

Analitik Geometri (MAT 104)

Arasınanav çözümleri

David Pierce

30 Nisan 2025

Matematik Böl., MSGSÜ

Sizin gibi her problemin sadece bir durumunu çözeceğim. Diğer durumlar benzerdir.

Sınıfta ön sıra 1 ve sol sütun 1 olduğunda, oturma yerleri aşağıdaki gibi olsun.

1	2	3	4	1	2	...
3	4	1	2	3	4	...
1	2	3	4	1	2	...
3	4	1	2	3	4	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

O zaman oturduğunuz yer için

$$(\text{sıra, sütun}) = (k, \ell)$$

ise

$$1 \leq M \leq 4, \\ M \equiv 2 \cdot (k - 1) + \ell \pmod{4}$$

olacak şekilde, M değeriniz için aşağıdaki problemleri çözeceksiniz. Okuyacağım her kağıdın üstüne adınızı, soyadınızı, ve M 'nin değerini yazın.

Tabii ki işlemleri benim okuyabileceğim şekilde yazmalısınız. İyi çalışmalar dilerim. Sınavdan sonra bu kağıdı alabilirsiniz.

Problem 1. $O = (0, 0)$ olduğunda $OABC$ dörtgeninin paralelkenar olmayan yamuk olduğunu (yani sadece iki kenarın paralel olduğunu) gösterin.

M	1	2	3	4
A	$(10, -24)$	$(24, 7)$	$(16, -30)$	$(40, 9)$
B	$(17, -7)$	$(31, -17)$	$(23, -7)$	$(49, -31)$
C	$(12, 5)$	$(14, -48)$	$(15, 8)$	$(18, -80)$

Çözüm. $M = 4$. Denklemler:

$$\begin{array}{ll} OA: & 9x - 40y = 0, \\ BC: & 49x - 31y = b, \end{array} \quad \begin{array}{ll} AB: & 40x + 9y = a, \\ CO: & 80x + 18y = 0. \end{array}$$

(Burada a ve b , değeri önemli olmayan sabittirler.) Determinantlar alabiliriz:

- $OA \nparallel BC$ çünkü $40 \cdot 49 - 9 \cdot 31 > 0$.
- $AB \parallel CO$ çünkü $40 \cdot 18 - 9 \cdot 80 = 2 \cdot (40 \cdot 9 - 9 \cdot 40) = 0$.

$OABC$ sadece bir yamuktur.

Farklı yöntemler de vardır. Eğimler kullanılabilir. Ayrıca $A = \mathbf{a}$ vs. olduğunda

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (7, -24) = \frac{1}{2}\mathbf{c},$$

dolayısıyla $AB \parallel CO$, ama

$$\mathbf{a} + \mathbf{c} = (58, -71) \neq \mathbf{b} = \mathbf{b} - \mathbf{0},$$

dolayısıyla $OABC$, paralelkenar olamaz.

Problem 2. ABC üçgeninin hangi açısı ACD üçgeninin hangi açısına eşittir?

M	A	B	C	D
1	$(-20, 6)$	$(4, 6)$	$(4, -12)$	$(-13, -18)$
2	$(20, -6)$	$(-4, 1)$	$(2, 18)$	$(20, 18)$
3	$(-10, 9)$	$(14, 9)$	$(14, -9)$	$(-3, -15)$
4	$(10, -9)$	$(-14, -2)$	$(-8, 15)$	$(10, 15)$

Çözüm. $M = 2$. Kenarları eksenlere paralel olduğundan ACD 'de D 'deki açı diktir, ve

$$|AD| = 24, \quad |CD| = 18,$$

dolayısıyla $|AC| = 30$. Ayrıca

$$|AB|^2 = 24^2 + 7^2 = 625 = 25^2, \\ |BC|^2 = 6^2 + 17^2 = 325 = 5^2 \cdot 13.$$

O zaman ABC dik değildir. Ayrıca BC 'nin uzunluğu kesirli olmadığından ABC ve ACB açılarının hiçbirinin kosinüsü kesirli olamaz, ama

$$\cos BAC = \frac{(-24, 7) \cdot (-18, 24)}{25 \cdot 30} = \frac{(-24, 7) \cdot (-3, 4)}{25 \cdot 5} = \frac{72 + 28}{5 \cdot 25} = \frac{4}{5} \\ = \cos CAD.$$

Problem 3. Denklemleri

$$\mathbf{a} \cdot (x, y, z) = 0, \quad \mathbf{b} \cdot (x, y, z) = 3$$

olan düzlemlerinin kesişimi, bir ℓ doğrusudur.

a) ℓ 'de olan bir nokta ve ℓ 'ye paralel olan, sıfır olmayan bir vektör bulun;

b) ℓ 'de olan $\mathbf{c} + t \cdot \mathbf{d}$ noktalarını bulun.

M	$\mathbf{a}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{c}$	$\mathbf{d}$
1	$(-1, 0, 1)$	$(0, 1, 2)$	$(2, 0, 1)$	$(1, -1, 0)$
2	$(0, 1, 1)$	$(1, 0, 2)$	$(0, -2, 1)$	$(-1, -1, 0)$
3	$(0, 1, -1)$	$(1, 2, 0)$	$(0, 1, 2)$	$(-1, 0, 1)$
4	$(1, 0, -1)$	$(2, -1, 0)$	$(1, 0, 2)$	$(0, 1, 1)$

Çözüm. $M = 1$. ℓ doğrusu,

$$\begin{cases} -x + z = 0, \\ y + 2z = 3 \end{cases}$$

sisteminin çözüm kümesidir, ve $(0, 3, 0)$ bir çözümdür. Ayrıca ℓ ,

$$\frac{x}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{1}$$

sistemini sağlar, dolayısıyla ℓ , $(1, -2, 1)$ 'e paraleldir.

Başka bir yöntem vardır:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1, 2, -1).$$

Bu vektör, hem $\mathbf{a}$ 'ya hem de $\mathbf{b}$ 'ye dik olduğundan düzlemlerin her birine paraleldir.

Şimdi

$$(0, 3, 0) + s \cdot (1, -2, 1) = (2, 0, 1) + t \cdot (1, -1, 0)$$

denklemini çözmek isteriz. O zaman

$$\begin{cases} s = 2 + t, \\ 3 - 2s = -t, \\ s = 1, \end{cases}$$

dolayısıyla $(s, t) = (1, -1)$ ve istediğimiz nokta $(2, 0, 1) - (1, -1, 0)$, yani $(1, 1, 1)$.