

Cebir ile Geometri

David Pierce

15 Nisan 2025 taslağı

`mat.msgsu.edu.tr/~dpierce`

`david.pierce@msgsu.edu.tr`

Bu notlar, 2025 bahar döneminin analitik geometri derslerinde anlatılanlar için bir hatırlatmadır. Burada hata yapmamaya çalışıyorum, ama yazının matematiğinde veya Türkçesinde bir hata bulursanız lütfen bana haber verin.

İçindekiler

0	Öklid	3
1	Eksenler	6
2	Doğrular	8
3	Paralelkenarlar	13
4	Üçgenler	26
5	Çemberler	29
6	Açılar	31
7	Uzaklıklar	36
8	Uzay	41
9	Alanlar	49
10	Hacimler	51

0 Öklid

Öklid'in *Öğeler*'inin konuları,

- kitaplar I–IV'te bir düzlemdir;
- kitap V'te uzunlukların ve alanların *oranlarıdır*;
- kitap VI'da oranları kullanan *Thales Teoremidir*;
- kitaplar VII–IX'da sayma sayılarıdır;
- kitap X'da aynı birim ile ölçülmeyen uzunluklarıdır;
- kitaplar XI–XIII'te bir uzaydır.

Buradaki düzlem ve uzay, **Öklid düzlemi** ve **Öklid uzayıdır**.

Öklid'in oranları, bugünkü *gerçel sayılardır*. Oranlar çarpılıp toplanabilir, ve bu şekilde gerçel sayıların cebirsel özellikleri çıkar. Bundan dolayı, René Descartes'ın gösterdiği gibi geometri, cebir için bir temeldir.

Bu notlarda diğerk yöne gideceğiz. Richard Dedekind'in gösterdiğigibi gerçel sayıları, geometriyi kullanmadan inşa edebiliriz. Aslında inşa etmeyeceğiz, ama gerçel sayıların cebirsel özelliklerini kabul ederek

- $\mathbb{R}^2$ 'yi bir Öklid düzlemi,
- $\mathbb{R}^3$ 'ü bir Öklid uzayı

yapacağız. Bu şekilde cebir, geometri için bir temel olacak.

Analitik geometri, cebiri kullanan geometridir. Gördüğümüz gibi bunun mantıksal temeli ya geometri ya da cebir olarak anlaşılabilir. Analitik geometri kitaplarının çoğunda kabul edilen temel açık değildir. Bizim temelimiz cebir olacak.

Aslında Öklid'in oran tanımı, tamamen geometrik değildir, çünkü *Arşimet Aksiyomunu* varsayar. Bu aksiyoma göre iki uzunluk veya alan verildiğinde, küçüğünün bir katı, büyüğünden büyüktür.

Gerçel sayılar, bir *tam sıralı cisim*i oluşturur. Kısaca

- bir *cismin* elemanları toplanıp çarpılabilir;
- *sıralı* bir cisimde pozitif elemanların toplamı ve çarpımı da pozitiftir;
- *tam* sıralı bir cisimde her boş olmayan, üstsınırı olan kümenin en küçük üstsınırı vardır.

David Hilbert'in gösterdiği gibi saf geometriden bir *Öklid cismi* elde edilebilir. Bir Öklid cismi, sıralı bir cisimdir, ve ayrıca her pozitif eleman, bir elemanın karesidir. O zaman $\mathbb{R}$ bir Öklid cismidir, ama bazı tam olmayan sıralı cisimler Öklid cismidir. Bu notlarda $\mathbb{R}$ 'nin yerine rastgele bir Öklid cismi kullanılabilir.

Tarihler

Öklid aktif M.Ö. 300

Arşimet M.Ö. 287–212

René Descartes M.S. 1596–1650

Richard Dedekind 1831–1916

David Hilbert 1862–1943

1 Eksenler

$\mathbb{R}^2$ 'nin elemanları, girdileri gerçel sayı olan sıralı ikililerdir. Bunlardan biri

$$(a, b)$$

olduğunda

- a , onun **x koordinatıdır**, ve yeri, yatay **x eksenindedir**;
- b , onun **y koordinatıdır**, ve yeri, dikey **y eksenindedir**.

Eksenlerin kesişim noktası, her birinin 0 noktasıdır. Eğer a ve b 'nin her biri 0'dan farklı ise, o zaman x ekseninin a noktası, y ekseninin b noktası, ve eksenlerin ortak 0 noktası, bir dikdörtgenin üç köşesidir, ve dördüncü köşe, (a, b) 'dir.

Öyle düşünüyoruz, ama düşüncemizi kesinleştirmek zorundayız. Eğer a , b , c , ve d gerçel sayı olduğunda

$$a + d = b + c$$

ise, o zaman eksenlerin birinde uç noktaları a ve b olan doğru parçası, uç noktaları c ve d olan doğru parçasına

eşittir. Bu şekilde toplamının geometrik anlamı çıkar.
Çarpmanın geometrik anlamı daha zordur.

2 Doğrular

Resmi tanımımıza göre $\mathbb{R}^2$ 'nin **doğruları**,

$$(a, b) \neq (0, 0)$$

olmak üzere

$$ax + by = c$$

lineer denklemlerinin çözüm kümeleridir. Bir denklem, onun çözüm kümesini **tanımlar**.

Eğer iki doğru kesişmezse, o zaman bu doğrular birbirine **paraleldir**. Bir doğru, kendisine de paralel olsun.

Teorem 1. $\mathbb{R}^2$ 'de denklemleri

$$ax + by = e, \tag{1}$$

$$cx + dy = f \tag{2}$$

olan doğruların paralel olması için gerek ve yeter bir koşul,

$$ad - bc = 0. \tag{3}$$

Bir (g, h) noktasından geçen, denklemi (1) olan doğruya paralel olan tek bir doğru vardır, ve bu doğrunun bir denklemi,

$$ax + by = ag + bh. \tag{4}$$

Eğer koşul (3) sağlanmazsa, o zaman denklemleri (1) ve (2) olan doğruların tek bir kesişim noktası vardır, ve bu nokta,

$$\left(\frac{de - bf}{ad - bc}, \frac{af - ce}{ad - bc} \right). \quad (5)$$

Alıştırma 1. Teoremi kanıtlayın.

Alıştırma 2. a, b, c, d, e , ve f için değerler seçip denklemler (1) ve (2)'nin ortak çözümlerini bulun. Bunu (5)'i kullanmadan yapabilirsiniz.

Teorem 1'de (4), bir doğrunun *bir* denklemdir, çünkü öyle bir denklem, 0 olmayan gerçel bir sayı ile çarpılırsa, yeni denklem aynı doğruyu tanımlar.

Tanım olarak

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad (6)$$

alınsın. Bu gerçel sayı,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

matrisinin **determinantıdır**. O zaman (1) ve (2)'nin (5)'teki çözümü,

$$\left(\frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \right).$$

Teoremin bu parçası, **Cramer Kuralıdır.**

Teorem 2. $\mathbb{R}^2$ ’de eğer

$$(a, b), \quad (c, d)$$

birbirinden farklı ise, o zaman onlardan geçen tek bir doğru vardır, ve bu doğrunun bir denklemi,

$$(d - b)x + (a - c)y = ad - bc. \quad (7)$$

Alıştırma 3. Teoremi kanıtlayın.

Eğer $a \neq c$ ise, o zaman teoremdeki doğrunun başka bir denklemi,

$$\frac{y - b}{x - a} = \frac{d - b}{c - a}.$$

Genelde Teorem 2’deki doğrunun denklemi, öyle bir

$$ex + fy = g$$

ki (e, f, g) ,

$$\begin{cases} ax + by = z, \\ cx + dy = z \end{cases}$$

sistemini çözer.

Alıştırma 4. $\mathbb{R}$ ’den a, b, c , ve d için değerler seçip $\mathbb{R}^2$ ’de (a, b) ve (c, d) ’den geçen doğrunun bir denklemini bulun.

Tanım ve teoremlerimiz sayesinde $\mathbb{R}^2$ 'de *Öğeler* Kitap I'den alınmış aşağıdaki önermeler doğrudur.

1. İki farklı noktadan bir ve tek bir doğru geçer. (Postulat 1)
2. Verilen bir noktadan, verilen bir doğruya paralel olan bir ve tek bir doğru geçer. (Önermeler 29 ve 31)
3. Aynı doğruya olmayan en az üç nokta vardır. (Önerme 1'de bile varsayılan bir postulat)

Bu şekilde $\mathbb{R}^2$ bir **afin düzlemdir**.

Alıştırma 5. $\mathbb{R}^2$ 'de (a, b) , (c, d) , ve (e, f) noktalarının aynı doğruya olması için uygun bir yeter ve gerek koşul bulun.

Öğeler Kitap I Önerme 30'a göre paralellik geçişlidir. Bu teorem her afin düzlemde doğrudur:

Teorem 3. *Bir afin düzlemin doğruları kümesinde, paralellik bir denklik bağıntısıdır, yani*

- yansımalıdır (*bir doğru, kendisine paraleldir*);
- simetriktir (*bir doğru, başka bir doğruya paralel ise, o zaman her biri diğerine paraleldir*);
- geçişlidir (*iki doğru aynı doğruya paralel ise, o zaman birbirine de paraleldir*).

Kanıt. Yansımnlılık ve simetriklik aşikârdır. Geçişliliği göstermek için

$$\ell \parallel m, \qquad m \parallel n$$

olsun. Eğer ℓ ve n kesişmezse, o zaman paraleldir. Kesişirse, kesişim noktasından m 'ye paralel olan tek bir doğru geçtiğinden ℓ ve n aynı doğrudur, dolayısıyla paraleldir. $\square$

Teorem 4. *Bir afin düzlemde her doğruda en az bir nokta vardır.*

Kanıt. Bir afin düzlemde A , B , ve C , aynı doğruda olmayan noktalar olsun. O zaman AB ve AC , birbirinden farklı olan, A 'dan geçen doğrudurlar. Bu durumda ikisi aynı doğruya paralel olamaz, dolayısıyla her doğru ya AB ya da AC ile bir nokta paylaşır. $\square$

3 Paralelkenarlar

Teorem 5. *Bir afin düzlemde eğer ABC bir üçgen ise (yani A , B , ve C noktaları aynı doğruya değilse), o zaman bir ve tek bir D noktası için $ABCD$ bir paralelkenardır.*

Alıştırma 6. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 5'e göre, bir afin düzlemde, eğer Şekil 1'deki gibi ABE ve EBC üçgenler ise, o zaman bir ve tek bir şekilde $ABED$ ve $EBCF$ paralelkenarları vardır. Bu durumda

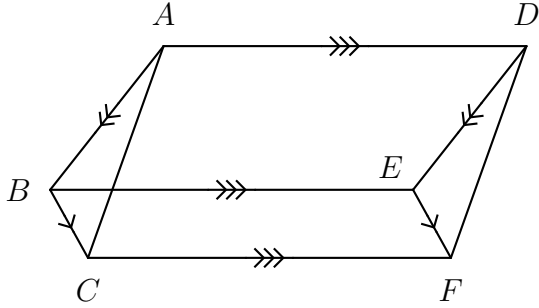
$$AD \parallel BE, \quad BE \parallel CF,$$

dolayısıyla Teorem 3 sayesinde

$$AD \parallel CF.$$

Ayrıca

$$AB \parallel DE, \quad BC \parallel EF. \quad (8)$$



Şekil 1: Desargues Teoremi, paralel durum

Eğer afin düzlemimiz $\mathbb{R}^2$ ise, o zaman **Desargues Teoreminin** bir durumuna göre

$$AC \parallel DF \quad (9)$$

paralellliği çıkar. Bunu göstereceğiz; her afin düzlemde doğru değildir.

Teorem 6. $\mathbb{R}^2$ 'de her

$$(x, y) \mapsto (x + e, y + f)$$

işleminin tersi vardır, ve işlem her doğrunun noktalarını paralel bir doğrunun noktalarına gönderir.

Kanıt. Verilen işlemin tersi,

$$(x, y) \mapsto (x - e, y - f).$$

Eğer (a, b) ve (c, d) birbirinde farklı ise, o zaman

$$(a + e, b + f), \quad (c + e, d + f)$$

noktaları da birbirinden farklıdır, ve bu durumda, Teorem 2 sayesinde, onlardan geçen doğrunun denklemi

$$\begin{aligned} (d - b)x + (a - c)y \\ = (a + e)(d + f) - (b + f)(c + e). \end{aligned} \quad (10)$$

Teorem 1 sayesinde bu doğru, (7)'nin tanımladığı doğruya paraleldir. Ayrıca, eğer (g, h) , (7)'yi sağlarsa, o zaman $(g + e, h + f)$, (10)'u sağlar. $\square$

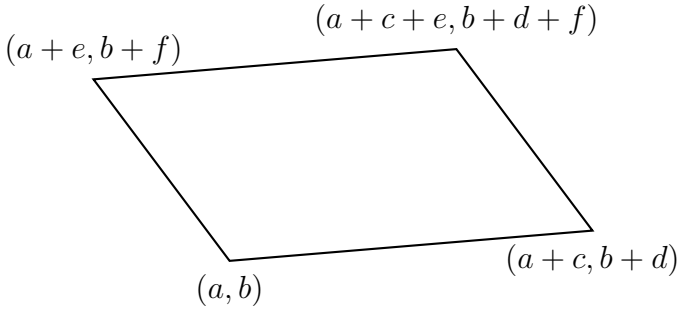
Denklem (10)'da istenirse

$$\begin{aligned} (a + e)(d + f) - (b + f)(c + e) \\ = ad + af + de + ef - (bc + be + cf + ef) \\ = ad + af + de - (bc + be + cf) \\ = ad - bc + (d - b)e + (a - c)f \end{aligned}$$

kullanılabilir.

Teorem 6'daki işlem, (a, b) ile **ötelemedir**. O zaman Şekil 2'deki dörtkenar bir paralelkenardır, çünkü Teorem 6 sayesinde

- aynı öteleme gönderir
 - (a, b) noktasını $(a + c, b + d)$ noktasına,



Şekil 2: Paralelkenar

- $(a + e, b + f)$ noktasını $(a + c + e, b + d + f)$ noktasına;
- aynı öteleme gönderir
 - (a, b) noktasını $(a + e, b + e)$ noktasına,
 - $(a + c, b + d)$ noktasını $(a + c + e, b + d + f)$ noktasına.

Şimdi Desargues Teoreminin bahsettiğimiz durumunu kanıtlayabiliriz. Bunu kolaylaştırmak için, bazı kısaltmalar tanımlayacağız.

Bir afin düzlemin noktaları için A , B , ve C gibi harfler kullanıyoruz. Eğer o afin düzlem $\mathbb{R}^2$ ise, o zaman A ,

$$(a_1, a_2)$$

olsun. Bu sıralı ikiliyi, kısaltma olarak

a

biçiminde yazalım. El yazısında bu siyah harf

$$\underline{a} \text{ veya } \vec{a}$$

olarak yazılabilir. Kısaca

$$A = (a_1, a_2) = \mathbf{a} \quad (11)$$

olsun. Benzer şekilde

$$B = (b_1, b_2) = \mathbf{b},$$

$$C = (c_1, c_2) = \mathbf{c},$$

vesaire; ayrıca

$$O = (0, 0) = \mathbf{0} \quad (12)$$

olsun. Bazen (x, y) yerine (x_1, x_2) ve $\mathbf{x}$ ifadesini kullanacağız.

Şimdi $\mathbb{R}^2$ 'de tanım olarak

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

olsun. Örneğin

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{a} \quad (13)$$

bir ötelemedir. Bunun tersini ifade etmek için, başka bir tanım olarak

$$-\mathbf{a} = (-a_1, -a_2)$$

olsun. O zaman

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$$

kısaltmasını kullanabiliriz. Bu durumda, Teorem 6 sayesinde, (13)'teki ötelemenin tersi,

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - \mathbf{a}.$$

Benzer bir şekilde, sonraki teorem doğrudur.

Teorem 7. $\mathbb{R}^2$ 'de

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c},$$

$$\mathbf{b} + \mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{b},$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a},$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Alıştırma 7. Teoremi kanıtlayın.

Alıştırma 8. $\mathbb{R}^2$ 'de sadece Teorem 7'yi kullanarak, her

$$\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

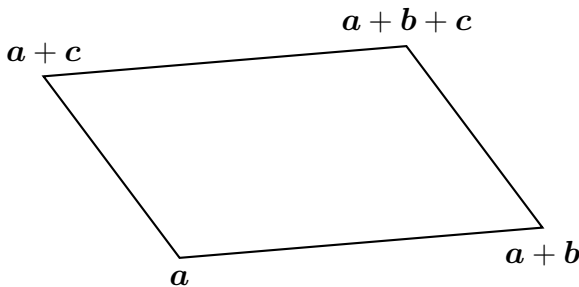
denkleminin bir ve tek bir çözümü olduğunu gösterin. Benzer bir şekilde, veya sonuç olarak,

$$\mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{d} \implies \mathbf{c} = \mathbf{d}$$

gerektirmesini gösterin.

Şimdi Şekil 3'teki dörtkenar bir paralelkenardır.

Alıştırma 9 (Desargues Teoremi, paralel durum). $\mathbb{R}^2$ 'de Şekil 1'in durumunda (9)'u kanıtlayın.



Şekil 3: Paralelkenar

Teorem 7 sayesinde, tanımladığımız toplama işlemi ile, $\mathbb{R}^2$ bir **abelyan gruptur**. O zaman

- toplama ile $\mathbb{R}$ ve
- çarpma ile $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,

abelyan grupturlar. $\mathbb{R}^3$ hariç başka abelyan gruplara bakmayacağız.

Bir afin düzlemde, girdileri iki farklı nokta olan bir sıralı ikili, bir **yönlü doğru parçasıdır**. Eğer bu girdiler A ve B ise, o zaman yönlü doğru parçasını, (A, B) yerine

$$\overrightarrow{AB}$$

olarak yazacağız. O zaman her $\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçasından, kural (11)'i kullanarak, uç noktalarının $a - b$ farkını elde edebiliriz. Bu durumda, eğer iki yönlü doğru

parçasından her birinin uç noktalarının farkı aynı ise, o zaman bu yönlü doğru parçaları **eşit** olarak sayılsın. Kısaca tanım olarak

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathbf{d} \quad (14)$$

olsun. Buradaki

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathbf{d}$$

eşitliğine göre $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ ve $\mathbf{c} - \mathbf{d}$, $\mathbb{R}^2$ 'nin *aynı* elemanıdır, ama aynı zamanda

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

eşitliğinde $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{CD}$ birbirinden farklı olabilir. Bununla beraber yönlü doğru parçalarının eşitliği bir denklik bağıntısıdır.

Aslında her durumda eğer

$$f: A \rightarrow B$$

(yani f , A kümesinden B kümesine giden bir fonksiyon) ise, o zaman A 'da

$$a R b \iff f(a) = f(b)$$

kuralı bir R denklik bağıntısını tanımlar. Eğer f de örten ise, o zaman B 'nin elemanları ile A 'nın elemanlarının R sınıfları (yani R 'ye göre denklik sınıfları) arasında bir eşleme (yani birebir örten fonksiyon) vardır.

$\mathbb{R}^2$ 'de $\mathbf{0}$ hariç her $\mathbf{a}$ elemanı, $\overrightarrow{OA}$ 'nın uç noktalarının farkıdır. Şimdi

$$\overrightarrow{AA},$$

yoğ bir yönlü doğru parçası olarak sayılsın. Her yönlü doğru parçasının eşitlik sınıfına **vektör** denir. Bu şekilde her yönlü doğru parçası bir vektörü **temsil eder**. O zaman $\mathbb{R}^2$ 'nin elemanları ve $\mathbb{R}^2$ 'nin vektörleri arasında bir eşleme vardır.

Kural (11) ile dediğimiz gibi, $\mathbb{R}^2$ 'nin aynı (a_1, a_2) elemanını

- hem bir afin düzlemin A noktası olarak,
- hem bir abelyan grubun $\mathbf{a}$ elemanı olarak

düşünebiliriz. Şimdi $\mathbf{a}$ 'yı da

- $\overrightarrow{OA}$ 'nın temsil ettiği vektör olarak

aşağıdaki şekilde düşünebiliriz. Dediğimiz gibi her doğru kendisine paraleldir.

- Eğer A ve B , O ile aynı doğrudaki ise, o zaman bu doğruyu ya OA ya da OB olarak yazabiliriz, ve sonuç olarak

$$OA \parallel OB.$$

O zaman $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ de birbirine **paralel** olsun:

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}.$$

- Diğer durumda $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ birbirine paralel değildir:

$$\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}.$$

Alıştırma 10. $\mathbb{R}^2$ 'de her $\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçası için, her C noktası için,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

koşulunu sağlayan bir ve tek bir D noktasının olduğunu gösterin.

Şimdi *Öğeler* Kitap I Önerme 33'ün benzerini kanıtlayabiliriz:

Teorem 8. $\mathbb{R}^2$ 'de ABC bir üçgen ve D bir nokta olsun. $ABDC$ 'nin bir paralelkenar olması için gerek ve yeter bir koşul,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.$$

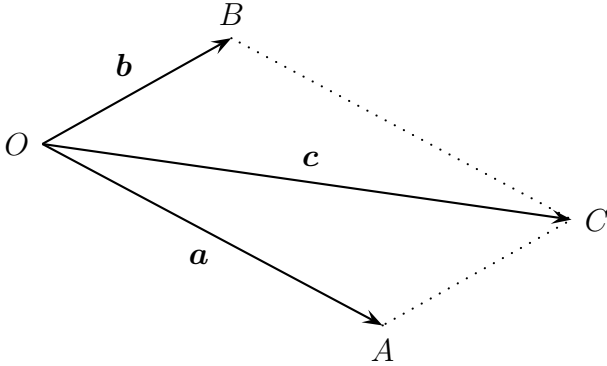
Özel olarak bu eşitlik

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$$

eşitliğini gerektirir.

Alıştırma 11. Teoremi kanıtlayın.

Sonraki teorem sayesinde, $\mathbb{R}^2$ 'nin afin yapısından ve $\mathbf{0}$ elemanından $\mathbb{R}^2$ 'nin abelyan grup yapısını elde edebiliriz. İki duruma bakmak gerekecek.



Şekil 4: İki vektörün toplamı: $c = a + b$

Teorem 9. $\mathbb{R}^2$ 'de a ve b , 0 'dan farklı olsun.

1. Eğer Şekil 4'teki gibi $a \nparallel b$ ise, o zaman

$$c = a + b$$

olmak üzere $AOBC$ bir paralelkenardır.

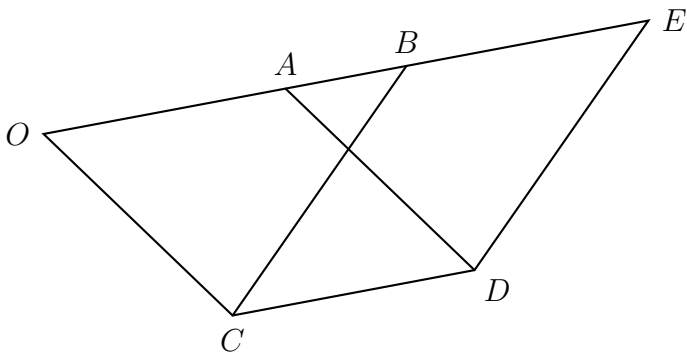
2. Eğer Şekil 5'teki gibi $a \parallel b$ ise, ama $a \nparallel c$ ise, o zaman

$$d = a + c,$$

$$e = a + b$$

olmak üzere $BCDE$ bir paralelkenardır.

Alıştırma 12. Teoremi kanıtlayın.



Şekil 5: İki paralel vektörün toplamı

Alıştırma 13. Eğer $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$, bir $\mathbf{c}$ vektörü ile aynı doğruya değilse, o zaman

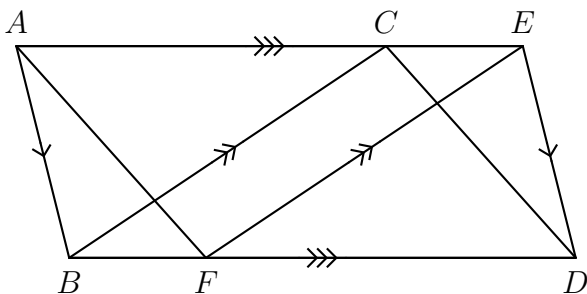
$$\mathbf{d} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$$

olmak üzere $ACBD$ 'nin bir paralelkenar olduğunu gösterin.

Alıştırma 14 (Pappus Teoremi, paralel durum). $\mathbb{R}^2$ 'de, eğer Şekil 6'daki gibi A , C , ve E bir doğruya ise, ve B , D , ve F farklı ve paralel bir doğruya ise, ve paralellikler (8) doğru ise, o zaman

$$CD \parallel FA \quad (15)$$

paralellüğünü gösterin.



Şekil 6: Pappus Teoremi, paralel durum

Bir afin düzlemde, eğer Desargues Teoreminin paralel durumu doğru ise, o zaman Pappus Teoreminin paralel durumu da doğrudur; ayrıca, eğer bir $\mathbf{0}$ noktasını seçersek, o zaman Teorem 9'daki gibi düzlemimiz bir abelyan grup olur.

4 Üçgenler

$\mathbb{R}$ 'nin her b elemanı için, $\mathbb{R}^2$ 'nin her $\mathbf{a}$ elemanı için,

$$b \cdot \mathbf{a} = (ba_1, ba_2)$$

olsun. Zaten $\mathbf{a}$ 'nin bir vektör olduğunu söyledik; şimdi b bir **skaler**dir.

Teorem 10. $\mathbb{R}^2$ 'de

$$(b + c) \cdot \mathbf{a} = b \cdot \mathbf{a} + c \cdot \mathbf{a},$$

$$c \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = c \cdot \mathbf{a} + c \cdot \mathbf{b},$$

$$(bc) \cdot \mathbf{a} = b \cdot (c \cdot \mathbf{a}),$$

$$1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}.$$

Alıştırma 15. Teoremi gösterin.

Teorem 7 ve 10 sayesinde $\mathbb{R}^2$ bir **vektör uzayı**dır.

Alıştırma 16. $\mathbb{R}^2$ 'de sadece Teorem 7 ve 10'u (ve Alıştırma 8'i) kullanarak

$$-(b \cdot \mathbf{a}) = (-b) \cdot \mathbf{a}$$

eşitliğini ve

$$b \cdot \mathbf{a} \neq \mathbf{0} \iff b \neq 0 \ \& \ \mathbf{a} \neq \mathbf{0},$$

denkliğini gösterin, ve $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ olmak üzere her

$$x \cdot \mathbf{a} = b \cdot \mathbf{a}$$

denkleminin bir ve tek bir çözümünün olduğunu gösterin.

Teorem 11. $\mathbb{R}^2$ 'de, farklı A ve B noktalarından geçen doğrunun noktaları, $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$(1 - t) \cdot \mathbf{a} + t \cdot \mathbf{b} \tag{16}$$

elemanlarıdır.

Alıştırma 17. Teoremi gösterin.

Eğer

$$\mathbf{a} \neq \mathbf{b}, \qquad \mathbf{d} \neq \mathbf{e},$$

ve

$$\begin{aligned} (1 - t) \cdot \mathbf{a} + t \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{c}, \\ (1 - t) \cdot \mathbf{d} + t \cdot \mathbf{e} &= \mathbf{f} \end{aligned}$$

ise, (A, C, B) ve (D, F, E) sıralı üçlüleri *denk* olsun. Bu denklik için, bir işaret kullanmayacağız, ama (A, C, B) 'nin denklik sınıfı

$$AC : AB$$

olacak; bu sınıf bir **orandır**. Eğer $AC : AB$ ve $DF : DE$ aynı ise, o zaman

$$AC : AB :: DF : DE$$

orantısını yazarız.

Teorem 12 (Thales). $\mathbb{R}^2$ 'de eğer ABC bir üçgen ise, ve ayrıca A 'dan farklı olan E ve F , sırasıyla AB ve AC 'nin noktası ise, o zaman

$$EF \parallel BC \iff AE : AB :: AF : AC.$$

Alıştırma 18. Teoremi gösterin.

Alıştırma 19 (Desargues Teoremi, kesişen durum). $\mathbb{R}^2$ 'de, eğer ABC ve DEF üçgenlerinin ortak köşesi yoksa, ama AD , BE , ve EF doğrularının ortak noktası varsa, ve paralellikler (8)'i doğru ise, o zaman paralellik (9)'un da doğru olduğunu gösterin.

Alıştırma 20 (Pappus Teoremi, kesişen durum). $\mathbb{R}^2$ 'de, eğer A , C , ve E bir doğrudur ise, ve B , D , ve F paralel olmayan bir doğrudur ise, ve paralellikler (8) doğru ise, o zaman paralellik (15)'in de doğru olduğunu gösterin.

Bir afin düzlemde, eğer Pappus Teoreminin kesişen durumu doğru ise, o zaman Desargues Teoreminin kesişen durumu da doğrudur; ayrıca, eğer bir **0** noktasını seçersek, o zaman düzlemimiz bir vektör uzayı olur.

5 Çemberler

$\mathbb{R}^2$ 'de, resmi tanımımıza göre, **merkezi** (a, b) olan, (c, d) noktasından geçen **çember**,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = (c - a)^2 + (d - b)^2$$

denkleminin çözüm kümesidir. Öklid'den öğrendiğimiz tanıma göre, uç noktalarının biri çemberde olan, biri merkez olan doğru parçaları eşittir. Ortak bir kavrama göre eşitlik bir denklik bağıntısıdır. O zaman $\mathbb{R}^2$ 'de doğru parçalarının eşitliğini

$$AB = CD \iff$$

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 = (c_1 - d_1)^2 + (c_2 - d_2)^2 \quad (17)$$

denkliği ile tanımlarız. Burada, denklik (14)'teki gibi

$$AB = CD$$

eşitliğinde doğru parçası olarak AB ve CD farklı olabilir, ama (17)'nin sağındaki eşitlik doğru ise, o zaman AB ve CD 'nin **uzunluğu** aynıdır. Bu uzunluğu $|AB|$ ile gösterebiliriz; ayrıca

$$|AB| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

ile tanımlayabiliriz. Şimdi (17),

$$AB = CD \iff |AB| = |CD| \quad (18)$$

olur.

Alıştırma 21. Ötelemelerin, uzunlukları değiştirmediğini gösterin.

6 Açılar

Açıların eşitliğini de tanımlamak isteriz. Pisagor Teoreminin koşulundan

$$\begin{aligned} |OA|^2 + |OB|^2 &= |AB|^2 \\ \iff a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 &= (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 \\ \iff 0 &= -2a_1b_1 - 2a_2b_2 \\ \iff 0 &= a_1b_1 + a_2b_2. \end{aligned}$$

Son toplam, **$\mathbf{a}$** ve **$\mathbf{b}$** 'nin **skaler çarpımıdır**. Ona **nokta çarpımı** da denir çünkü tanım olarak

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

eşitliğini yazarız.

Teorem 13. $\mathbb{R}^2$ 'de

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \\ \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}, \\ \mathbf{a} \cdot (t \cdot \mathbf{b}) &= t(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} &\geq 0, \\ |\mathbf{a}| &= \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}. \end{aligned}$$

Ayrıca

$$|\mathbf{a}| = 0 \implies \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Alıştırma 22. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 7, 10, 13 sayesinde $\mathbb{R}^2$, bir **iççarpımlı** vektör uzayıdır, kısaca bir **iççarpım uzayıdır**.

Teorem 14. $\mathbb{R}^2$ 'de

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 &= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \\ |t \cdot \mathbf{a}| &= |t||\mathbf{a}|. \end{aligned} \quad (19)$$

Ayrıca

$$\mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{b} \neq \mathbf{0}, \quad (20)$$

$$s > 0, \quad t > 0, \quad (21)$$

$$s \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c}, \quad t \cdot \mathbf{b} = \mathbf{d} \quad (22)$$

ise

$$\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}}{|\mathbf{c}||\mathbf{d}|}. \quad (23)$$

Alıştırma 23. Teoremi, sadece Teorem 13'ü kullanarak kanıtlayın.

Koşullar (20) altında açı olarak AOB ve COD aynıdır, ve bu açı, ve (23) sayesinde, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}/|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$ bölümünü belirtir. Bundan dolayı O 'dan farklı olan herhangi A , B , C , ve D için

$$\angle AOB = \angle COD \iff \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}}{|\mathbf{c}||\mathbf{d}|}$$

denkliğini, açıların eşitliğinin tanımı olarak kabul edebiliriz. O zaman açıların dikliğini

$$AO \perp OB \iff \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$$

ile tanımlayabiliriz. Ötelemelerin, açıları değiştirmediğini varsayıyoruz.

Teorem 15 (KAK ve KKK). $\mathbb{R}^2$ 'de

$$AB = DE, \quad BC = EF$$

olduğunda

$$\angle ABC = \angle DEF \iff AC = DF.$$

Alıştırma 24. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 16. $\mathbb{R}^2$ 'de $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ $\mathbf{0}$ 'dan farklı olduğunda

$$t = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} \tag{24}$$

olsun. O zaman

$$\mathbf{a} - t \cdot \mathbf{b} \perp \mathbf{b}. \tag{25}$$

Ayrıca

$$|\mathbf{a} - t \cdot \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 - \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}{|\mathbf{b}|^2},$$

dolayısıyla

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|. \tag{26}$$

Teorem, kendi kanıtıdır, ama aşağıdaki gibi türeyebilir. Diklik (25)'ten

$$0 = (\mathbf{a} - t \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - t|\mathbf{b}|^2$$

çıkar, ve bundan (24).

Eğer AOB açısının eşitlik sınıfını θ olarak yazarsak, o zaman tanım olarak

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \quad (27)$$

olsun. Bu durumda (26) sayesinde

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1.$$

Ayrıca (19)'dan

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta.$$

Bu eşitlik, **kosinüs teoremidir**.

Alıştırma 25. Aşağıdaki iki durumda ABC ve DEF üçgenlerinin açılarının hangi açıları birbirine eşittir?

A	B	C	D	E	F
(6, 0)	(1, 0)	(0, 6)	(0, 4)	(3, 0)	(7, 3)
(0, 1)	(5, 0)	(9, 7)	(0, 23)	(17, 17)	(11, 0)

Alıştırma 26. Alıştırma 25 gibi kendi alıştırmalarınızı yaratın. Bu alıştırma için aşağıdaki yöntemi kullandım. Herhangi θ açısı için

$$\rho_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$$

olsun. O zaman ρ_θ , uzunlukları değiştirmez, dolayısıyla açılarını da değiştirmez. Örneğin

$$\cos \theta = \frac{3}{5}, \quad \sin \theta = \frac{4}{5}$$

olabilir. şimdi ***a*** ve ***b***, paralel olmayan vektörler olduğunda, ve *s* ve *t*, birbirinden farklı olan pozitif skalerler olduğunda,

$$\mathbf{c} = s \cdot \mathbf{a}, \quad \mathbf{d} = t \cdot \mathbf{b}$$

olsun. O zaman

$$C' = \rho_\theta(C), \quad D' = \rho_\theta(D)$$

olduğunda

$$\angle AOB = \angle C'OD'.$$

AOB ve *C'OD'* üçgenlerini farklı ötelemeler altında alın.

7 Uzaklıklar

Eğer bir doğru bir OA doğrusuna paralel ise, o zaman ilk doğru, $\mathbf{a}$ vektörüne de **paralel** olsun.

Teorem 17. $\mathbb{R}^2$ 'de $\mathbf{0}$ 'dan farklı olan bir $\mathbf{a}$ 'ya paralel olan, bir $\mathbf{b}$ 'den geçen doğrunun noktaları,

$$\mathbf{b} + t \cdot \mathbf{a}$$

elemanlarıdır.

Alıştırma 27. Teoremi kanıtlayın. Teorem 11'i kullanabilirsiniz.

Teorem 18. *Denklemini*

$$ax + by = c \tag{28}$$

olan doğru, (a, b) vektörüne diktir.

Kanıt. Doğru, denklemi

$$ax + by = 0$$

olan doğruya paraleldir. Bu doğrunun denklemini

$$(a, b) \cdot (x, y) = 0$$

biçiminde yazabiliriz, dolayısıyla bu doğru, (a, b) vektörüne diktir. Ayrıca paralel doğrular, aynı doğrulara ve vektörlere diktir. $\square$

Sonuç olarak denklem (28)'i

$$(a, b) \cdot (x, y) = c$$

biçiminde yazmak faydalı olabilir.

Teorem 19. *Bir AB doğru parçasının orta dikmesi,*

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (x, y) = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2} \quad (29)$$

tarafından tanımlanır.

Alıştırma 28. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 20. $\mathbb{R}^2$ 'de denklemi

$$\mathbf{a} \cdot (x, y) = b \quad (30)$$

olan doğruya, $\mathbf{c}$ noktasından geçen dikmenin ayağı

$$\mathbf{c} + \frac{b - \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{a}|^2} \cdot \mathbf{a}. \quad (31)$$

Sonuç olarak

1) denklemi (30) olan doğru $\mathbf{c}$ noktasının uzaklığı

$$\frac{|b - \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}|}{|\mathbf{a}|};$$

2) denklemi (30) olan doğruya göre $\mathbf{c}$ noktasının yansımaları

$$\mathbf{c} + 2 \frac{b - \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{a}|^2} \cdot \mathbf{a}.$$

Kanıt. Teorem 17 ve 18 sayesinde

- denklemi (30) olan doğru $\mathbf{a}$ 'ya diktir;
- $\mathbf{c}$ 'den ve (31)'deki verilen noktadan geçen doğru $\mathbf{a}$ 'ya paraleldir.

Ayrıca (31)'deki verilen nokta (30)'u sağlar. $\square$

Teorem 20'yi ezberlemek zorunda olmamak için, onu türetebiliriz. Teorem 17 ve 18 sayesinde istediğimiz dikmenin ayağı

$$\mathbf{c} + t \cdot \mathbf{a}$$

biçimindedir. Bu nokta, (30)'u sağlar, dolayısıyla

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} + t \cdot \mathbf{a}) = b,$$

ve bundan

$$t = \frac{b - \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{a}|^2}. \quad (32)$$

Teorem 20'yi türetmek için başka bir yöntem de vardır. Denklemi (30) olan doğruya bir $\mathbf{d}$ noktası seçilsin. Teorem 16'nın türemesindeki gibi

$$\mathbf{d} - \mathbf{c} - t \cdot \mathbf{a} \perp \mathbf{a},$$

dolayısıyla

$$t = \frac{(\mathbf{d} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}.$$

Bundan (32) çıkar çünkü

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{d} = b.$$

Teorem 20'nin ikinci sonucunu Teorem 19'u kullanarak kontrol edebiliriz. Uç noktaları $\mathbf{c}$ ve $\mathbf{c} + 2t \cdot \mathbf{a}$ olan doğru parçasının orta dikmesinin denklemi,

$$2t \cdot \mathbf{a} \cdot (x, y) = 2t \cdot \mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} + t \cdot \mathbf{a})$$

veya

$$\mathbf{a} \cdot (x, y) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} + t \cdot \mathbf{a}).$$

Eğer (32) doğru ise, o zaman

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} + t \cdot \mathbf{a}) = b,$$

dolayısıyla orta dikmenin denklemi (30) olur.

Örneğin uç noktaları $(1, 1)$ ve $(3, -3)$ olan doğru parçasının orta dikmesi

$$(2, -4) \cdot (x, y) = 8$$

tarafından tanımlanır. Ayrıca bu doğru verilirse, buna $(1, 1)$ 'ten indirilen dikmesinin ayağı, öyle

$$(1, 1) + t \cdot (2, -4)$$

ki

$$\begin{aligned} 8 &= (2, -4) \cdot ((1, 1) + t \cdot (2, -4)) = -2 + 20t, \\ t &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

dolayısıyla ayak

$$\begin{aligned} (1, 1) + \frac{1}{2} \cdot (2, -4), \\ (1, 1) + (1, -2), \\ (2, -1). \end{aligned}$$

Sonuç olarak

- doğrudan $(1, 1)$ noktasına uzaklık

$$\begin{aligned} |(1, -2)|, \\ \sqrt{5}; \end{aligned}$$

- noktanın doğruya göre yansıması

$$\begin{aligned} (1, 1) + (2, -4), \\ (3, -3). \end{aligned}$$

8 Uzay

Yukarıdakilerin çoğu, $\mathbb{R}^2$ 'nin yerine $\mathbb{R}^3$ ile yapılabilir.

$\mathbb{R}^3$ 'ün elemanları, girdileri gerçel sayı olan sıralı üçlülerdir. Bunlardan biri

$$(a, b, c)$$

olduğunda

- a , onun x koordinatıdır, ve yeri, x eksenindedir;
- b , onun y koordinatıdır, ve yeri, y eksenindedir;
- c , onun **z koordinatıdır**, ve yeri, **z eksenindedir.**

Eğer (11)'in yerinde

$$A = (a_1, a_2, a_3) = \mathbf{a}$$

gibi kısaltmalar kullanırsak, o zaman

$$\begin{aligned}\mathbf{a} + \mathbf{b} &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3), \\ \mathbf{0} &= (0, 0, 0), \\ -\mathbf{a} &= (-a_1, -a_2, -a_3), \\ b \cdot \mathbf{a} &= (b \cdot a_1, b \cdot a_2, b \cdot a_3), \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3\end{aligned}$$

tanımları ile $\mathbb{R}^3$, bir iççarpım uzayı olur. Özellikle Teorem 7, 10, 13, 14, ve 16, $\mathbb{R}^3$ 'te de doğrudur. Teorem 11, $\mathbb{R}^3$ 'ün doğrularının tanımı olarak kabul edilebilir. Bu durumda

$$(x, y, z) \mapsto (x + a, y + b, z + c)$$

veya

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{a}$$

işlemi için Teorem 6 doğrudur, ve $\mathbb{R}^3$ 'te Teorem 17 doğrudur. Ayrıca açıları ölçmek için (27) kabul edilebilir.

Eğer $\mathbf{0}$ 'dan farklı olan bir $\mathbf{a}$ 'ya paralel olan, bir $\mathbf{b}$ elemanından geçen doğrunun $\mathbf{b} + t \cdot \mathbf{a}$ noktalarını (x, y, z) olarak yazarsak, o zaman

$$x = b_1 + a_1 t, \quad y = b_2 + a_2 t, \quad z = b_3 + a_3 t.$$

Eğer ayrıca

$$a_1 a_2 a_3 \neq 0$$

ise, o zaman

$$\frac{x - b_1}{a_1} = \frac{y - b_2}{a_2} = \frac{z - b_3}{a_3}. \quad (33)$$

Burada üç lineer denklem vardır ama ikisi, üçüncüsünü gerektirir. Diğer durumlarda, örneğin

$$a_1 a_2 \neq 0, \quad a_3 = 0$$

ise, o zaman

$$\frac{x - b_1}{a_1} = \frac{y - b_2}{a_2}, \quad z = b_3 \quad (34)$$

denklemleri çıkar. Eğer

$$a_1 \neq 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0$$

ise, o zaman

$$y = b_2, \quad z = b_3 \quad (35)$$

denklemleri çıkar.

Yukarıdaki sistemler (33), (34), ve (35)'teki denklemlerin her biri, bir **düzlem** tanımlar. Aslında $\mathbb{R}^3$ 'ün her düzlemi,

$$(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

olmak üzere bir

$$ax + by + cz = d \quad (36)$$

lineer denkleminin çözüm kümesidir. Aynı (36) denklemi

$$(a, b, c) \cdot (x, y, z) = d$$

biçiminde yazılabilir.

Eğer denklemi

$$\mathbf{a} \cdot (x, y, z) = b \quad (37)$$

olan düzlemde birbirinden farklı olan $\mathbf{c}$ ve $\mathbf{d}$ oturursa, o zaman

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{d}) = 0,$$

dolayısıyla $\mathbf{c}$ ve $\mathbf{d}$ 'den geçen doğru $\mathbf{a}$ 'ya diktir. Bu şekilde Teorem 18'in benzeri $\mathbb{R}^3$ 'te doğrudur, ve $\mathbf{a}$, denklemi (37) olan düzlemin bir dikmesidir. Bunun için **normal** de kullanılır çünkü Latince *norma* bir gönyedir.

Şimdi $\mathbb{R}^3$ 'te Teorem 19 ve 20 doğrudur ama (29) ve (30)'da (x, y) 'nin yerine (x, y, z) konulmalı çünkü $\mathbb{R}^3$ 'te bu denklemler düzlem tanımlar.

Şimdi

$$\mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{b} \neq \mathbf{0} \quad (38)$$

olmak üzere denklemleri sırasıyla

$$\mathbf{a} \cdot (x, y, z) = c, \quad \mathbf{b} \cdot (x, y, z) = d$$

olan düzlemler veriliğinde

- $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ ise düzlemler **paraleldir** çünkü kesişmez veya aynıdır;

- $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ ise düzlemler kesişir, ve bir lineer cebir dersindeki gibi düzlemlerin denklemlerinden (33), (34), ve (35) gibi bir sistem elde edilebilir. Özellikle düzlemlerin kesişimi bir doğrudur.

Bu şekilde Teorem 1 ve 3'ün benzerleri $\mathbb{R}^3$ 'te doğrudur.

Örneğin

$$t \cdot (1, -2, 3) + (5, 0, 3) \quad (39)$$

noktaları, bir doğrunun noktalarıdır ve

$$x - 5 = \frac{y}{-2} = \frac{z - 3}{3}$$

denklerini sağlar. Bunlardan ikisi,

$$3x - z = 12, \quad 3y + 2z = 6 \quad (40)$$

veya

$$(3, 0, -1) \cdot (x, y, z) = 12, \quad (0, 3, 2) \cdot (x, y, z) = 6$$

biçiminde yazılabilir, ve bu denklemlerin her biri bir düzlem tanımlar.

Tersine

$$(2, 1, 0) \cdot (x, y, z) = 10, \quad (3, 3, 1) \cdot (x, y, z) = 18 \quad (41)$$

tarafından tanımlanan düzlemler verilsin. Denklemlerin

ortak çözümlerini hesaplayacağız.

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 10 \\ 3 & 3 & 1 & 18 \end{pmatrix}, \\
 & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 10 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \\
 & \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \\
 & \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 3 & 24 \end{pmatrix}, \\
 & \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & -1 & 12 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{42}$$

O zaman istediğimiz çözüm kümesi, zaten (40) tarafından tanımlar. Oradan başlayarak

$$\begin{cases} 2z = -3y + 6 = -3(y - 2), \\ 2z = 6x - 24 = 6(x - 4) \end{cases}$$

sistemini elde ederiz, ve bundan

$$x - 4 = \frac{y - 2}{-2} = \frac{z}{3}.$$

Bu şekilde (40) veya (41) sistemi tarafından doğrunun noktaları

$$t \cdot (1, -2, 3) + (4, 2, 0)$$

biçiminde de yazılabilir.

Alıştırma 29. Yukarıdaki örneği yaratmak için (39) ile başlayıp sistem (40)'ı elde ettim. Bunun matris (43)'ten matris (42)'de ve sistem (41)'i elde ettim. Aynı şekilde kendi örneklerinizi yaratabilirsiniz.

Koşullar (38) altında $\mathbf{a}$ 'ya paralel olan $\mathbf{c}$ 'den geçen doğrunun ve $\mathbf{b}$ 'ye paralel olan $\mathbf{d}$ 'den geçen doğrunun kesişmesi için gerek ve yeter koşul,

$$s \cdot \mathbf{a} + \mathbf{c} = t \cdot \mathbf{b} + \mathbf{d}$$

denkleminin çözümünün olmasıdır. Bu sistem, değişkenleri x , y , ve z olan üç-denklemlı bir lineer sistem olarak yazılabilir.

Alıştırma 30. Noktaları sırasıyla

$$\begin{aligned} t \cdot (11, -14, 4) + (-4, 16, -2), \\ t \cdot (8, -17, 7) + (15, -15, 9) \end{aligned}$$

olan doğruların ortak noktası var mı? Varsa bulun.

Teorem 2'nin benzeri için $\mathbb{R}^3$ 'te $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, ve $\mathbf{c}$ aynı doğruda olmasın, yani

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} \nparallel \mathbf{a} - \mathbf{c}$$

olsun. Eğer $\mathbf{d}$, hem $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 'ye hem de $\mathbf{a} - \mathbf{c}$ 'ye dik ise, o zaman $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, ve $\mathbf{c}$, denklemi

$$\mathbf{d} \cdot (x, y, z) = \mathbf{d} \cdot \mathbf{a} \tag{44}$$

olan düzlemde dirler. O zaman $\mathbf{d}$,

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (x, y, z) = 0, \quad (\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot (x, y, z) = 0$$

lineer sisteminin sıfır olmayan bir çözümüdür. Öyle bir çözüm bulmak için genel bir yöntemi sonraki bölümlerde elde edeceğiz. Bu şekilde Teorem 2'nin benzeri $\mathbb{R}^3$ 'te doğru olacak.

9 Alanlar

$\mathbb{R}^2$ 'de, eşitlik (27)'de, $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ 'nin yerine (a, b) ve (c, d) 'yi kullanalım. Eğer

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

eşitiğini kabul edersek, o zaman

$$\begin{aligned}\sin^2 \theta &= 1 - \cos^2 \theta \\ &= \frac{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2}{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \\ &= \frac{a^2 d^2 + b^2 c^2 - 2abcd}{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \\ &= \frac{(ad - bc)^2}{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}.\end{aligned}$$

Şimdi

$$\sin \theta = \frac{ad - bc}{|(a, b)|| (c, d)|}$$

ile **sinüs** fonksiyonunu tanımlayabiliriz. Ayrıca tanım (6) sayesinde $(0, 0)$ 'a bitişik köşeleri

$$(a, b), \quad (c, d) \quad (45)$$

olan paralelkenarın **alanı**,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

determinantının mutlak değeridir.

Aynı sonucu başka bir şekilde elde edebiliriz, çünkü

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \Delta$$

ise, o zaman

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = -\Delta, \quad \begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} = t\Delta, \quad \begin{vmatrix} a+tc & b+td \\ c & d \end{vmatrix} = \Delta.$$

Eğer 45'teki köşeler aynı şekilde değiştirilirse, o zaman paralelkenarın alanı, sırasıyla

- değişmez,
- $|t|$ ile çarpılır,
- değişmez.

Ayrıca

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

ve $(0,0)$ 'a bitişik köşeleri

$$(1,0), \quad (0,1)$$

olan paralelkenarın alanı 1'dir.

10 Hacimler

Benzer şekilde $\mathbb{R}^3$ 'te $(0, 0)$ 'a bitişik köşeleri

$$(a, b, c), \quad (d, e, f), \quad (g, h, k)$$

olan paralelyüzlünün alanı,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$$

determinantının mutlak değeridir. Determinantın değeri,

$$\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} g - \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} h + \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} k,$$

yani

$$\left(\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \right) \cdot (g, h, k).$$

Tanım olarak

$$\left(\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \right) = (a, b, c) \times (d, e, f)$$

olsun. Bu vektör, (a, b, c) ve (d, e, f) 'nin **çapraz çarpımıdır**. Bu çarpım $\mathbb{R}^2$ 'de değil, sadece $\mathbb{R}^3$ 'te tanımlanır. Çapraz çarpımın tanımı ile

$$((a, b, c) \times (d, e, f)) \cdot (x, y, z) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

eşitlik bir özdeşliktir (yani her durumda doğrudur). O zaman $\mathbb{R}^3$ 'te

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b}.$$

Ayrıca $(0, 0, 0)$ 'a bitişik köşeleri $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ olan paralelkenarın alanı

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|.$$

Şimdi denklem (44)'te

$$\mathbf{d} = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{c})$$

olabilir. Ayrıca $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ 'ye paralel olan, $\mathbf{c}$ 'yi içeren düzlemin denklemi

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (x, y, z) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$$

Eğer iki düzlemin denklemleri sırasıyla

$$\mathbf{a} \cdot (x, y, z) = c, \quad \mathbf{b} \cdot (x, y, z) = d$$

ise, o zaman onların kesişimi $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 'ye paralel bir doğrudur.

Alıştırma 31. $(2, 1, 0) \times (3, 3, 1)$ çapraz çarpımını hesaplayarak sistem (41) 'in çözümünü kontrol edin. Benzer şekilde Alıştırma 29'da yarattığınız örnekleri kontrol edin.