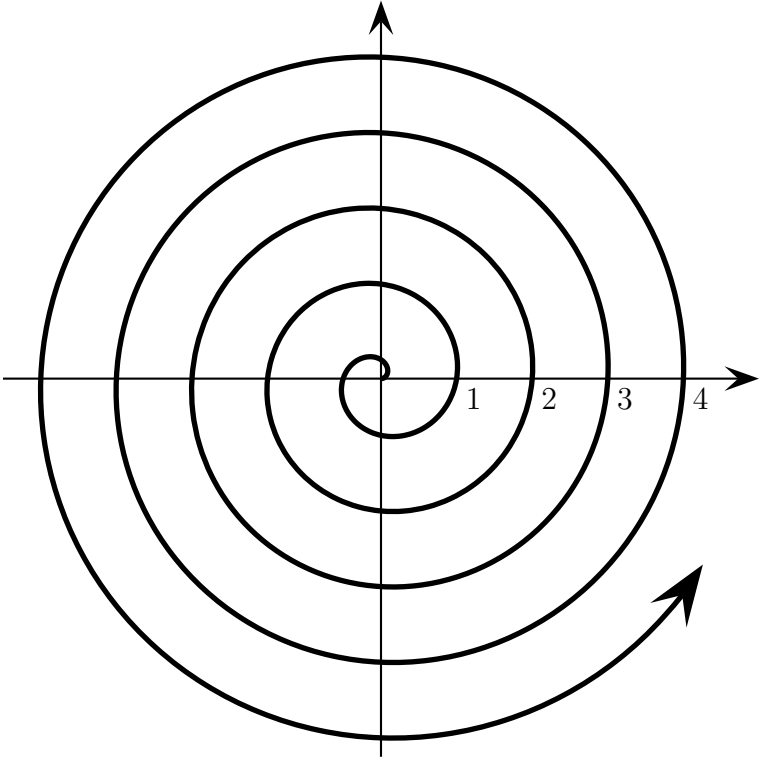
$$x \sin \varphi - y \cos \varphi = 0$$

olan doğrudur.

- Kutupsal denklemi

$$r = \frac{\theta}{2\pi}$$

olan eğri, Şekil 7'deki **Arşimet spirali**dir.



Şekil 7: Denklemi $2\pi r = \theta$ olan Arşimet spirali

- Kutupsal denklemi

$$r = 2^{\theta/2\pi}$$

olan eğri, Şekil 8'deki **logaritmik spiraldir.**

- Kutupsal denklemi

$$r = 2 \cos \theta$$

olan eğri, merkezi $(1, 0)$ olan, yarıçapı 1 olan çemberdir, çünkü $r \neq 0$ olduğunda,

$$\begin{aligned} r = 2 \cos \theta &\iff r^2 = 2r \cos \theta \\ &\iff x^2 + y^2 = 2x \\ &\iff x^2 - 2x + y^2 = 0, \end{aligned}$$

ve burada *kareye tamamlayabiliriz*:

$$x^2 - 2x = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x - 1)^2 - 1,$$

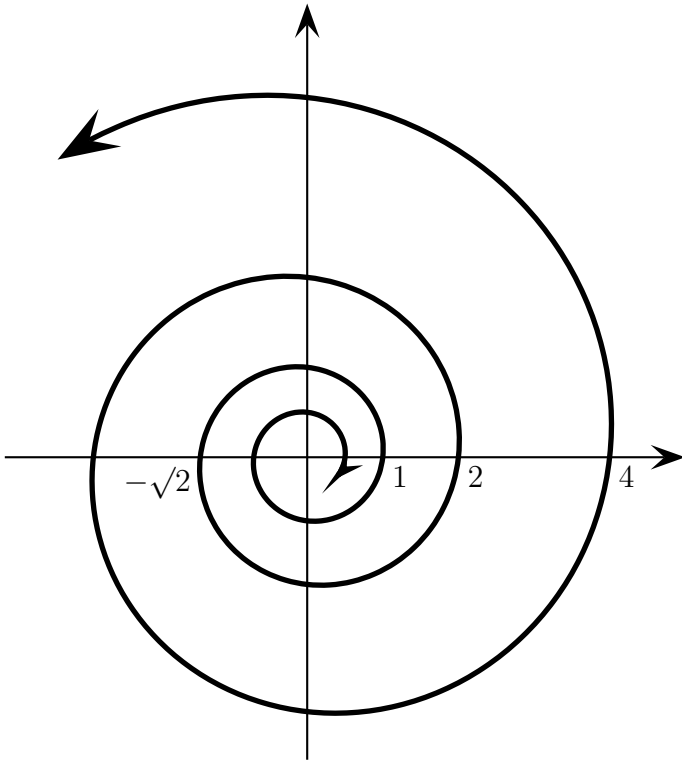
ve sonuç olarak

$$r = 2 \cos \theta \iff (x - 1)^2 + y^2 = 1.$$

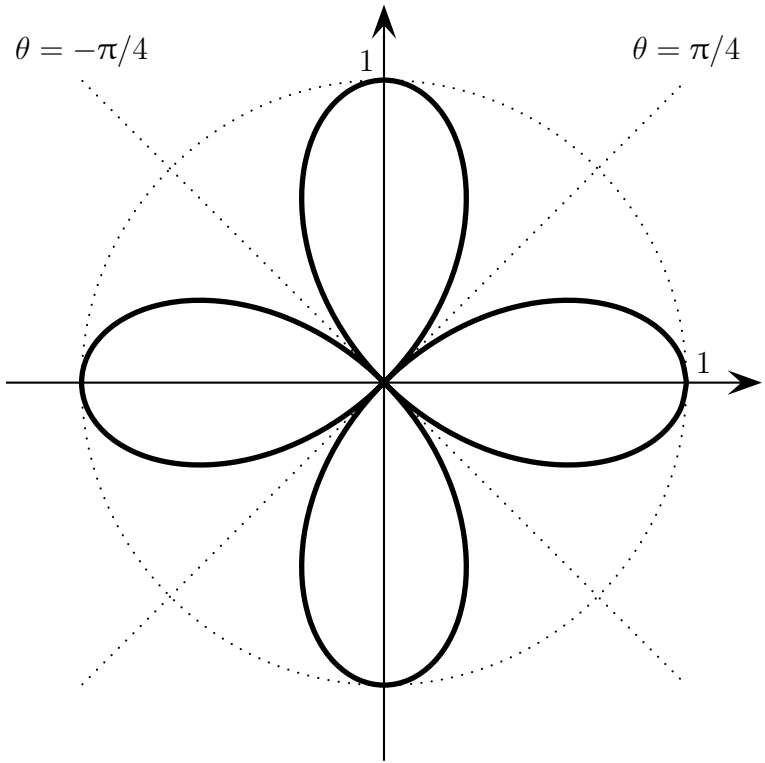
- Kutupsal denklemi

$$r = \cos(2\theta)$$

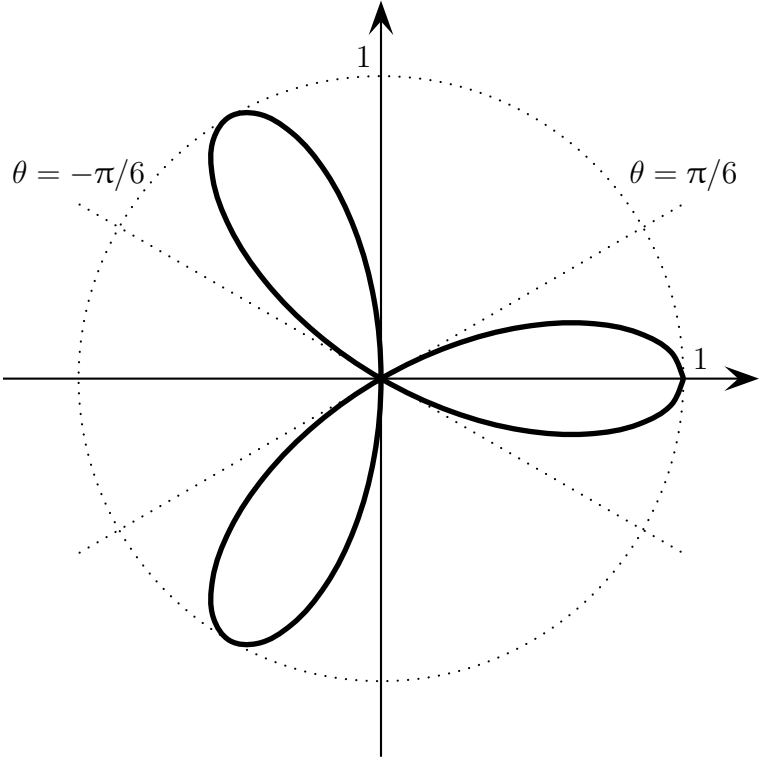
olan eğri, Şekil 9'daki **4-yapraklı güldür.**



Şekil 8: Denklemi $r^{2\pi} = 2^\theta$ olan logaritmik spiral



Şekil 9: Denklemi $r = \cos(2\theta)$ olan 4-yapraklı gül



Şekil 10: Denklemi $r = \cos(3\theta)$ olan 3-yapraklı gül

- Kutupsal denklemi

$$r = \cos(3\theta)$$

olan eğri, Şekil 10'daki 3-yapraklı güldür.

Alıştırma 32. Kutupsal denklemi $r = \cos(n\theta)$ olan gülün kaç tane yaprağı vardır?

Alıştırma 33. Örneklerde kosinüsün yerine sinüs kullanılırsa ne olur?

12 Koni Kesitleri

Uygun bir tanıma göre bir **koni kesiti**, $\mathbb{R}^2$ 'de

- **doğrultman** (Latince *directrix*) adlı bir doğru,
- **odak** (Latince *focus*) adlı, doğrultmanda olmayan bir nokta, ve
- **dışmerkezlilik** (*eccentricity*) adlı, pozitif bir skaller

tarafından belirtilir. Koni kesiti, noktalarının **gezeneğidir** (“yeri,” *locus*, Yunancada *topos*). Eğer

- doğrultmanın denklemi $ax + by + d = 0$,
- odak (h, k) ,
- dışmerkezlilik e

ise, o zaman koni kesitinin bir denklemi

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = e \cdot \frac{|ax + by + d|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

olur. Basit bir durumda

$$(a, b) = (1, 0), \quad d > 0, \quad (h, k) = (0, 0),$$

ve bu durumda denklemimiz

$$\sqrt{x^2 + y^2} = e|x + d| \quad (47)$$

olur. Bu denklemin kutupsal biçimi,

$$r = e|r \cos \theta + d|.$$

Eşitlik (46) sayesinde bu denklemi

$$r = e(r \cos \theta + d) \quad (48)$$

olarak yazabiliriz, çünkü

$$\cos \theta = -\cos(\theta + \pi),$$

dolayısıyla

$$\begin{aligned} -r &= e(r \cos \theta + d) \\ \iff -r &= e(-r \cos(\theta + \pi) + d). \end{aligned}$$

Denklem (48)'den

$$r - er \cos \theta = de$$

ve sonunda

$$r = \frac{de}{1 - e \cos \theta}$$

denklemini elde ederiz. Üç durum vardır. Eğer

- $0 < e < 1$ ise, o zaman uç noktası $(0, 0)$ olan her ışın, eğriyi keser;
- $e = 1$ ise, o zaman uç noktası $(0, 0)$ olan ışıklardan açısı 0 olan eğriyi kesmez, ama diğerleri keser;
- $1 < e$ ise, o zaman uç noktası $(0, 0)$ olan ışıklardan açısının kosinüsü $1/e$ olan iki ışın eğriyi kesmez, ama diğerleri keser.

Şimdilik dik denklem (47)'ye dönelim. Bu denklemi

$$x^2 + y^2 = e^2(x + d)^2 \quad (49)$$

biçiminde yazabiliriz.

12.1 Parabol

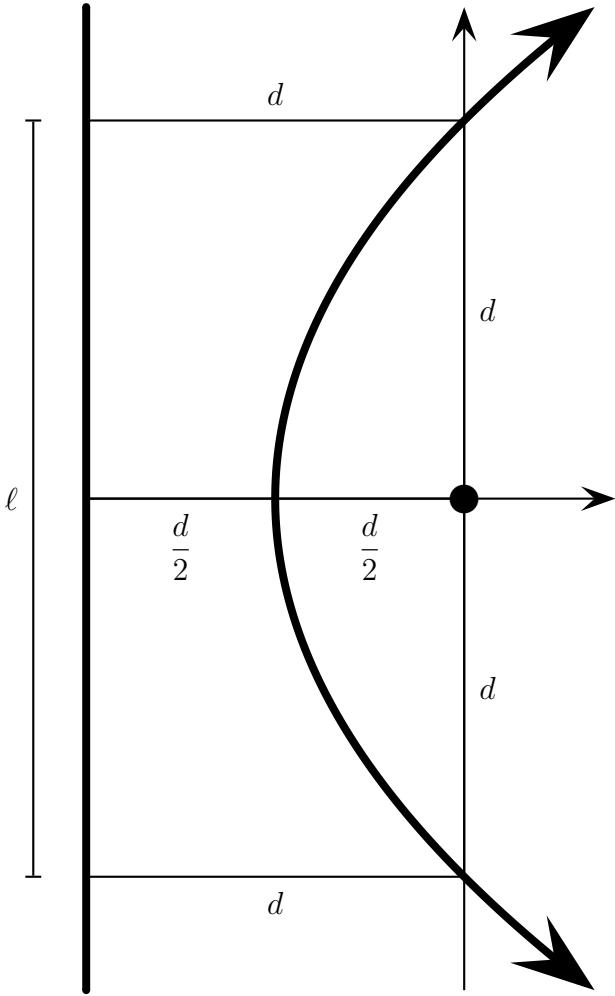
Eğer $e = 1$ ise, o zaman denklem (49)

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (x + d)^2, \\ y^2 &= 2dx + d^2, \end{aligned}$$

ve sonunda

$$y^2 = 2d \left(x + \frac{d}{2} \right) \quad (50)$$

olur. Tanımlanmış eğri Şekil 11'de gözüküyor. Bu eğriye **parabol** (*parabola*) denir. Yunancada *parabolê*, karşılaştırma demektir. Bir parabolün her noktası, odakta ve doğrultmadan aynı uzaklıktadır.



Şekil 11: Parabol, odağı, ve doğrultmanı

Denklem (50) tarafından tanımlanan parabol, x eksenine göre simetriktir, dolayısıyla bu eksen, parabolün **eksenidir** (*axis*). Parabolün ve ekseninin kesişim noktası, parabolün **tepesidir** (*vertex*). O zaman parabolün eksenini, uç noktası tepe olan, parabolün kolların arasından geçen ışın olarak düşünülebilir.

Eğer parabolün bir noktasından bir dikme eksene indirilirse, o zaman

- uç noktaları tepe ve dikmenin ayağı olan doğru parçasına **absis** (Latince *abscissa* “[eksenden] kesilmiş”),
- dikmenin kendisine **ordinat** (Latince *ordinate* “düzenli”)

denir. Parabolün **dik kenarı** (Latince *latus rectum*), parabolün ordinatlara paralel olan, odaktan geçen kirişine eşit bir doğru parçasıdır. Dik kenarın uzunluğu ℓ olduğunda

$$\ell = 2d$$

olur. Denklem (50)’ye göre

- ordinattaki kare ve
- kenarları absis ve dik kenar olan dikdörtgen

birbirine eşittir. Bu şekilde eğer ordinattaki kareye eşit olan, tabanı absis olan bir dikdörtgen inşa edilirse, o

zaman dikdörtgenin yüksekliği, parabolün dik kenarına eşittir. Eğer absisin ve ordinatın uzunlukları sırasıyla

$$x, \quad y$$

ise, o zaman

$$y^2 = \ell x.$$

Alıştırma 34. Tepesi $(2, 3)$ olan, $(0, 0)$ 'dan geçen, ek-seni dikey olan parabolün denklemi ve odağı nedir?

Çözüm. Parabolün denklemi

$$(x - 3)^2 = \ell(y - 2)$$

biçimindedir, ve

$$3^2 = \ell \cdot 2,$$

dolayısıyla

$$\ell = \frac{9}{2},$$

ve sonuç olarak parabolün denklemi

$$(x - 3)^2 = \frac{9}{2}(y - 2)$$

olur. Ayrıca

$$3 - \frac{\ell}{4} = 3 - \frac{9}{8} = \frac{15}{8},$$

dolayısıyla parabolün odağı

$$\left(2, \frac{15}{8}\right).$$

□

Alıştırmadaki parabolün denklemi

$$\begin{aligned}2(x^2 - 6x + 9) &= 9(y - 2), \\2x^2 - 12x - 9y &= 0\end{aligned}$$

da olur, ama bu biçimden parabolün özellikleri açık değildir.

Alıştırma 35. Denklemi

$$2y^2 + x + 37 = 16y$$

olan parabolün tepesi, dik kenarı, ve odağı nedir?

Çözüm. Değişkeni y olan kareye tamamlayabiliriz:

$$\begin{aligned}2y^2 - 16y &= 2(y^2 - 8y) \\&= 2(y^2 - 8y + 16) - 32 \\&= (y - 4)^2 - 32,\end{aligned}$$

dolayısıyla verilen denklem

$$\begin{aligned}2(y - 4)^2 - 32 + x + 37 &= 0, \\2(y - 4)^2 + x + 5 &= 0, \\(y - 4)^2 &= \frac{-1}{2}(x + 5)\end{aligned}$$

olur. Parabolün eksenini yataydır ve yönü soldur. Sonuç olarak

- tepe $(-5, 4)$,
- dik kenarı $1/2$,
- odak $(-5 - 1/8, 4)$, yani $(-41/8, 4)$.

Kontrol olarak $(-5, 4)$, verilen denklemi sağlar. $\square$

Alıştırma 36. $a \neq 0$ olmak üzere denklemi

$$ax^2 + bx + cy + d = 0$$

olan parabolün tepesi, dik kenarı, ve odağı nedir?

Cevap. (Bir cevap, bir çözüm değildir. Bir çözüm, cevabın neden doğru olduğunu açıklar.) Parabolün

- tepesi

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{b^2 - 4ad}{4ac} \right),$$

- dik kenarı

$$\left| \frac{c}{4a} \right|,$$

- odağı

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{b^2 + c^2 - 4ad}{4ac} \right).$$

$\square$

12.2 Merkezli Koni Kesitleri

Denklem (49),

$$(1 - e^2)x^2 - 2de^2x + y^2 = d^2e^2$$

biçiminde de yazılabilir. Eğer $e \neq 1$ ise, o zaman değişkeni x olan kareye tamamlayabiliriz. İlk olarak $1 - e^2$ ile çarpalım:

$$\begin{aligned}(1 - e^2)^2x^2 - 2de^2(1 - e^2)x + (1 - e^2)y^2 \\ = d^2e^2(1 - e^2).\end{aligned}$$

Aşağıdaki eşitlikler vardır.

$$\begin{aligned}(1 - e^2)^2x^2 - 2de^2(1 - e^2)x \\ = (1 - e^2)^2x^2 - 2de^2(1 - e^2)x + d^2e^4 - d^2e^4 \\ = ((1 - e^2)x - de^2)^2 - d^2e^4.\end{aligned}$$

Ayrıca

$$d^2e^2(1 - e^2) + d^2e^4 = d^2e^2.$$

Sonuç olarak denklem (49),

$$((1 - e^2)x - de^2)^2 + (1 - e^2)y^2 = d^2e^2$$

ve sonunda

$$\left(x - \frac{de^2}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \left(\frac{de}{1 - e^2}\right)^2 \quad (51)$$

olur. Tanımlanan eğri, denklemleri sırasıyla

$$x = \frac{de^2}{1 - e^2}, \quad y = 0$$

olan doğrulara göre simetriktir. Bu doğruların kesişim noktası, eğrinin **merkezi**dir. Eğri, yatay simetri eksenini eğrinin **tepelerinde** keser.

Paraboldeki gibi eğrinin bir noktasından yatay eksenine indirilen dikme, noktanın **ordinatıdır**, ama şimdi tepelerin her birine göre bir **absis** vardır.

Simetri sayesinde eğrinin

- ikinci bir odağı, ve ona uyan
- ikinci bir doğrultmanı

vardır. İki durum vardır.

12.2.1 Elips

Eğer

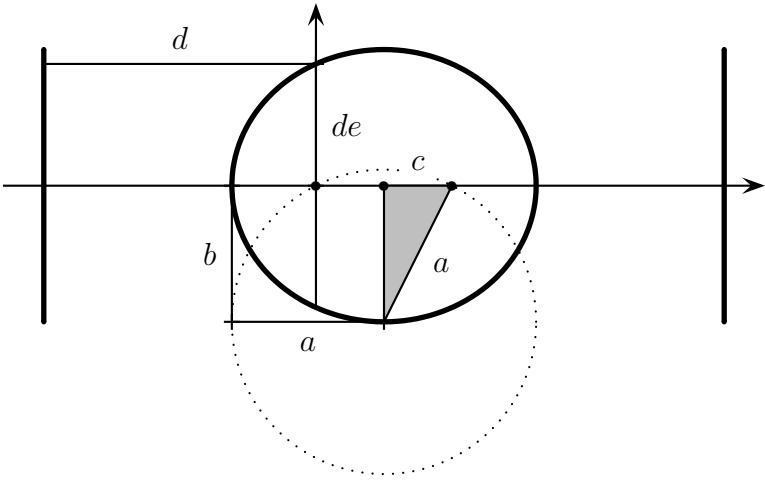
$$0 < e < 1$$

ise, o zaman

$$0 < 1 - e^2.$$

Bu durumda

$$a = \frac{de}{1 - e^2}, \quad b = a\sqrt{1 - e^2}, \quad (52)$$



Şekil 12: Elips, merkezi, odakları, ve doğrultmanları

ve

$$c = ae \quad (53)$$

olsun. O zaman denklem (51),

$$\frac{(x - c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (54)$$

olur. Tanımlanmış eğri Şekil 12’de gözüküyor. Bu eğriye **elips** (*ellipse*) denir. Elipsin denkleminde

$$b^2 + c^2 = a^2, \quad (55)$$

ve özellikle

$$0 < b < a, \quad 0 < c < a.$$

Ayrıca

$$d = \frac{a(1 - e^2)}{e},$$

dolayısıyla

$$de = \frac{b^2}{a} \quad (56)$$

ve

$$c + d = \frac{a}{e}. \quad (57)$$

Parabolünki gibi elipsin **dik kenarı** tanımlanır, ve uzunluğu ℓ olduğunda, denklem (56) sayesinde

$$\ell = \frac{2b^2}{a} \quad (58)$$

olur. Denklemler (53) ve (57) sayesinde $(c+d, a, c)$, oranı e olan geometrik bir dizidir, yani

$$\frac{a}{c+d} = e = \frac{c}{a}.$$

Uç noktaları elipsin iki tepesi olan doğru parçası, elipsin **büyük eksenidir** (*major axis*). Bunun uzunluğu $2a$. Buna dik olan, uzunluğu $2b$ olan **küçük eksen** (*minor axis*) de vardır. Şimdi elips için altı değeri tanımlamış olduk:

- a , büyük eksenin yarısıdır;
- b , küçük eksenin yarısıdır;
- c , merkezden odağa uzaklıktır;
- d , odaktan doğrultmana uzaklıktır;
- e , dışmerkezliliğidir;
- ℓ , dik kenardır.

Yunancada *ellipse*, bir eksiklikler. Apollonius'un elipse adını neden verdiğini şimdi açıklayabiliriz. Denklem (54)

$$\begin{aligned}
 \frac{y^2}{b^2} &= 1 - \frac{(x + a - c - a)^2}{a^2} \\
 &= 1 - \frac{(x + a - c)^2 - 2a(x + a - c) + a^2}{a^2} \\
 &= \frac{2(x + a - c)}{a} - \frac{(x + a - c)^2}{a^2}
 \end{aligned}$$

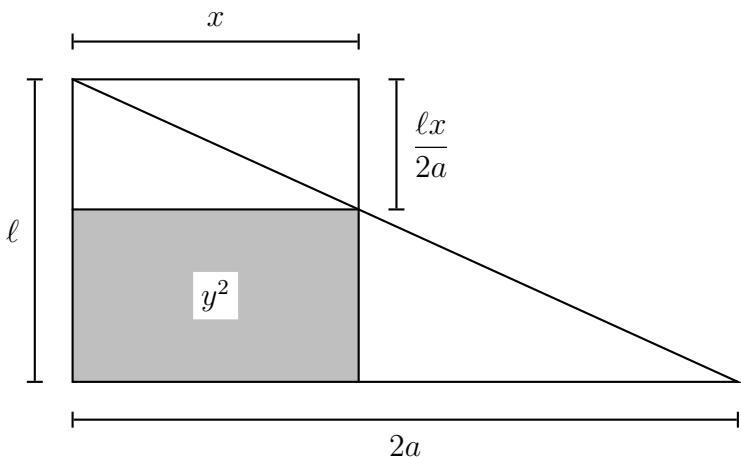
ve sonunda

$$y^2 = \ell(x + a - c) - \frac{\ell}{2a}(x + a - c)^2$$

olur. Eğer absisin ve ordinatın uzunlukları sırasıyla

x ,

y



Şekil 13: Elipsteki eksiklik

ise, o zaman denklemimiz

$$y^2 = \ell x - \frac{\ell x}{2a} x$$

olur. Sonuç olarak, eğer Şekil 13'teki gibi ordinattaki kareye eşit olan, tabanı absis olan bir dikdörtgen inşa edilirse, o zaman yüksekliği, dik kenardan küçüktür. Ordinattaki karenin, tabanı absis olan, yüksekliği ℓ olan dikdörtgenden eksikliği, tabanı absis olan, kenarları dik kenar ve bükük eksen olan dikdörtgene benzer bir dikdörtgene eşittir.

Analitik geometride elipsin denklemi normalde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (59)$$

Bu elipsin odakları

$$(-c, 0), \quad (c, 0),$$

ve doğrultmanlarının denklemleri

$$x + c + d = 0, \quad x = c + d.$$

Elipsin her (x, y) noktası için

$$\begin{aligned} |(x, y) - (-c, 0)| &= e(c + d + x), \\ |(x, y) - (c, 0)| &= e(c + d - x). \end{aligned}$$

Bundan dolayı

$$|(x, y) - (-c, 0)| + |(x, y) - (c, 0)| = 2(c + d)e,$$

yani

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a.$$

Kısaca bir elips, noktalarının iki odaktan uzaklıklarının toplamı sabit olan bir gezenektir. Bunu kontrol etmek için yukarıdakine ve birbirine denk olan aşağıdaki denklemleri yazabiliriz:

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x + c)^2 + y^2},$$

$$\begin{aligned}(x - c)^2 + y^2 \\ = 4a^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + (x + c)^2 + y^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} &= a^2 + cx, \\ a^2(x + c)^2 + a^2y^2 &= (cx + a^2)^2,\end{aligned}$$

ve sonunda

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = (a^2 - c^2)a^2. \quad (60)$$

Bu denklem, eşitlik (55) sayesinde denklem (59)'a denktir.

Alıştırma 37. Merkezinden doğrultmanların uzaklığı 5 olan, küçük eksenin uç noktalarının uzaklığı 2 olan elipsin bir denklemini ve odaklarını bulun.

Çözüm. (Şekil 12'yi çizmek için bu alıştırmaı çözdüm.) Burada

$$c + d = 5, \quad b = 2.$$

Genelde

$$c + d = \frac{a}{e}, \quad b = a\sqrt{1 - e^2}$$

olduğundan

$$e\sqrt{1 - e^2} = \frac{b}{c + d}.$$

Bunun değeri ρ olduğunda

$$\begin{aligned}e^2 - e^4 &= \rho^2, \\e^4 - e^2 + \rho^2 &= 0, \\e^2 &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\rho^2}}{2}.\end{aligned}$$

Bizim için

$$\rho = \frac{2}{5}$$

olduğunda

$$e^2 = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{3}{5} \right) = \frac{4}{5}, \frac{1}{5}.$$

Şimdi denklem (59)'da

$$a = (c + d)e = 5e = 2\sqrt{5}, \sqrt{5}.$$

Ayrıca

$$c = ae = (c + d)e^2 = 5e^2 = 4, 1$$

olduğunda odaklar $(\pm c, 0)$ 'dır. İkinci durum Şekil 12'dedir; birinci durum Şekil 14'tedir. $\square$

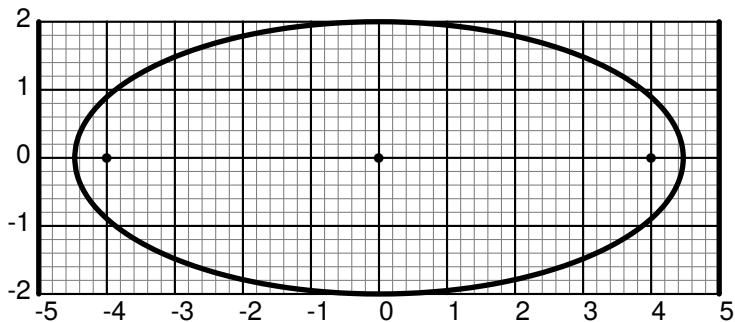
12.2.2 Hiperbol

Eğer

$$1 < e$$

ise, o zaman

$$0 < e^2 - 1.$$



Şekil 14: Elips, merkezi, odakları, ve doğrultmanları

Bu durumda

$$a = \frac{de}{e^2 - 1}, \quad b = a\sqrt{e^2 - 1}, \quad (61)$$

ve tekrar (53) (yani $c = ae$) olsun. O zaman denklem (51),

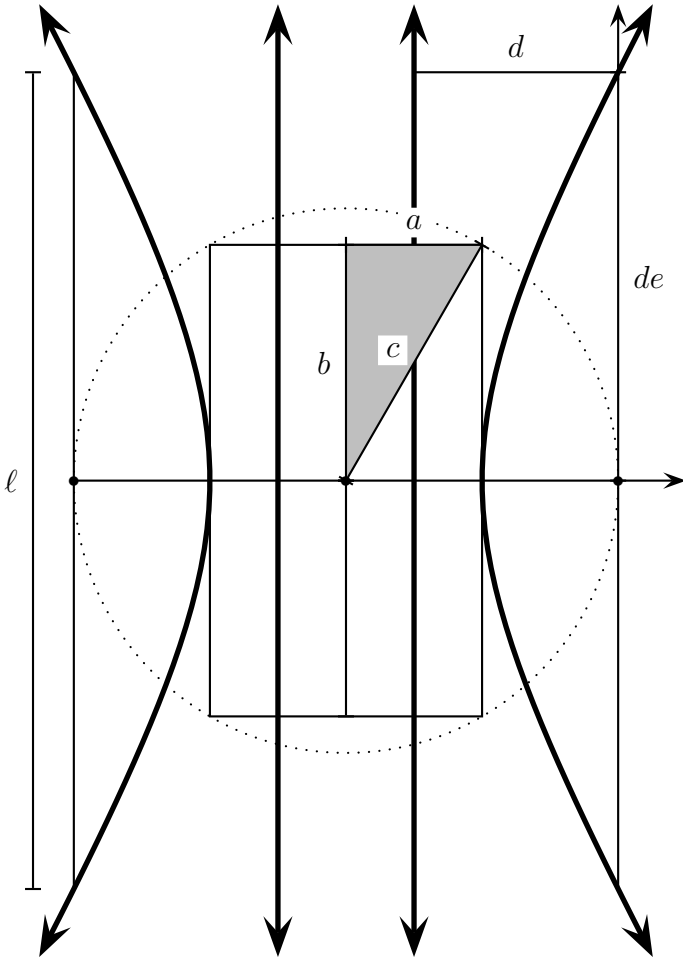
$$\frac{(x + c)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (62)$$

olur. Tanımlanmış eğri Şekil 15'te gözüküyor. Bu eğriye **hiperbol** (*hyperbola*) denir. Hiperbolin denkleminde

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (63)$$

ve (56) doğrudur. Aynı zamanda

$$c - d = \frac{a}{e}. \quad (64)$$



Şekil 15: Hiperbol, merkezi, odakları, ve doğrultmanları

Parabolünki ve elipsinki gibi hiperbolün **dik kenarı** tanımlanır, ve uzunluğu ℓ olduğunda, denklem (58) doğrudur. Denklemler (53) ve (64) sayesinde $(c-d, a, c)$, oranı e olan geometrik bir dizidir. Uç noktaları hiperbolün iki tepesi olan doğru parçası, hiperbolün **enine eksenidir** (*transverse axis, latus transversum*). Bunun uzunluğu $2a$. Buna dik olan, uzunluğu $2b$ olan **karşılıklı eksen** (*conjugate axis*) de vardır.

Yunancada *hiperbolê*, bir fazlalıktır. Apollonius'un hiperbole adını neden verdiğini şimdi açıklayabiliriz. Denklem (62)

$$y^2 = \ell(x + c - a) + \frac{\ell}{2a}(x + c - a)^2$$

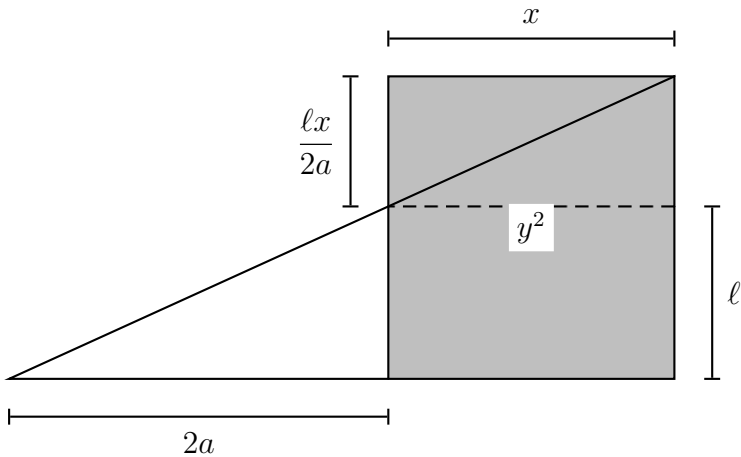
olur. Eğer absisin ve ordinatın uzunlukları sırasıyla

$$x, \quad y$$

ise, o zaman denklemimiz

$$y^2 = \ell x + \frac{\ell x}{2a}x$$

olur. Sonuç olarak, eğer Şekil 16'daki gibi ordinattaki kareye eşit olan, tabanı absis olan bir dikdörtgen inşa edilirse, o zaman yüksekliği, dik kenardan büyüktür. Ordinattaki karenin, tabanı absis olan, yüksekliği ℓ olan dikdörtgenden fazlalığı, tabanı absis olan, kenarları dik kenar ve bükük eksen olan dikdörtgene benzer bir dikdörtgene eşittir.



Şekil 16: Hiperboldeki fazlalık

Analitik geometride elipsin denklemini normalde

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (65)$$

Bu elipsin odakları

$$(-c, 0), \quad (c, 0),$$

ve doğrultmanlarının denklemleri

$$x + d = c, \quad x + c = d.$$

Hiperbolün her (x, y) noktası için

$$|(x, y) - (-c, 0)| = e|x - c + d|,$$

$$|(x, y) - (c, 0)| = e|x + c - d|,$$

ve ayrıca

$$0 < c - d \leq |x|,$$

dolayısıyla

$$|| (x, y) - (-c, 0) | - | (x, y) - (c, 0) || = 2(c - d)e,$$

yani

$$\left| \sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \right| = 2a.$$

Kısaca bir hiperbol, noktalarının iki odaktan uzaklıklarının farkının mutlak değeri sabit olan bir gezenektir. Bunu kontrol etmek için, yukarıdaki denklemden tekrar denklem (60)'ı elde edebiliriz, ama şimdi bu denklem, eşitlik (63) sayesinde denklem (65)'e denktir.

Alıştırma 38. Merkezinden odakların uzaklığı 2 olan, dik kenarı 6 olan hiperbolün bir denklemini ve doğrultmanlarını bulun.

Çözüm. (Şekil 15'i çizmek için bu alıştırmaı çözdüm.) Burada

$$c = 2, \quad \ell = 6.$$

Genelde

$$c = ae = \frac{de^2}{e^2 - 1}, \quad \ell = 2de,$$

dolayısıyla

$$\begin{aligned}d &= \frac{\ell}{2e}, \\2c &= \frac{\ell e}{e^2 - 1}, \\2ce^2 - \ell e - 2c &= 0, \\e &= \frac{\ell \pm \sqrt{\ell^2 + 16c^2}}{4c}.\end{aligned}$$

Ayrıca $e > 0$, ve sonuç olarak

$$e = 2, \quad d = \frac{3}{2}, \quad c - d = \frac{1}{2},$$

ve

$$a = \frac{c}{e} = 1, \quad b = a\sqrt{e^2 - 1} = 3.$$

Hiperbolün bir denklemi

$$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1,$$

ve doğrultmanlar $2x = \pm 1$ tarafından tanımlanır. □

13 Derecesi İki Olan Denklemler

Gördüğümüz gibi her koni kesitinin denklemi

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (66)$$

biçiminde yazılabilir. Bunun tersi de doğrudur. Örnekler, Alıştırma 35 ve 36'da gördük.

Alıştırma 39. Denklemi

$$3x^2 + 2y^2 + 18x + 71 = 20y$$

olan eğrinin özelliklerini bulun.

Çözüm. Karelere tamamlayalım.

$$\begin{aligned} 3x^2 + 18x &= 3(x^2 + 6x) = 3(x + 3)^2 - 27, \\ 2y^2 - 20y &= 2(y^2 - 10y) = 2(y - 5)^2 - 50, \end{aligned}$$

dolayısıyla verilen denklem

$$\begin{aligned} 3(x + 3)^2 - 27 + 2(y - 5)^2 - 50 + 71 &= 0, \\ 3(x + 3)^2 + 2(y - 5)^2 - 6 &= 0, \\ \frac{(x + 3)^2}{2} + \frac{(y - 5)^2}{3} &= 1 \end{aligned}$$

olur. Tanımlanan eğri,

- merkezi $(-3, 5)$ olan,
- büyük eksen dikey olan,
- büyük ekseninin uzunluğu $2\sqrt{3}$ olan,
- küçük ekseninin uzunluğu $2\sqrt{2}$ olan

bir elipstir. □

Alıştırma 40. Denklemi

$$11x^2 + 24xy + 4y^2 = 500$$

olan eğrinin özelliklerini bulun.

Bir çözüm. Eğrinin, denklemi

$$11x^2 + 11y^2 = 5 \cdot 10^2$$

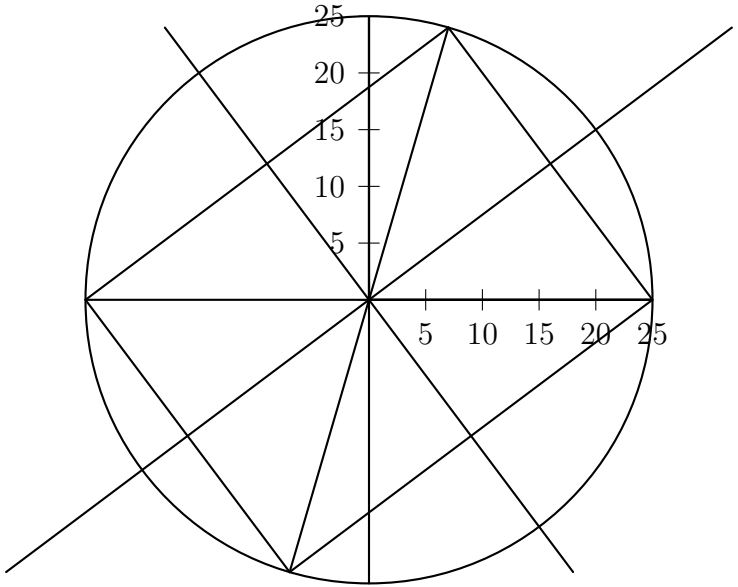
olan çember ile kesişim noktaları

$$7y^2 - 24xy = 0$$

denklemini sağlar. Bu şekilde kesişim noktalarının her biri, denklemleri sırasıyla

$$y = 0,$$

$$7y = 24x$$



Şekil 17: Kenarları bir hiperbolün eksenlerine paralel olan bir dikdörtgen

olan doğruların birindedir. Ayrıca kesişim noktaları, bir dikdörtgenin köşeleridir. Bu dikdörtgenin kenarları, köşeleri

$$\pm (25, 0), \quad \pm(7, 24)$$

olan dikdörtgeninkilere paraleldir. Şekil 17'ye bakın. Bu kenarlara paralel olan, sıfır noktasından geçen doğruların denklemleri,

$$24x - (7 \pm 25)y = 0,$$

yani

$$3x - 4y = 0, \quad 4x + 3y = 0.$$

Her a ve her b için

$$\begin{aligned} a(4x + 3y)^2 + b(3x - 4y)^2 \\ = (16a + 9b)x^2 + 24(a - b)xy + (9a + 16b)y^2. \end{aligned}$$

Ayrıca

$$\begin{cases} 16a + 9b = 11, \\ a - b = 1, \\ 9a + 16b = 4 \end{cases}$$

sisteminin bir çözümü vardır, ve bu çözüm

$$a = \frac{4}{5}, \quad b = \frac{-1}{5}.$$

O zaman verilmiş denklem,

$$4(4x + 3y)^2 - (3x - 4y)^2 = 5 \cdot 500$$

veya

$$\frac{(4x + 3y)^2}{25^2} - \frac{(3x - 4y)^2}{50^2} = 1.$$

biçiminde yazılabilir. Bu denklem bir hiperbolü tanımlar. Hiperbolün enine ekseninin ve karşılıklı ekseninin uç noktaları, sırasıyla

$$\pm (4, 3), \quad \pm 2 \cdot (3, -4).$$

Şekil 18'e bakın.

□

Alıştırma 40'ı yaratmak için, tanımı

$$x^2 - \frac{y^2}{4} = 1 \quad (67)$$

olan hiperbole bir doğrusal dönüşüm uyguladım. Bu dönüşüm,

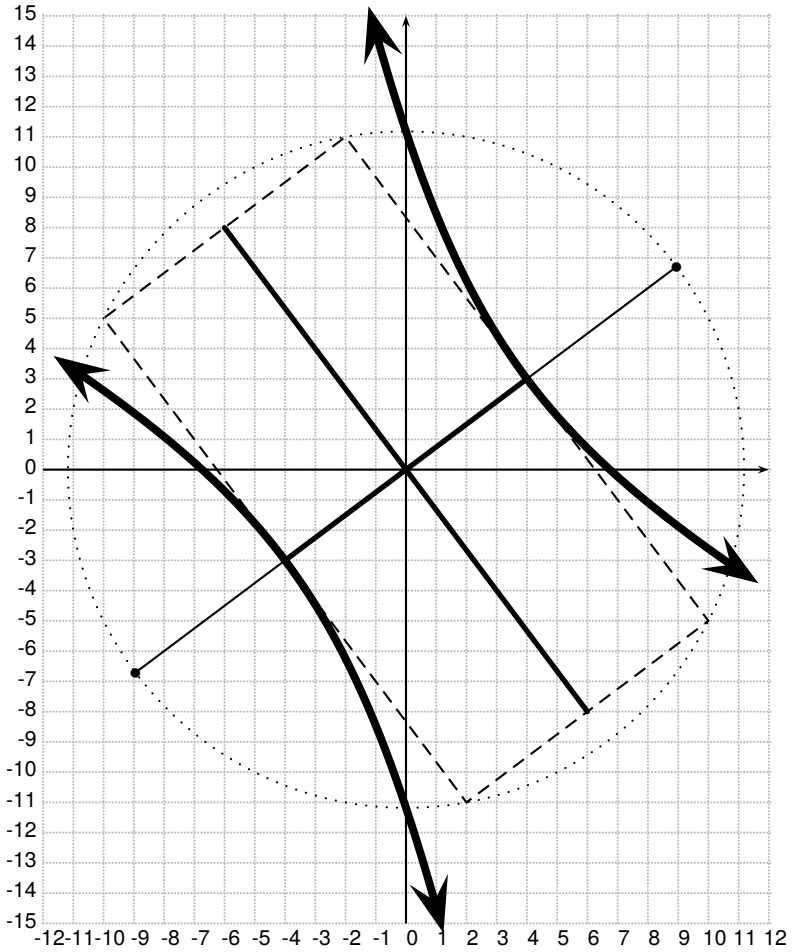
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

veya

$$(x, y) \mapsto (4x - 3y, 3x + 4y)$$

olarak yazılabilir. Ayrıca bu dönüşüm bir *benzerliktir*, yani oranları ve açıları değiştirmez. (Sayfa 37'deki Alıştırma 26'ya bakın.) Dönüşümün tersi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Şekil 18: Eğik bir hiperbol

veya

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{4x + 3y}{25}, \frac{-3x + 4y}{25} \right)$$

olduğundan denklem (67)'de

- x 'in yerine $(4x + 3y)/25$,
- y 'nin yerine $(-3x + 4y)/25$

değerlerini koydum.

Genelde

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

olduğunda

$$\begin{aligned} r \cos(\theta - \varphi) &= r(\cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi) \\ &= x \cos \varphi + y \sin \varphi \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} r \sin(\theta - \varphi) &= r(\sin \theta \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi) \\ &= y \cos \varphi - x \sin \varphi. \end{aligned}$$

Şimdi $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ polinomunda (x, y) 'nin yerine

$$(r \cos(\theta - \varphi), r \sin(\theta - \varphi))$$

konulursa,

$$\begin{aligned} &A(x \cos \varphi + y \sin \varphi)^2 \\ &+ B(x \cos \varphi + y \sin \varphi)(y \cos \varphi - x \sin \varphi) \\ &+ C(y \cos \varphi - x \sin \varphi)^2 \end{aligned}$$

polinomu elde edilir, ve bu polinom

$$\begin{aligned} & (A \cos^2 \varphi - B \sin \varphi \cos \varphi + C \sin^2 \varphi)x^2 \\ & + ((A - C) \sin(2\varphi) + B \cos(2\varphi))xy \\ & + (A \sin^2 \varphi + B \sin \varphi \cos \varphi + C \cos^2 \varphi)y^2 \end{aligned}$$

polinomuna eşittir. Sonuç olarak eğer $B \neq 0$ ise, o zaman

$$\tan(2\varphi) = \frac{B}{C - A} \quad (68)$$

olmak üzere, denklemi (66) olan eğriyi ölçüsü φ olan açıdan sıfır noktası etrafında döndürerek, denkleminde xy terimi olmayan bir eğri elde ederiz. Eğer $A = C$ ise, o zaman (68)'in anlamı

$$\cos(2\varphi) = 0.$$

Aynı zamanda, alıştırma 40'ın çözümünde gösterdiğimiz gibi, döndürmeden eğrinin ne olduğunu anlayabiliriz.

Alıştırma 41. Denklemi

$$11x^2 + 24xy + 4y^2 + 160x + 120y = 0$$

olan eğrinin özelliklerini bulun.

Bir çözüm. Karelere tamamlayacağız. İlk olarak y 'deki terimleri alalım:

$$4y^2 + 24xy + 120y = (2y + 6x + 30)^2 - (6x + 30)^2.$$

Şimdi x 'teki terimleri alırız.

$$\begin{aligned} 11x^2 + 160x - (6x + 30)^2 \\ &= 11x^2 + 160x - (36x^2 + 360x + 900) \\ &= -(25x^2 + 200x + 900) \\ &= -25(x^2 + 8x + 36) \\ &= -25((x + 4)^2 + 20). \end{aligned}$$

Son olarak

$$\begin{aligned} 2y + 6x + 30 &= 2y + 6(x + 4) + 6 \\ &= 2(y + 3) + 6(x + 4). \end{aligned}$$

Böylece verilen denklem

$$(2(y + 3) + 6(x + 4))^2 - 25(x + 4)^2 = 500$$

olur, dolayısıyla tanımlanan eğri, merkezi $(-4, -3)$ olan bir hiperboldür. Birbirine dik olmadığından, tanımları sırasıyla

$$x + 4 = 0, \quad y(y + 3) + 6(x + 4) = 0$$

doğruları hiperbolün eksenleri değil, **çapları** veya **diyametreleridir** (*diameters*), çünkü her biri, diğerine paralel olan kirişleri ikiye böler. Enine diyametreler, hiperbolü $(-4, -3 \pm 5\sqrt{5})$ tepelerinde keser. Burada $5\sqrt{5} \approx 11.2$. Karşılıklı diyametrenin uç noktaları

$$\begin{aligned} 25(x + 4)^2 &= 500, \\ 2(y + 3) + 6(x + 4) &= 0 \end{aligned}$$

sisteminin çözümleridir. Bunlar

$$(-4 \pm 2\sqrt{5}, -2 \mp 6\sqrt{5}).$$

Burada

$$(2\sqrt{5}, 6\sqrt{5}) \approx (4.5, 13.4).$$

Ayrıca

$$(2y + 6x)^2 - 25x^2 = 11x^2 + 24xy + 4y^2,$$

dolayısıyla eğrimiz, Alıştırma 40'ta gördüğümüz hiperbolün bir ötelenmesidir. Şekil 19'a bakın. $\square$

Alıştırma 41'de hiperbolün merkezi, öyle bir (h, k) noktası ki

$$\begin{aligned} 11(x + h)^2 + 24(x + h)(y + k) + 4(y + k)^2 \\ + 160(x + h) + 120(y + k) \end{aligned}$$

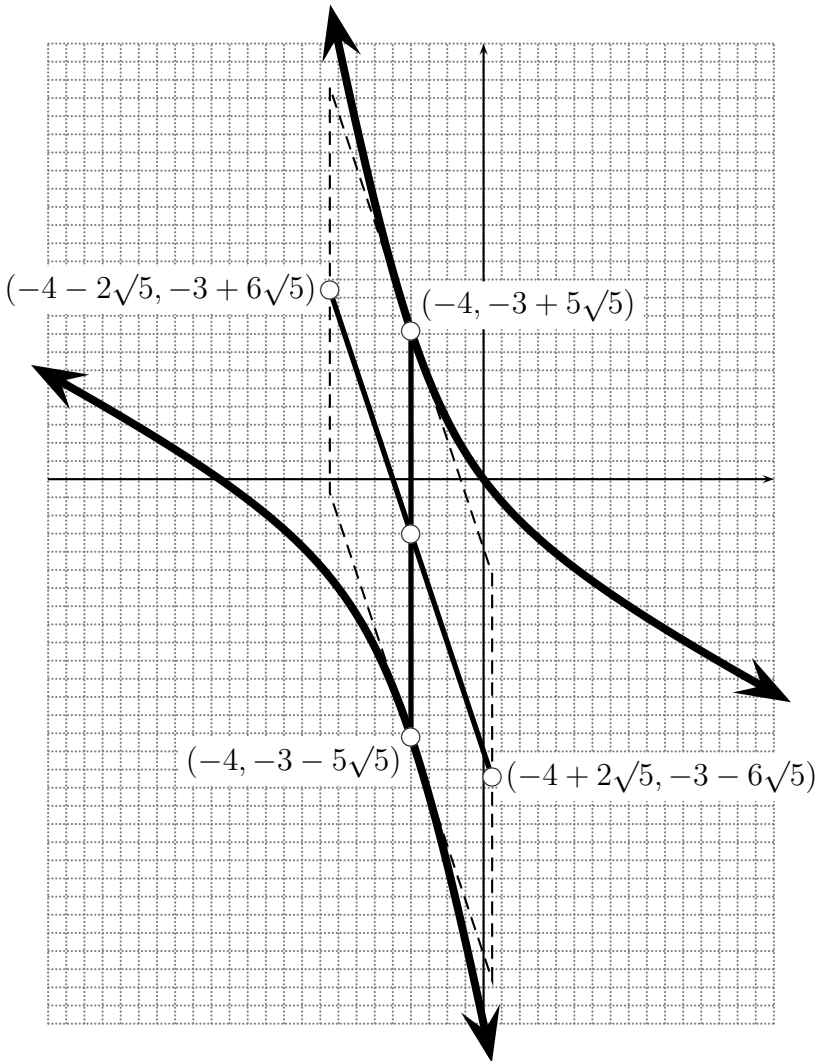
polinomunda x ve y terimleri yoktur. Bu şekilde

$$\begin{cases} 22h + 24k + 160 = 0, \\ 24h + 8k + 120 = 0, \end{cases}$$

veya

$$\begin{cases} 11h + 12k + 80 = 0, \\ 3h + k + 15 = 0, \end{cases}$$

ve bu sistemin çözümü $(-4, -3)$.



Şekil 19: Eğik diyametreleri ile bir hiperbol

Önce gördüğümüz gibi uygun bir dönme altında denklem (66)'dan karmaşık xy terim kaldırılabilir. Elde edilen denklem

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

olsun. (Buradaki katsayılar, (66)'nınkinden farklı olabilir.) Uygun bir öteleme altında

- $A \neq 0$ ise x terimi,
- $C \neq 0$ ise y terimi

kaldırılabilir. Elde edilen denklem bir koni kesiti tanımlar: parabol, elips, veya hiperbol. (Bu eğri “dejenere” olabilir: iki doğru, bir doğru, bir nokta, veya boş.)

Alıştırma 42. Denklemi

$$145x^2 + 120xy + 180y^2 - 700x - 600y + 964 = 0$$

olan koni kesitinin özelliklerini bulun.

Bir çözüm. Karelere tamamlayalım. İlk olarak

$$\begin{aligned} 145x^2 + 120xy - 700x &= 5(29x^2 + 24xy - 140x) \\ &= \frac{5}{29}(29^2x^2 + 2 \cdot 29x(12y - 70)) \\ &= \frac{5}{29}((29x + 12y - 70)^2 - 2^2(6y - 35)^2). \end{aligned}$$

Ayrıca

$$\begin{aligned} & \frac{-5 \cdot 2^2}{29} (6y - 35)^2 + 180y^2 - 600y \\ &= \frac{20}{29} (-(6y - 35)^2 + 29 \cdot 9y^2 - 29 \cdot 30y) \\ &= \frac{20}{29} ((-36 + 261)y^2 + (420 - 870)y - 35^2) \\ &= \frac{20}{29} (225y^2 - 450y - 35^2) \\ &= \frac{500}{29} (9y^2 - 18y - 49) \\ &= \frac{500}{29} (9(y - 1)^2 - 58) \\ &= \frac{4500}{29} (y - 1)^2 - 1000. \end{aligned}$$

Şimdi denklemimiz

$$\frac{5}{29} (29x + 12y - 70)^2 + \frac{4500}{29} (y - 1)^2 = 36$$

olur. Tanımlanan eğri, bir elipstir. Merkezi denklemleri sırasıyla

$$29x + 12y - 70 = 0, \quad y - 1 = 0$$

doğruların kesişim noktasıdır, ve bu nokta, $(2, 1)$. O zaman elipsin denklemi

$$\frac{5}{29} (29(x - 2) + 12(y - 1))^2 + \frac{4500}{29} (y - 1)^2 = 36$$

olur. Eğer $(x, y) \mapsto (x - 2, y - 1)$ ötelemesi uygulanırsa, yeni elipsin denklemi

$$\frac{5}{29}(29x + 12y)^2 + \frac{4500}{29}y^2 = 36$$

veya

$$\begin{aligned} 5(29x + 12y)^2 + 4500y^2 &= 29 \cdot 36, \\ 5 \cdot 29^2x^2 + 120 \cdot 29xy + 5 \cdot (12^2 + 30^2)y^2 &= 29 \cdot 36, \\ 5 \cdot 29x^2 + 5 \cdot 24xy + 5 \cdot 36y^2 &= 36 \end{aligned}$$

olur. Elipsin, denklemi

$$5 \cdot 29(x^2 + y^2) = 36$$

olan çember ile kesişim noktaları

$$y(24x + 7y) = 0$$

denklemini sağlar. Alıştırma 40'ın çözümündeki gibi bu noktalar, bir dikdörtgenin köşeleridir, ve sıfır noktasından geçen, dikdörtgenin kenarlarına paralel olan doğrular

$$3x + 4y = 0, \quad 4x - 3y = 0$$

tarafından tanımlanır. Her a ve her b için

$$\begin{aligned} a(4x - 3y)^2 + b(3x + 4y)^2 \\ = (16a + 9b)x^2 + 24(b - a)xy + (9a + 16b)y^2. \end{aligned}$$

Ayrıca

$$\begin{cases} 16a + 9b = 5 \cdot 29, \\ a - b = -5, \\ 9a + 16b = 5 \cdot 36 \end{cases}$$

sisteminin bir çözümü vardır, ve bu çözüm

$$a = 4, \quad b = 9.$$

O zaman verilmiş denklem,

$$4(4(x-2) - 3(y-1))^2 + 9(3(x-2) + 4(y-1))^2 = 36$$

biçiminde yazılabilir. Tanımlanan eğri bir elipstir, ve eksenlerinin uç noktaları

$$(2, 1) \pm \frac{3}{25}(4, -3), \quad (2, 1) \pm \frac{2}{25}(3, 4).$$

Şekil 20'ye bakın.

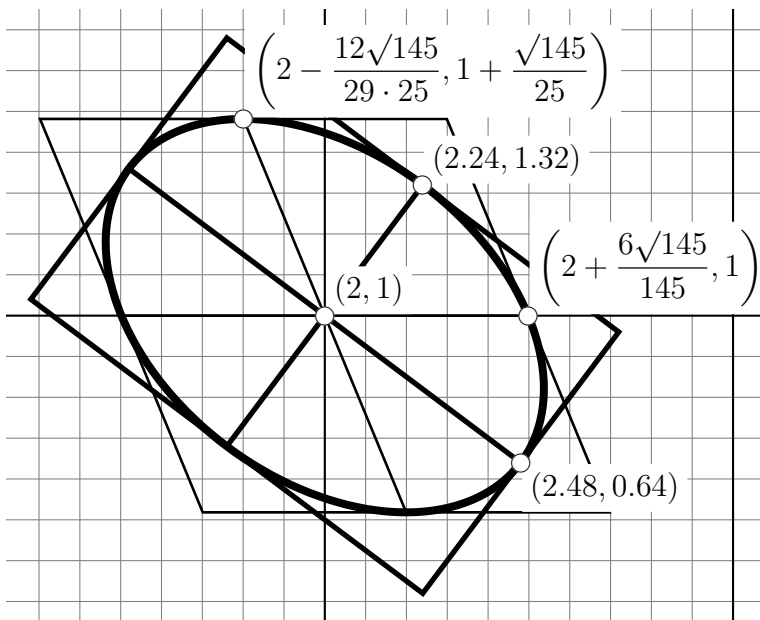
□

Problemi yaratmak için, birbirine denk olan

$$\frac{(4(x-2) - 3(y-1))^2}{9} + \frac{(3(x-2) + 4(y-1))^2}{4} = 1,$$

$$4(4x - 3y - 5)^2 + 9(3x + 4y - 10)^2 = 36,$$

$$4(16x^2 - 24xy + 9y^2 - 40x + 30y + 25) + 9(9x^2 + 24xy + 16y^2 - 60x - 80y + 100) = 36,$$



Şekil 20: Eğik bir elips

$$(64 + 81)x^2 + (216 - 96)xy + (36 + 144)y^2 \\ - (160 + 540)x + (120 - 720)y + 100 + 900 = 36,$$

$$145x^2 + 120xy + 180y^2 - 700x - 600y + 964 = 0$$

denklemlerini hesapladım.