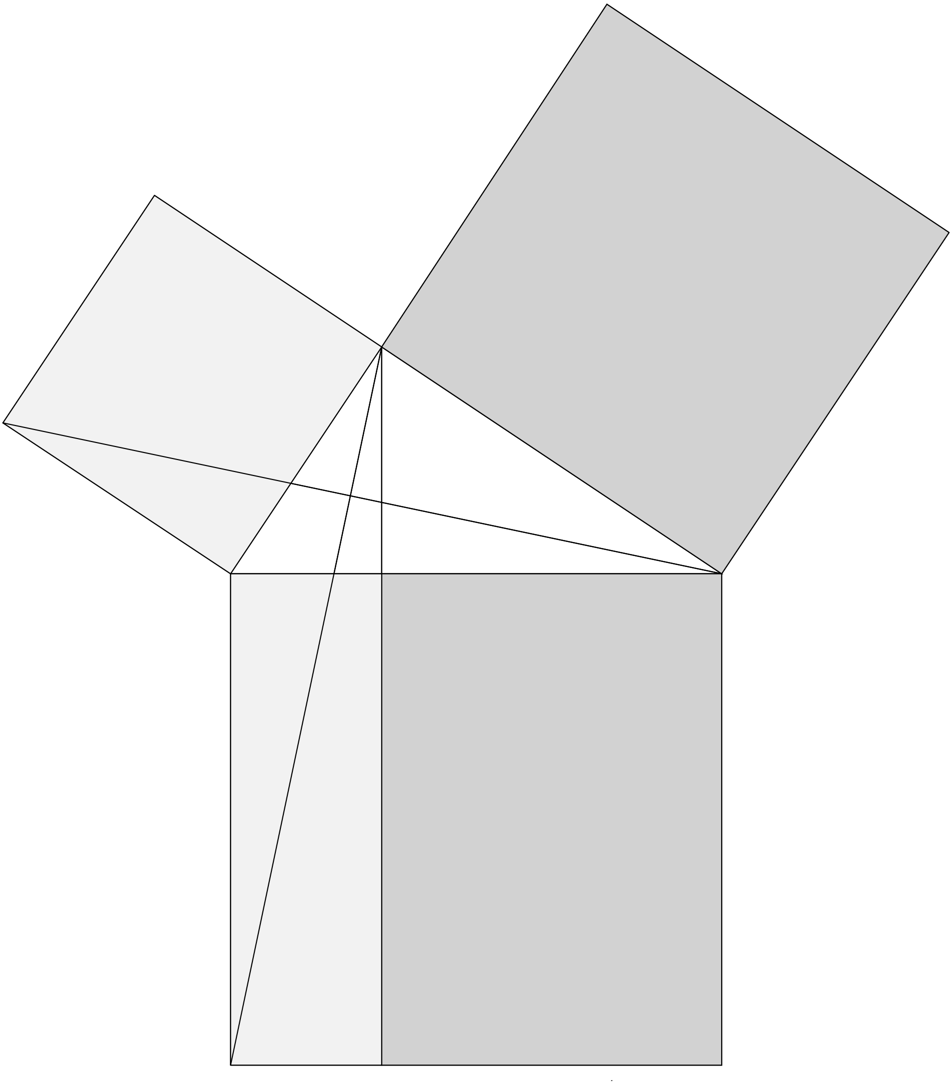
Öklid'in Elemanları

Türkçesi ve notlar
Ali Sinan Sertöz

8 Mayıs 2018 sürümü



Ali Sinan Sertöz
Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü
06800 Ankara

sertoz@bilkent.edu.tr
http://sertoz.bilkent.edu.tr

Öklid'in Elemanları içerik tablosu

Kitap	*I*	*II*	*III*	*IV*	*V*	*VI*	*VII*	*VIII*	*IX*	*X*	*XI*	*XII*	*XIII*	*Toplamlar*
Tanımlar	23	2	11	7	18	4	22	-	-	16	28	-	-	131
Önermeler	48	14	37	16	25	33	39	27	36	115	39	18	18	465
Belitler	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5
Ortak Kavramlar	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5

8 Mayıs 2018 sürümü

Bu kitap LaTeX kelime işlemcisi kullanılarak `amsbook` formatında dizilmiştir.

Şekiller Ti*k*Z ve tkz-euclide paketleri kullanılarak çizilmiştir.

İÇİNDEKİLER

Kitap I

1. Tanımlar

1 **Nokta**, büyüklüğü olmayandır.

2 **Çizgi**, eni olmayan uzunluktur.

3 Bir çizginin uçları noktalardır.

4 **Doğru**, üzerindeki noktalara göre eşit olarak yatan çizgidir.

5 **Yüzey**, yalnızca uzunluğu ve eni olandır.

6 Bir yüzeyin uçları çizgilerdir .

7 **Düzlem**, üzerindeki doğrulara göre eşit olarak yatan yüzeydir.

8 **Düzlem açısı**, aynı doğru üzerinde olmayan ve birbirine dokunan çizgilerin birbirine göre eğimidir.

9 Ve açıyı oluşturan çizgiler doğru ise açıya **düzkenar** denir.

10 Bir doğruya çizilen bir başka doğru iki komşu açıyı eşit kılıyorsa her iki açıya da **dik** denir ve bu düz çizgi, üzerine çizildiği düz çizgiye diktir denir.

11 Dik açıdan büyük olan açıya **geniş açı** denir.

12 Dik açıdan küçük olan açıya **dar açı** denir.

13 Herhangi bir şeyin ucuna **sınır** denir.

14 Bir sınır veya sınırlar arasında kalana **şekil** denir.

15 İçindeki bir noktadan, üzerindeki her noktaya çizilen doğruların birbirine eşit olduğu düzlem şekline **çember** denir.

16 Ve o noktaya da **çemberin merkezi** denir.

17 Çemberin merkezinden geçen ve her iki yönde de çemberin çevresi tarafından sınırlanan doğruya **çemberin çapı** denir, ve bu çeşit her doğru çemberi ikiye böler.

18 Çap ve onun kestiği çevre arasında kalan şekle **yarıçember** denir. Ve yarıçemberin merkezi çemberin merkeziyle aynıdır.

19 Doğrular tarafından sınırlanan şekillere **düzkenarlı şekiller** denir. Üç doğruyla sınırlananlara **üçgen**, dört doğruyla sınırlananlara **dörtgen**, ve çok doğruyla sınırlananlara **çokgen** denir.

20 Üç kenarlı şekillerden üç kenarı da birbirine eşit olanına **eşkenar üçgen**, yalnız iki kenarı eşit olanına **ikizkenar üçgen** ve tüm kenarları farklı olana **çeşitkenar üçgen** denir.

21 Ayrıca, üç kenarlı şekillerin bir dik açısı olanına **dik üçgen**, geniş açısı olanına **geniş açılı üçgen**, ve üç açısı da dar olanına **dar açılı üçgen** denir.

22 Dört kenarlılara gelince, kenarları birbirine eşit ve dik açılı olanına **kare**, dik açılı ama kenarları birbirine eşit olmayanına **dikdörtgen**, kenarları birbirine eşit ama dik açılı olmayanına **eşkenar dörtgen**, karşılıklı kenarları ve açıları eşit olan ama eşkenar ve dik açılı olmayanına **eğik dörtgen** denir. Ve bunların dışında kalan dört kenarlılara da **yamuk** densin.

23 **Paralel** doğrular aynı düzlemde olan ve iki yöne de istenildiği kadar uzatıldığında birbirlerini kesmeyen doğrulardır.

[Öklid'in doğru *ve* düzlem *tanımlarındaki ifadesinin nasıl yorumlanacağı binlerce yıldır tartışılan bir konudur. Kendi yorumlarını çıkarmayı okuyucunun hayal gücüne bırakıyorum.*

Öklid çember ve daire için aynı kelimeyi kullandığı için ben de bu ayırımın yapılmasını konunun akışına bırakacağım. Özellikle yarıçember *dendiğinde bazen yarım çember bazen yarım daire kastedilecek.*

Öklid eşkenar ve eğik dörtgen tanımlarını hiçbir yerde kullanmaz.

Paralel kavramını dörtgenleri sınıflandırdıktan sonra verdiği için paralelkenar tanımı burada yapılmaz. Ama ilerde de hiçbir yerde paralelkenar tanımlanmaz, okuyucunun bildiği varsayılır. Ayrıca Öklid hemen hemen her yerde paralelkenar dediğinde dikdörtgen ile çalışır.]

2. Belitler

Aşağıdakiler kabul edilsin:

1 Herhangi bir noktadan başka herhangi bir noktaya bir doğru çizilebilir.

2 Bir doğru istenildiği kadar yine bir doğru olacak şekilde uzatılabilir.

3 Herhangi bir merkez ve bir uzunluk verildiğinde bir çember çizilebilir.

4 Bütün dik açılar birbirine eşittir.

5 Eğer bir doğru iki doğruyu kestiğinde bu doğrunun aynı tarafındaki iç açılar iki dik açıdan küçükse, bu iki doğru o yönde uzatıldıklarında kesişir.

3. Ortak Kavramlar

1 Aynı şeye eşit olan şeyler birbirine de eşittir.

2 Eğer eşit olan şeylere eşit şeyler eklenirse, bütünler de eşittir.

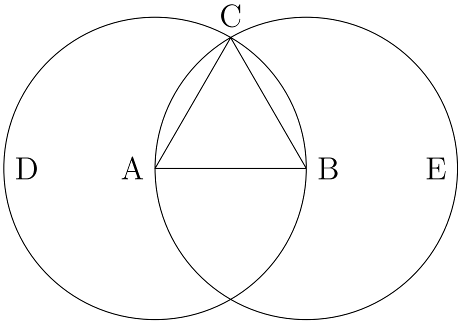
3 Eğer eşit şeylerden eşit şeyler çıkarılırsa, kalanlar da eşittir.

4 Birbiriyle örtüşen şeyler birbirine eşittir.

5 Bütün, parçalarından büyüktür.

4. Önermeler

1. Önerme:
Verilen bir doğru parçası üzerine eşkenar bir üçgen çizmenin yolu.



Verilen doğru parçası AB olsun.

Böylece AB doğru parçası üzerine eşkenar bir üçgen çizilmesi istenmektedir.

A merkezi ve AB uzunluğuyla BCD çemberi çizilsin; **[Bel. 3]**

yine, B merkezi ve AB uzunluğuyla ACE çemberi çizilsin; **[Bel. 3]**

ve çemberlerin birbirini kestiği C noktasından A, B noktalarına CA, CB doğruları çizilsin. **[Bel. 1]**

A noktası CDB çemberinin merkezi olduğu için AC, AB'ye eşittir. **[Tan. 15]**

Yine, B noktası CAE çemberinin merkezi olduğu için BC, BA'ya eşittir. **[Tan. 15]**

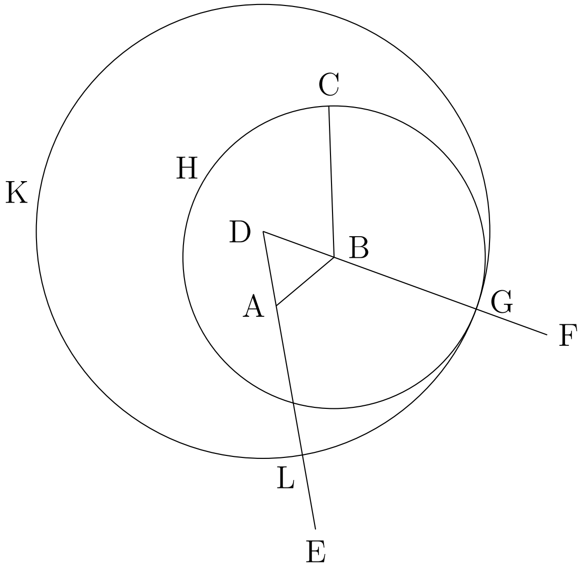
Ama CA'nın da AB'ye eşit olduğu kanıtlanmıştı; böylece CA ve CB doğrularının her biri AB'ye eşittir. Ve aynı şeye eşit olan şeyler birbirine de eşittir; **[Ort. 1]**

öyleyse CA, CB'ye de eşittir. Bundan dolayı üç doğru CA, AB, BC birbirine eşittir.

Öyleyse ABC üçgeni eşkenardır ve verilen AB doğru parçası üzerine çizilmiştir.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

2. Önerme:
Verilen bir noktadan başlamak üzere, verilen bir doğruya eşit bir doğru parçası çizmenin yolu.



Verilen nokta A, ve verilen doğru BC olsun.

Böylece A noktasına, verilen BC doğrusuna eşit bir doğru yerleştirilmesi isteniyor.

A noktasından B noktasına AB doğrusu çizilsin; **[Bel. 1]**

ve onun üzerine DAB eşkenar üçgeni çizilsin. **[I.1]**

DA, DB doğruları boyunca AE, BF doğruları uzatılsın; **[Bel. 2]**

B merkezi ve BC uzaklığıyla CGH çemberi çizilsin; **[Bel.3]**

ve yine, D merkezi ve DG uzaklığıyla GKL çemberi çizilsin. **[Bel. 3]**

Sonra, CGH çemberinin merkezi B olduğu için, BC eşittir BG olur. Yine, GKL çemberinin merkezi D olduğu için DL eşittir DG olur. Ve bunlardan DA, DB'ye eşittir; bu nedenle kalan AL, kalan BG'ye eşittir. **[Ort. 3]**

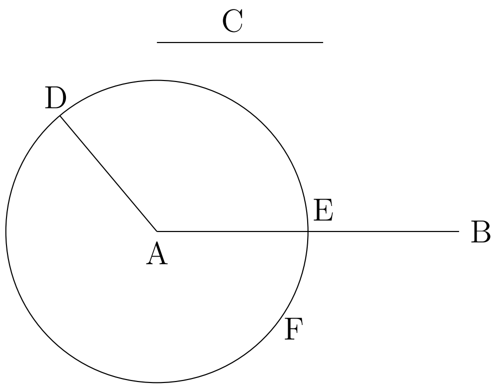
Ama BC'nin BG'ye eşit olduğu da kanıtlanmıştı; bu yüzden AL, BC doğrularının her biri BG'ye eşittir. Ve eşit şeylere eşit olan şeyler birbirine de eşittir; **[Ort. 1]**

bundan dolayı AL eşittir BC olur.

Böylece verilen A noktasında verilen BC doğrusuna eşit AL doğrusu çizilmiştir.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

3. Önerme:
Farklı uzunlukta iki doğru verildiğinde uzun olandan kısa olana eşit bir doğru çıkarmanın yolu.



Verilen farklı doğrular AB, C olsun, ve büyük olan AB olsun.

Böylece büyük olan AB den küçük olan C ye eşit bir doğru kesip çıkarılması isteniyor.

A noktasına, C doğrusuna eşit AD doğrusu yerleştirilsin. **[I.2]**

A merkezi ve AD uzunluğuyla DEF çemberi çizilsin. **[Bel. 3]**

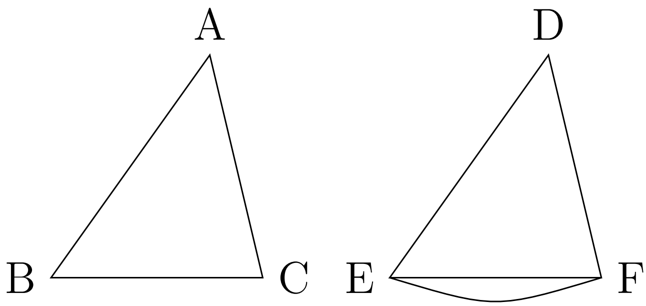
A noktası DEF çemberinin merkezi olduğu için AE eşittir AD olur. **[Tan. 15]**

Ama C de AD'ye eşittir. Bu yüzden AE, C doğrularının her biri AD'ye eşittir. Bu yüzden AE eşittir C olur. **[Ort. 1]**

Böylece, AB ve C doğruları verildiğinde, büyük olan AB'den küçük olan C'ye eşit AE kesilip çıkarılmıştır.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

4. Önerme:
Eğer iki üçgenin karşılıklı iki kenarı ve bu eşit kenarlar arasındaki açıları birbirine eşitse, üçüncü kenarları da birbirine eşit olur; üçgenler bu durumda eşittir ve kalan açılar da birbirine eşittir, yani eşit kenarların karşılarındaki açılar birbirine eşit olur.



Karşılıklı kenarları AB, AC, sırasıyla DE, DF'ye eşit olan üçgenler ABC, DEF olsun, yani AB, DE'ye ve AC, DF'ye, ve BAC açısı EDF açısına eşit olsun.

Diyorum ki, taban BC de taban EF'ye eşit olur, ABC üçgeni DEF üçgenine eşit olur, ve diğer açılar da karşılıklı olarak eşittir, yani eşit kenarları gören açılar olarak ABC açısı DEF açısına, ve ACB açısı DFE açısına eşittir.

Çünkü, ABC üçgeni DEF üçgeni üzerine yerleştirildiğinde, ve A noktası D noktasına kondurulduğunda, ve AB doğrusu da DE'nin üzerine konduğunda, AB, DE'ye eşit olduğundan B noktası E ile çakışır.

AB, DE ile çakıştığında AC doğrusu da DF ile çakışır çünkü BAC açısı EDF açısına eşittir.

AC, DF'ye eşit olduğundan, C noktası da F noktasıyla çakışacaktır. Ama B de E ile çakışmıştı.

Bundan dolayı BC tabanı EF tabanıyla çakışacaktır.

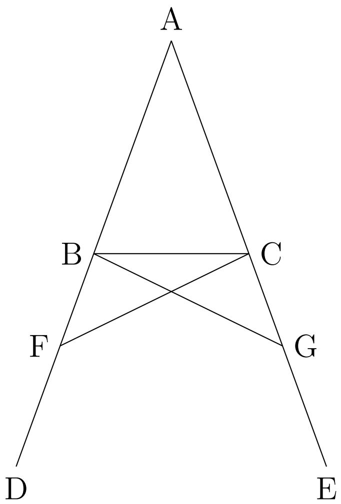
Çünkü eğer B noktası E ile, ve C noktası F ile çakıştığında, BC tabanı EF tabanıyla çakışmazsa, iki doğru bir alanı çevrelemiş olacaktır ki bu olamaz. Dolayısıyla BC, EF'le çakışacak ve ona eşit olacaktır. **[Ort. 4]**

Böylece ABC üçgeninin tamamı DEF üçgeniyle çakışacak ve ona eşit olacaktır.

Ve kalan açılar da çakışacak ve birbirine eşit olacaktır; ABC açısı DEF açısına ve ACB açısı DFE açısına.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

5. Önerme:
İkizkenar üçgenlerde taban açıları birbirine eşittir, ve eğer eşit olan kenarlar uzatılırsa tabanın altında kalan açılar da birbirine eşit olacaktır.



AB kenarı AC kenarına eşit olan bir ABC ikizkenar üçgeni olsun; AB ve AC doğrultusunda uzatılan doğrular BD, CE olsun. **[Bel. 2]**

Diyorum ki ABC açısı ACB açısına, ve CBD açısı BCE açısına eşittir.

Çünkü, BD üzerinde rastgele bir F noktası alınsın. Daha büyük olan AE'den, daha kısa olan AF'ye eşit AG çıkarılmış olsun. **[I.3]**

Ve FC, GB doğruları çizilsin. **[Bel. 1]**

O zaman, AF, AG'ye ve AB, AC'ye eşit olduğundan, FA, AC kenarları sırasıyla GA, AB kenarlarına eşit olur, ve FAG ortak açısını içerirler.

Bu nedenle FC tabanı GB tabanına, AFC üçgeni AGB üçgenine eşit olur, ve kalan açılar da karşılıklı olarak eşit olacaktır; yani eşit kenarların gördüğü açılar olarak ACF açısı ABG açısına, AFC açısı AGB açısına eşit olacaktır. **[I.4]**

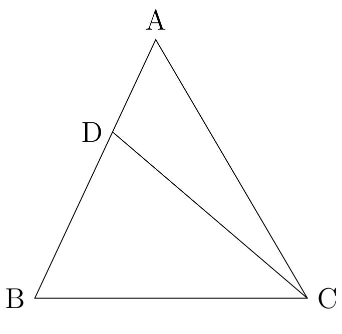
Ve AF, AG'ye eşit olduğundan ve bunların içinde AB, AC'ye eşit olduğundan, kalan BF kalan CG'ye eşittir. Ama FC'nin GB'ye eşit olduğu da kanıtlanmıştı. Bundan dolayı BF, FC kenarları sırasıyla CG, GB kenarlarına eşittir, ve BFC açısı CGB açısına eşittir ve bu arada BC tabanı ortaktır. Böylece BFC üçgeni de CGB üçgenine eşittir ve kalan açılar da karşılıklı eşit olacaktır; yani eşit kenarların gördüğü açılar.

Bu nedenle FBC açısı GCB açısına, BCF açısı da CBG açısına eşittir.

Benzer şekilde, ABG'nın açısının ACF açısına eşit olduğu kanıtlandığından, ve bunların içindeki CBG açısı BCF açısına eşit olduğundan, kalan açılar olarak ABC açısı ACB açısına eşittir, ve bunlar da ABC üçgeninin taban açılarıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

6. Önerme:
Eğer bir üçgende iki açı birbirine eşitse, bu eşit açıları gören kenarlar da birbirine eşittir.



ABC açısı ACB açısına eşit olan bir ABC üçgeni olsun.

Diyorum ki AB kenarı da AC kenarına eşittir.

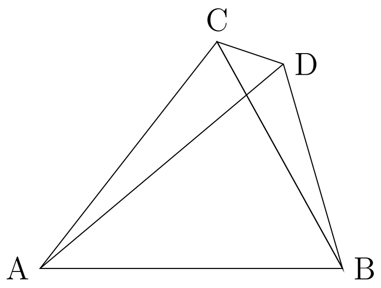
Çünkü, AB, AC'ye eşit değilse, biri diğerinden büyük olacaktır. Büyük olan AB olsun, ve büyük olan AB'den küçük olan AC'ye eşit DB çıkarılsın. DC doğrusu çizilsin. O zaman, DB, AC'ye eşit olduğundan ve BC ortak olduğundan, DB, BC kenarları sırasıyla AC, CB kenarlarına eşittir ve DBC açısı ACB açısına eşittir. Bu yüzden DC tabanı AB tabanına eşittir, ve küçük olan DBC üçgeni büyük olan ACB üçgenine eşit olacaktır ki bu saçmadır.

Bu yüzden AB, AC'den farklı olamaz, ona eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

7. Önerme:

Bir doğru parçasının iki ucundan aynı tarafa doğru iki doğru çizildiğinde bir noktada kesişiyorlarsa, bu doğruların çıktığı noktalardan çıkan, onlara eşit olun ve onların uzatıldığı tarafa uzatılıp da başka bir noktada kesişen başka iki doğru yoktur.



Çünkü eğer olsaydı, AB doğrusunun iki ucundan çizilmiş ve C noktasında birleşen iki doğru AC, CB verildiğinde, aynı AB doğrusu üzerinde aynı tarafa çizilmiş ve başka bir D noktasında birleşen iki başka doğru AD, DB verilsin, ve bunlar ilk doğrulara eşit olsunlar, öyle ki her biri kendisiyle aynı uca sahip doğruya eşit olsun, yani CA kendisiyle aynı A ucuna sahip DA'ya, ve CB kendisiyle aynı B ucuna sahip DB'ye eşit olsun. CD birleştirilsin.

O zaman, AC, AD'ye eşit olduğu için ACD açısı ADC açısına eşit olur. **[I.5]**

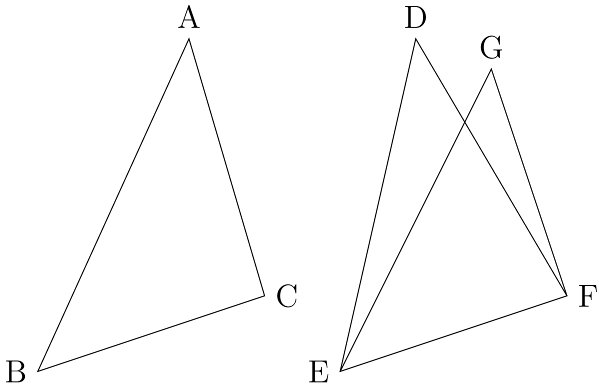
Öyleyse ADC açısı DCB açısından büyüktür. Bu durumda CDB açısı DCB açısından çok daha büyüktür.

Öte yandan, CB, DB'ye eşit olduğundan, CDB açısı da DCB açısına eşittir. Ama onun çok daha büyük olduğu kanıtlanmıştı. Bu olamaz.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

8. Önerme:

Eğer iki üçgenin karşılıklı iki kenarları birbirlerine eşitse ve üstelik tabanları da birbirine eşitse, o zaman bu üçgenlerin eşit kenarlar arasında kalan açıları da eşittir.



Verilen ABC ve DEF üçgenlerinde karşılıklı kenarlar AB, AC sırasıyla DE, DF kenarlarına eşit olsun, yani AB ile DE, ve AC ile DF eşit olsun. Ayrıca bu üçgenlerin tabanları BC ile EF de birbirine eşit olsun.

Diyorum ki BAC açısı da EDF açısına eşit olur.

Çünkü, eğer ABC üçgeni DEF üçgeni üzerine yerleştirilirse, ve B noktası E noktasına, ve BC doğrusu da EF doğrusuna yerleştirilirse, BC eşittir EF olduğundan C noktası F ile çakışır.

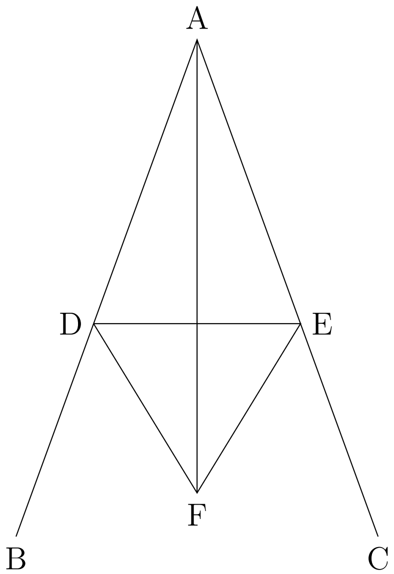
BC ile EF çakıştığından BA, AC de ED, DF ile çakışacaktır; çünkü eğer BC tabanı EF tabanıyla çakışır ve BA, AC kenarları ED, DF kenarlarıyla çakışmaz ama EG, GF olarak yanlarına düşerse, o zaman aynı doğrunun uçlarından çizilmiş ve bir noktada birleşmiş iki doğru verildiğinde o doğrunun uçlarından ve aynı tarafa doğru çizilmiş başka noktada birleşen ve ilk doğrulara sırasıyla eşit, yani her biri aynı ucu paylaştığı doğruya eşit, iki doğru çizilmiş olur.

Ama böyle doğrular çizilemez. **[I.7]**

O zaman BC tabanı EF tabanının üzerine yerleştirildiğinde BA, AC kenarlarının ED, DF kenarlarıyla çakışmaması mümkün değildir. Öyleyse çakışacaklar, ve BAC açısı da EDF açısıyla çakışacak ve ona eşit olacaktır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

9. Önerme:
Bir düzkenarlı açıyı ikiye bölmenin yolu.



Verilen düzkenarlı açı BAC olsun.

Bu açının ikiye bölünmesi isteniyor.

AB üzerinde rastgele bir D noktası seçilmiş olsun. AC üzerinde AD'ye eşit AE ayrılmış olsun. **[I.3]**

DE birleştirilsin ve DE üzerinde DEF eşkenar üçgeni çizilsin. AF birleştirilsin.

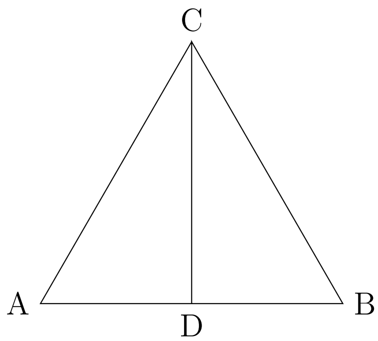
Diyorum ki BAC açısı AF doğrusu tarafından ikiye bölünmüştür.

Çünkü, AD, AE'ye eşit olduğundan ve AF ortak olduğundan, DA, AF kenarları sırasıyla EA, AF kenarlarına eşittir, ve DF tabanı EF tabanına eşittir. Bu durumda DAF açısı EAF açısına eşit olur. **[I.8]**

Böylece verilen düzkenarlı açı BAC, AF doğrusu tarafından ikiye bölünmüştür.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

10. Önerme:
Verilen bir sonlu doğruyu ikiye bölmenin yolu.



Verilen sonlu doğru AB olsun.

Bu sonlu AB doğrusunun ikiye bölünmesi isteniyor.

Bu doğrunun üzerine ABC eşkenar üçgeni çizilsin, **[I.1]**

ve ACB açısı CD doğrusuyla ikiye bölünsün. **[I.9]**

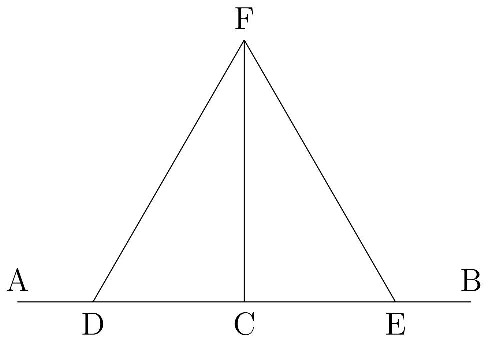
Diyorum ki AB doğrusu D noktasında ikiye bölünmüştür.

Çünkü, AC eşittir CB, ve CD ortak olduğundan, AC, CD kenarları sırasıyla BC, CD kenarlarına eşittir. Ve ACD açısı BCD açısına eşittir. Bu durumda AD tabanı BD tabanına eşit olur. **[I.4]**

Böylece verilen sonlu doğru AB, D noktasından ikiye bölünmüş olur.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

11. Önerme:
Bir doğruya üzerinde verilen bir noktadan dik bir doğru çizmenin yolu.



AB verilen doğru ve C onun üzerinde verilen nokta olsun.

Böylece C noktasından AB doğrusuyla dik açı yapacak bir doğru çizilmesi isteniyor.

AC üzerinde rastgele bir D noktası alınsın. CD'ye eşit olacak şekilde CE çizilsin. **[I.3]**

DE üzerine eşkenar FDE üçgeni çizilsin. **[I.1]**

Ve FC birleştirilsin.

Diyorum ki FC doğrusu AB doğrusuna C noktasında diktir.

Çünkü, DC eşittir CE, ve CF ortak olduğu için, DC, CF kenarları sırasıyla EC, CF kenarlarına eşittir. Ve DF tabanı FE tabanına eşittir. Bu yüzden DCF açısı ECF açısına eşittir. **[I.8]**

Ve bunlar komşu açılardır. Ama ne zaman bir doğruya çizilen bir doğru iki komşu açıyı birbirine eşit kılıyorsa, bu açıların her biri dik açıdır. **[Tan. 10]**

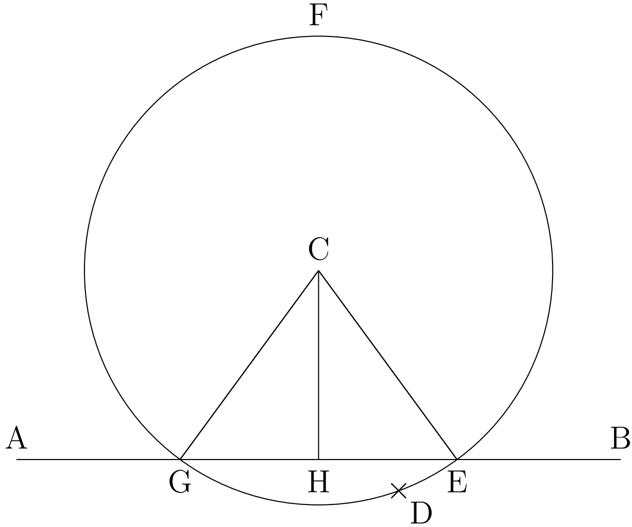
Bu nedenle DCF, FCE açılarının her biri diktir.

Böylece CF doğrusu AB doğrusuna C noktasında dik olacak şekilde çizilmiştir.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

12. Önerme:

Bir sonsuz doğruya üzerinde olmayan bir noktadan dik bir doğru çizmenin yolu.



$A B$ verilen sonsuz doğru olsun ve C de onun üzerinde olmayan bir nokta olsun.

O zaman verilen sonsuz $A B$ doğrusuna üzerinde olmayan C noktasından bir dik doğru çizilmesi isteniyor.

$A B$ doğrusunun öbür tarafında rastgele bir D noktası alınsın ve C merkezi ve $D C$ uzaklığıyla $E F G$ çemberi çizilsin. **[Bel. 3]**

$E G$ doğrusu H'de ikiye bölünsün ve $C G$, $C H$, $C E$ doğruları çizilsin. **[Bel. 1]**

Diyorum ki $C H$ doğrusu $A B$ sonsuz doğrusuna üzerinde olmayan C noktasından dik olarak çizilmiştir.

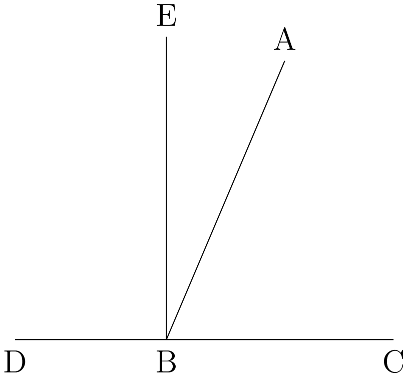
Çünkü, $G H$ eşittir $H E$ olduğu ve $H C$ ortak olduğu için, $G H$, $H C$ kenarları sırasıyla $E H$, $H C$ kenarlarına eşittir, ve $C G$ tabanı $C E$ tabanına eşittir. Bundan dolayı $C H G$ açısı $E H C$ açısına eşittir. **[I.8]**

Ve bunlar komşu açılardır. Ama ne zaman bir doğruya çizilen bir doğru iki komşu açıyı birbirine eşit kılıyorsa, bu açıların her biri dik açıdır, ve bu çizilen doğruya diğerine diktir denir. **[Tan. 10]**

Böylece verilen sonsuz $A B$ doğrusuna üzerinde olmayan C noktasından $C H$ dik olarak çizilmiştir. Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

13. Önerme:

Bir doğruya çizilen başka bir doğru eğer açı oluşturuyorsa ya iki dik açı oluşturur ya da iki dik açıya eşit açılar oluşturur.



AB doğrusu CD doğrusuyla CBA, ABD açılarını yapsın.

Diyorum ki CBA, ABD açıları ya iki dik açıdır ya da iki dik açıya eşittir.

Şimdi, eğer CBA açısı ABD açısına eşitse, bunlar dik açıdır. **[Tan. 10]**

Ama değilse, B noktasından CD'ye BE dikmesi çizilsin. **[I.11]**

Bu yüzden CBE, EBD açıları iki dik açıdır. O zaman, CBE açısı CBA, ABE açılarına eşit olduğu için, EBD açısı ikisine de eklensin. Bundan dolayı CBE, EBD açıları CBA, ABE, EBD açılarına eşittir. **[Ort. 2]**

Aynı şekilde, DBA açısı DBE, EBA açılarına eşit olduğundan, ABC açısı her ikisine de eklensin. Bundan dolayı DBA, ABC açıları DBE, EBA, ABC açılarına eşittir. **[Ort. 2]**

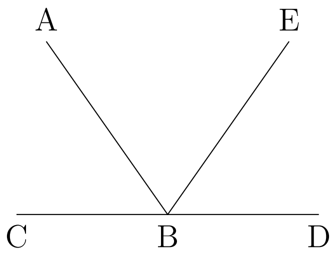
Ama CBE, EBD açılarının da aynı üç açıya eşit olduğu kanıtlanmıştı. Eşit şeylere eşit olan şeyler birbirine de eşittir. **[Ort. 1]**

Bu nedenle CBE, EBD açıları DBA, ABC açılarına da eşittir. Ama CBE, EBD açıları iki dik açıdır. Öyleyse DBA, ABC açıları da iki dik açıya eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

14. Önerme:

Eğer bir doğru parçasının üzerindeki bir noktadan, bu doğru parçasının aynı tarafında olmayacak şekilde çizilen iki doğrunun bu doğru parçasıyla oluşturdukları açılar iki dik açı ediyorsa, bu iki doğru aynı doğru üzerindedir.



AB doğrusunun üzerindeki B noktasından bu doğrunun aynı tarafında olmayacak şekilde çizilen BC ve BD doğrularının bu doğruyla yaptıkları komşu açılar ABC, ABD iki dik açıya eşit olsun.

Diyorum ki BD ve CB aynı doğru üzerindedir.

Çünkü, eğer BD, BC ile aynı doğru üzerinde değile, CB ile aynı doğrultuda BE doğrusu çizilsin. O zaman AB doğrusu CBE doğrusu üzerine çizilmiş olduğundan ABC, ABE açıları iki dik açıya eşittir. **[I.13]**

Ama ABC, ABD açıları da iki dik açıya eşittir. Bu nedenle CBA, ABE açıları CBA, ABD açılarına eşittir. **[Bel. 4 ve Ort. 1]**

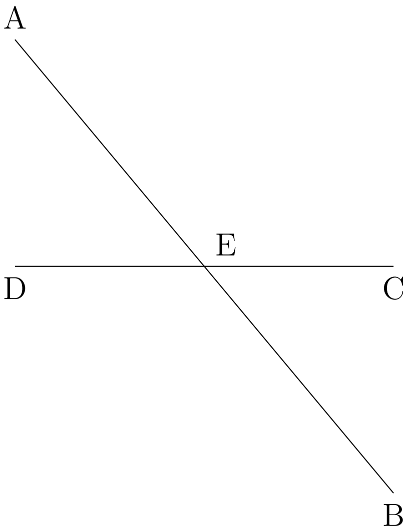
Her birinden CBA açısı çıkarılsın. O zaman kalan ABE açısı kalan ABD açısına eşit olur, **[Ort. 3]**

ki küçük olan büyük olana eşit oldu. Bu olamaz. Öyleyse BE, CB ile aynı doğru üzerinde değildir. Benzer şekilde kanıtlayabiliriz ki BD'den başka hiç bir doğru da BC ile aynı doğru üzerinde değildir.

Öyleyse CB, BD ile aynı doğru üzerindedir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

15. Önerme:
Kesişen iki doğrunun oluşturduğu ters köşe açıları eşittir.



AB ve CD doğruları E noktasında kesişsin.

Diyorum ki AEC açısı DEB açısına, ve CEB açısı AED açısına eşittir.

Çünkü, AE doğrusu CD doğrusuna, CEA, AED açılarını oluşturacak şekilde çizildiğinden, CEA, AED açılarını iki dik açıya eşittir. **[I.13]**

Aynı şekilde, DE doğrusu AB doğrusuna, AED, DEB açılarını oluşturacak şekilde çizildiğinden, AED, DEB açıları iki dik açıya eşittir. **[I.13]**

Ama CEA, AED açılarının da iki dik açıya eşit olduğu kanıtlanmıştı. Bu nedenle CEA, AED açıları AED, DEB açılarına eşittir. **[Bel. 4 ve Ort. 1]**

Her birinden AED açısı çıkarılsın. O zaman kalan CEA açısı kalan BED açısına eşit olur. **[Ort. 3]**

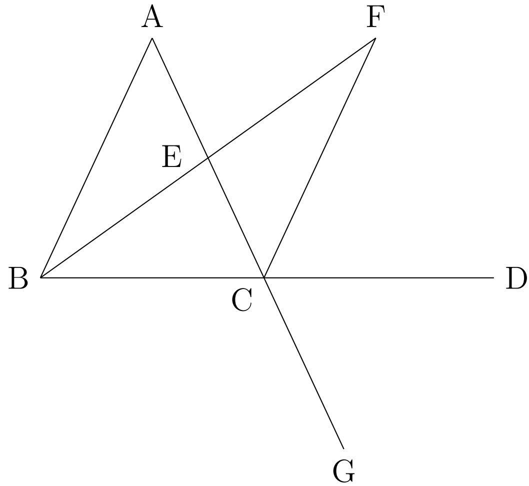
Benzer şekilde CEB, DEA açılarının da eşit olduğu gösterilebilir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

Doğal Sonuç: Buradan açıkça görülür ki, eğer iki doğru birbirini keserse, kesişme noktasındaki açıları dört dik açıya eşit kılarlar.

16. Önerme:

Bir üçgenin bir kenarı uzatıldığında oluşan dış açı karşı iç açıların ikisinden de büyüktür.



ABC üçgeninde bir BC kenarı D'ye kadar uzatılmış olsun.

Diyorum ki dış açı ACD karşı iç açılar CBA, BAC'nin her birinden büyüktür.

AC, E noktasından ikiye bölünsün, **[I.10]**

ve BE birleştirilip bir doğru boyunca F'ye kadar uzatılsın. EF doğrusu BE'ye eşit olsun, **[I.3]**

FC birleştirilsin, **[Bel. 1]**

AC doğrusu G'ye kadar uzatılsın. **[Bel. 2]**

O zaman, AE eşittir EC, ve BE eşittir EF olduğundan, AE, EB kenarları sırasıyla CE, EF kenarlarına eşittir, ve karşı açılar oldukları için AEB açısıyla FEC açısı eşittir. **[I.15]**

Bu nedenle AB tabanı FC tabanına eşittir, ve ABE üçgeni CFE üçgenine eşittir, diğer açılar da sırasıyla diğer açılara eşittir, yani eşit kenarların gördüğü açılar. **[I.4]**

Dolayısıyla BAE açısı ECF açısına eşittir. Ama ECD açısı ECF açısından büyüktür. **[Ort. 5]**

Bu nedenle ACD açısı BAE açısından büyüktür.

Benzer şekilde, eğer BC ikiye bölünürse, BCG açısının, yani ACD açısının, **[I.15]**

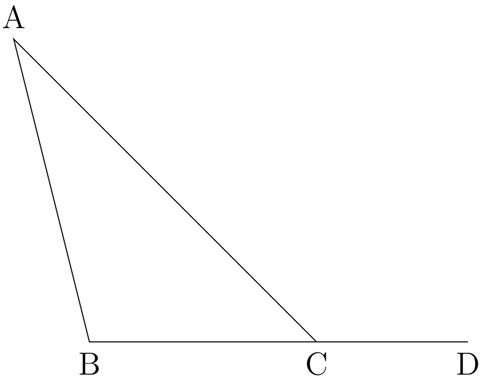
ABC açısından büyük olduğu gösterilebilir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

D

17. Önerme:

Bir üçgenin herhangi iki iç açısı iki dik açıdan küçüktür.



ABC bir üçgen olsun.

Diyorum ki ABC üçgeninin rastgele alınan iki iç açısı iki dik açıdan küçüktür.

Çünkü, BC doğrusu D'ye uzatılsın. **[Bel. 2]**

O zaman, ACD açısı ABC üçgeninin bir dış açısı olduğundan, karşı iç açı ABC'den büyüktür. **[I.16]**

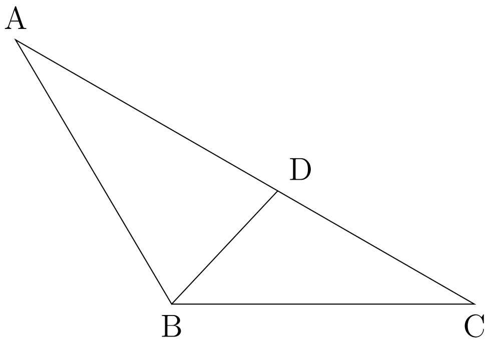
Her ikisine de ACB açısı eklensin. Bu durumda ACD, ACB açıları ABC, BCA açılarından büyük olur. Ama ACD, ACB açıları iki dik açıya eşittir. **[I.13]**

Bu nedenle ABC, BCA açıları iki dik açıdan küçüktür.

Benzer şekilde BAC, ACB açılarının, ve aynı nedenle CAB, ABC açılarının, iki dik açıdan küçük olduklarını kanıtlayabiliriz

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

18. Önerme:
Bir üçgende daha büyük kenar daha büyük açıyı görür.



ABC üçgeninde AC kenarı AB kenarından büyük olsun.

Diyorum ki ABC açısı da BCA açısından büyük olur.

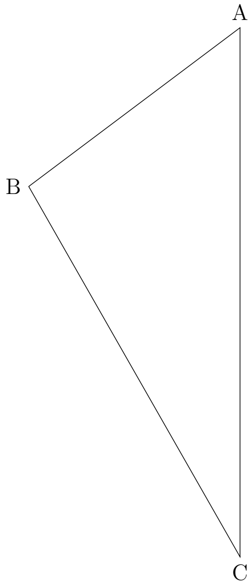
Çünkü, AC kenarı AB'den büyük olduğundan, AD, AB'ye eşit çizilsin, **[I.3]**

ve BD birleştirilsin. O zaman, ADB açısı BCD üçgeninin bir dış açısı olduğundan, karşı iç açı DCB'den büyüktür. **[I.16]**

Ama AB kenarı AD kenarına eşit olduğundan, ADB açısı ABD açısına eşittir. Bu nedenle ABD açısı ACB açısından da büyüktür. Öyleyse ABC açısı ACB açısından daha da büyüktür.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

19. Önerme:
Bir üçgende daha büyük açı daha büyük kenarı görür.



ABC üçgeninde ABC açısı BCA açısından büyük olsun.

Diyorum ki AC kenarı da AB kenarından büyüktür.

Çünkü, eğer öyle değilse, AC doğrusu AB'ye ya eşittir ya da ondan küçüktür.

Şimdi, AC, AB'ye eşit değil; öyle olsaydı ABC açısı da ACB açısına eşit olurdu, **[I.5]**

ama değil; demek ki AC, AB'ye eşit değil.

AC, AB'den küçük de değil; öyle olsaydı ABC açısı ACB açısından küçük olurdu, **[I.18]**

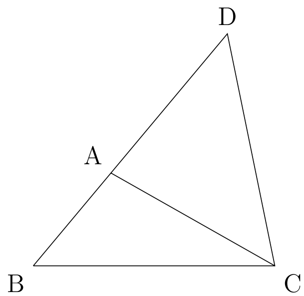
ama değil; demek ki AC, AB'den küçük değil. Ve eşit olmadığı da kanıtlanmıştı.

Öyleyse AC, AB'den büyüktür.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

20. Önerme:

Bir üçgende herhangi iki kenar birlikte diğer kenardan büyüktür.



ABC üçgeni verilmiş olsun.

Diyorum ki ABC üçgeninde herhangi iki kenar birlikte diğer kenardan büyüktür, yani

BA, AC birlikte BC'den büyük,
AB, BC birlikte AC'den büyük,
BC, CA birlikte AB'den büyük

olur.

Çünkü, BA doğrusu D noktasına uzatılsın, DA eşittir CA olsun, ve DC birleştirilsin.

O zaman, DA eşittir AC olduğundan, ADC açısı ACD açısına eşittir; **[I.5]**

bu yüzden BCD açısı ADC açısından büyüktür. **[Ort. 5]**

Ve DCB üçgeninde BCD açısı BDC açısından büyük olduğundan, ve daha büyük açı daha büyük kenarı gördüğünden, **[I.19]**

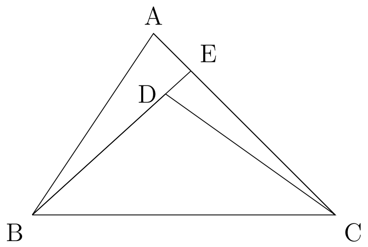
DB, BC'den büyüktür. Ama DA eşittir AC; öyleyse BA, AC birlikte BC'den büyüktür.

Benzer şekilde AB, BC'nin birlikte CA'dan, ve BC, CA'nın birlikte AB'den büyük olduğunu kanıtlayabiliriz.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

21. Önerme:

Bir üçgenin herhangi bir kenarının uçlarından üçgenin içinde birleşecek şekilde iki doğru çizilirse bu doğrular üçgenin diğer iki kenarından küçük olacak ama daha büyük bir açı içereceklerdir.



ABC üçgeninin bir BC kenarının uçları olan B ve C noktalarından üçgenin içinde kesişecek şekilde BD ve CD doğruları çizilmiş olsun.

Diyorum ki BD, CD kenarları üçgenin diğer iki kenarı olan BA, AC'de küçüktür, ama içerdikleri BDC açısı BAC açısından büyüktür.

Çünkü, E'ye kadar BD uzatılsın. Sonra, bir üçgende iki kenar birlikte diğer kenardan büyük olduğundan, **[I.20]**

ABE üçgenindeki iki kenar AB, AE birlikte BE'den büyüktür. İki tarafa EC eklensin; o zaman AB, AC kenarları birlikte BE, EC'den büyük olur.

Benzer şekilde, CED üçgeninde CE, ED kenarları CD'den büyüktür. İki tarafa DB eklensin; o zaman CE, EB kenarları CD, DB'den büyük olur.

Ama AB, AC'nin BE, EC'den büyük olduğu kanıtlanmıştı; o nedenle BA, AC kenarları BD, DC'den daha da büyük olur.

Öte yandan, bir üçgende bir dış açı karşı iç açıdan büyük olduğundan, **[I.16]**

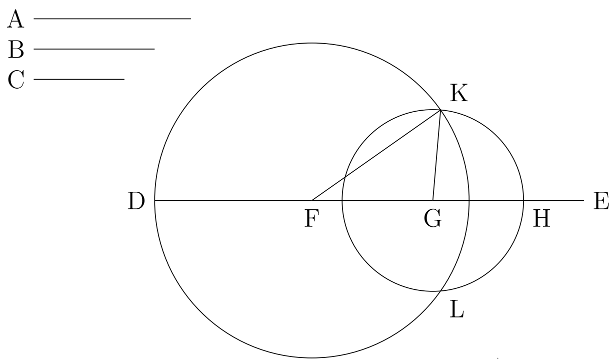
CDE üçgeninde BDC açısı CED açısından büyüktür. Aynı nedenden dolayı, bundan başka , ABE üçgeninde de CEB dış açısı BAC açısından büyüktür.

Ama BDC açısının CEB açısından büyük olduğu kanıtlanmıştı; demek ki BDC açısı BAC açısından daha da büyüktür.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

22. Önerme:

Kenarları, verilen üç doğru parçasına eşit olan bir üçgen çizmenin yolu: bu durumda bu üç doğru parçasının herhangi iki tanesinin diğerinden büyük olması gerekir. **[I.20]**



Verilen üç doğru A, B, C olsun, ve herhangi iki tanesi diğerinden büyük olsun, yani

A, B birlikte C'den,
A, C birlikte B'den,
B, C birlikte A'dan,

büyük olsun.

Böylece A, B ve C'ye eşit üç doğruyla bir üçgen çizilmesi isteniyor.

D noktasında biten ama E doğrultusunda sonsuz uzayan DE doğrusu olsun, ve A'ya eşit DF, B'ye eşit FG, ve C'ye eşit GH çizilsin. **[I.3]**

F merkezi ve FD uzunluğuyla DKL çemberi çizilsin; benzer şekilde G merkezi ve GH uzunluğuyla KLH çemberi çizilsin; ve KF, KG birleştirilsin.

Diyorum ki KFG üçgeni A, B, C doğrularına eşit doğrularla çizilmiştir.

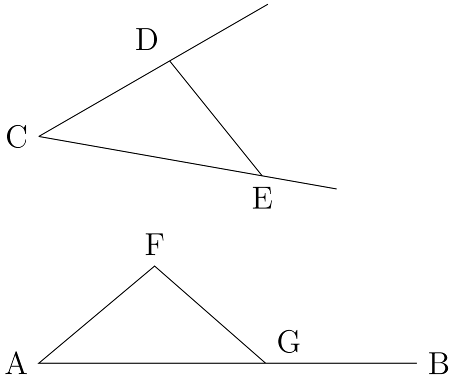
Çünkü, F noktası DKL çemberinin merkezi olduğundan, FD eşittir FK olur. Ama FD eşittir A; bu nedenle KF de A'ya eşittir.

Benzer şekilde, G noktası LKH çemberinin merkezi olduğundan, GH eşittir GK olur. Ama GH eşittir C; bu nedenle KG de C'ye eşit olur.

Ve FG de B'ye eşittir; bu nedenle verilen üç doğru A, B, C'ye eşit olan KF, FG, GK doğrularıyla KFG üçgeni çizilmiştir.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

23. Önerme:
Bir doğru üzerindeki bir noktadan verilen bir düzkenar açıya eşit bir düzkenar açı çizmenin yolu.



Verilen doğru AB olsun, üzerindeki nokta A ve verilen düzkenar açı da DCE olsun.

Böylece verilen AB doğrusunun üzerindeki A noktasında verilen DCE düzkenar açıya eşit bir düzkenar açı çizilmesi isteniyor.

CD, CE doğruları üzerinde D, E noktaları rastgele seçilsin; DE birleştirilsin, CD, DE, CE doğrularına eşit üç doğru kullanılarak AFG üçgeni, CD eşittir AF, CE eşittir AG ve DE eşittir FG olacak şekilde çizilsin. **[I.22]**

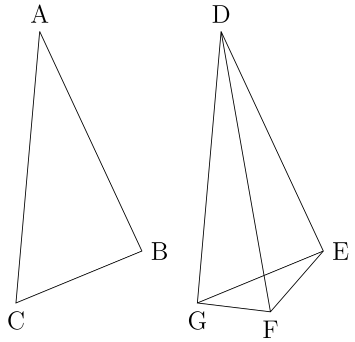
O zaman, DC, CE kenarları sırasıyla FA, AG kenarlarına eşit olduğundan, ve DE tabanı da FG tabanına eşit olduğundan, DCE açısı FAG açısına eşit olur. **[I.8]**

Böylece verilen AB doğrusuna üzerinde verilen A noktasından verilen DCE düzkenar açıya eşit FAG düzkenar açısı çizildi.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

24. Önerme:

Karşılıklı ikişer kenarları eşit olan üçgenlerden bu eşit kenarlar arasındaki açısı diğerininkinden büyük olan üçgenin tabanı da diğerinin tabanından büyüktür.



AB ve AC kenarları sırasıyla DE ve DF kenarlarına eşit olan ABC ve DEF üçgenleri verilmiş olsun, yani AB kenarı DE'ye, ve AC kenarı DF'ye eşit olsun, ve A köşesindeki açı D köşesindeki açıdan büyük olsun.

Diyorum ki BC tabanı da EF tabanından büyüktür.

Çünkü, BAC açısı EDF açısından büyük olduğundan, DE doğrusuna üzerindeki D noktasında, BAC açısına eşit EDG açısı çizilsin; **[I.23]**

DG kenarı AC ya da DF doğrularından birine eşit çizilsin, ve EG, FG birleştirilsin.

O zaman, AB eşittir DE, ve AC eşittir DG olduğundan, BA, AC kenarları sırasıyla ED, DG kenarlarına eşittir; ve BAC açısı EDG açısına eşittir. Bu nedenle BC tabanı EG tabanına eşittir. **[I.4]**

Öte yandan, DF eşittir DG olduğundan, DGF açısı da DFG açısına eşittir. **[I.5]**

Bu nedenle DFG açısı EGF açısından büyüktür. Demek ki EFG açısı EGF açısından daha da büyüktür.

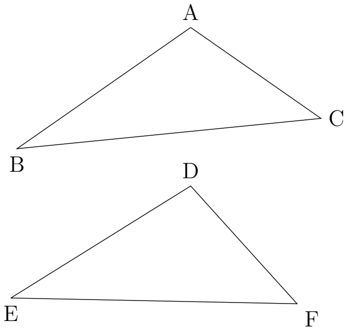
Ve, EFG üçgeninde EFG açısı EGF açısından büyük olduğundan, ve daha büyük açı daha büyük kenarı gördüğünden, **[I.19]**

EG kenarı EF kenarından büyüktür. Ama EG eşittir BC. Öyleyse BC de EF'den büyüktür.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

25. Önerme:

Eğer iki üçgenin karşılıklı ikişer kenarları eşit ama birinin tabanı diğerinkinden büyükse, eşit kenarları arasında kalan açısı da diğerinkinden büyük olacaktır.



AB ve AC kenarları sırasıyla DE ve DF kenarlarına eşit olan ABC ve DEF üçgenleri verilmiş olsun, yani AB kenarı DE'ye, ve AC kenarı DF'ye eşit olsun, ve BC tabanı EF tabanından büyük olsun.

Diyorum ki BAC açısı da EDF açısından büyüktür.

Çünkü öyle olmasaydı ya eşit olurdu ya da küçük.

Şimdi BAC açısı EDF açısına eşit değildir; öyle olsaydı BC tabanı EF tabanına eşit olurdu, **[I.4]**

ama değil; demek ki BAC açısı EDF açısına eşit değil.

Benzer şekilde BAC açısı EDF açısından küçük olamaz; çünkü o zaman BC tabanı EF tabanından küçük olurdu, **[I.24]**

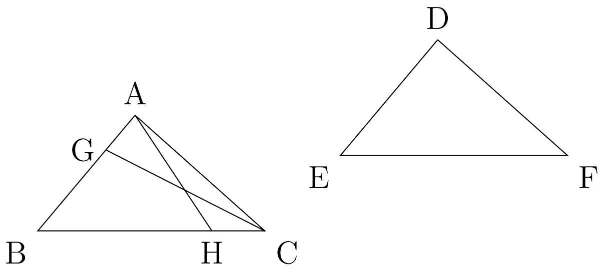
ama değil; demek ki BAC açısı EDF açısından küçük değil.

Ama eşit olmadığı da kanıtlanmıştı. Öyleyse BAC açısı EDF açısından büyüktür.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

26. Önerme:

Karşılıklı ikişer açıları aynı olan üçgenlerde eğer bu açılar arasında kalan kenarlar eşitse, ya da bu eşit açılardan birini gören kenar diğer üçgendeki eşit açılardan birini gören kenara eşitse, bu üçgenlerde diğer kenarlar da eşit olur ve birinin kalan açısı öbürünün kalan açısına eşit olur.



ABC ve BCA açıları sırasıyla DEF ve EFD açılarına eşit olan ABC ve DEF üçgenleri verilmiş olsun, yani ABC açısı DEF açısına, ve BCA açısı EFD açısına eşit olsun; ve üçgenlerin birer kenarları karşılıklı eşit olsun, önce eşit açıları birleştiren kenarlar, yani BC kenarı EF kenarına eşit olsun.

Diyorum ki üçgenlerin diğer kenarları da birbirine sırasıyla eşit our, yani AB kenarı DE kenarına, ve AC kenarı DF kenarına eşit olur, ve BAC açısı EDF açısına eşit olur.

Çünkü eğer AB ile DE eşit değilse, biri büyüktür.

Büyük olan AB olsun, ve BG, DE'ye eşit çizilsin, GC birleştirilsin.

O zaman, BG, DE'ye ve BC, EF'ye eşit olduğundan, GB, BC kenarları sırasıyla DE, EF kenarlarına eşitir; ve GBC açısı DEF açısına eşittir; bu nedenle GC tabanı DF tabanına, ve GBC üçgeni DEF üçgenine eşittir. Bu durumda kalan açılar da birbirine eşit olacaktır, yani eşit kenarları gören açılar. **[I.4]**

Öyleyse GCB açısı DFE açısına eşittir, ama DFE açısının BCA açısına eşit olduğu varsayılmıştı; öyleyse BCG açısı BCA açısına eşittir, küçük olan büyük olana: bu olamaz.

Bu durumda AB, DE'den farklı olamaz, öyleyse ona eşittir.

Ama BC de EF'ye eşittir; öyleyse AB, BC kenarları sırasıyla DE, EF kenarlarına eşittir, ve ABC açısı DEF açısına eşittir; öyleyse AC tabanı DF tabanına eşittir, ve kalan BAC açısı kalan EDF açısına eşittir. **[I.4]**

Benzer şekilde, eşit açıları gören karşılıklı iki kenar eşit olsun, örneğin AB kenarı DE kenarına eşit olsun.

Diyorum ki diğer kenarlar da birbirine eşit olur, yani AC kenarı DF kenarına, ve BC kenarı EF kenarına eşit olur, ve dahası kalan diğer açı BAC diğer kalan açı EDF açısına eşittir.

Çünkü eğer BC ile EF eşit değilse, biri büyüktür.

Mümkünse büyük olan BC olsun, ve BH, EF'ye eşit olsun, AH birleştirilsin.

O zaman, BH, EF'ye ve AB, DE'ye eşit olduğundan, AB, BH kenarları sırasıyla DE, EF kenarlarına eşittir, ve aralarındaki açılar eşittir; öyleyse AH tabanı DF tabanına eşittir ve ABH üçgeni DEF üçgenine eşittir, ve kalan açılar kalan açılara eşit olacaktır, yani eşit kenarları gören açılar eşit olacaktır. **[I.4]**

Öyleyse BHA açısı EFD açısına eşittir.

Ama EFD açısı BCA açısına eşittir; bu durumda AHC üçgeninde, BHA dış açısı BCA karşı iç açıya eşittir ki bu olamaz. **[I.16]**

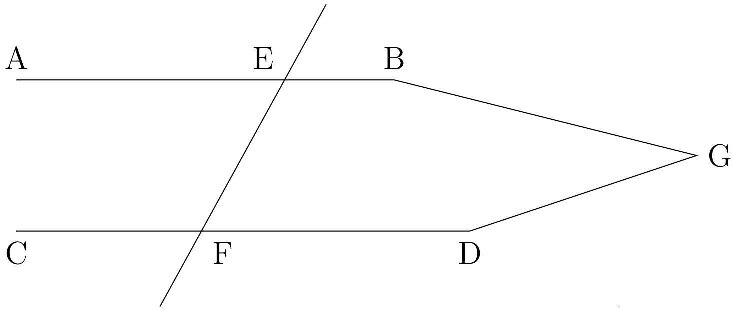
Bu durumda BC, EF'den farklı olamaz, öyleyse ona eşittir.

Ama AB aynı zamanda DE'ye de eşittir; öyleyse AB, BC kenarları sırasıyla DE, EF kenarlarına eşittir, ve aralarındaki açılar eşittir. Öyleyse AC tabanı DF tabanına eşittir ve ABC üçgeni DEF üçgenine eşittir, ve kalan BAC açısı kalan EDF açısına eşittir. **[I.4]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

27. Önerme:

Eğer bir doğru, iki doğruyu kestiğinde oluşan ters iç açılar eşitse, o iki doğru paraleldir.



EF doğrusu AB ve CD doğrularını AEF ve EFD açılarını eşit kılacak şekilde kessin.

Diyorum ki AB doğrusu CD doğrusuna paraleldir.

Çünkü değilse, AB, CD doğruları B, D ya da A, C yönünde uzatıldıklarında kesişeceklerdir.

B, D yönünde uzatılmış ve G noktasında kesişmiş olsunlar.

O zaman GEF üçgeninde AEF dış açısı EFG karşı iç açısına eşit olur ki bu olamaz. **[I.16]**

Bu nedenle AB, CD doğruları B, D yönünde uzatıldığında kesişmezler.

Benzer şekilde A, C yönünde uzatıldıklarında da kesişmedikleri kanıtlanabilir.

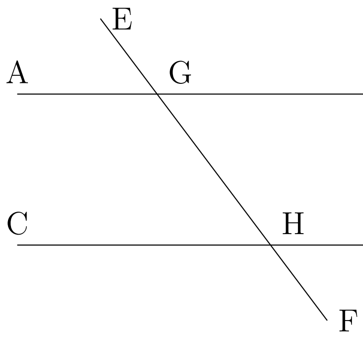
Ama hangi yönde uzatılırsa uzatılsın kesişmeyen doğrular paraleldir; **[Tan. 23]**

öyleyse AB doğrusu CD doğrusuna paraleldir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

28. Önerme:

Eğer bir doğru, iki doğruyu kestiğinde biriyle yaptığı dış açı diğeriyle aynı tarafta yaptığı karşı iç açıya eşitse, ya da aynı taraftaki iç açılar iki dik açıya eşitse, o iki doğru paraleldir.



EF doğrusu AB ve CD doğrularını kestiğinde EGB dış açısıyla GHD iç açıları eşit olsun, ya da aynı taraftaki BGH ve GHD açıları iki dik açıya eşit olsun.

Diyorum ki AB doğrusu CD doğrusuna paraleldir.

Çünkü EGB açısı GHD açısına eşit olduğundan, ve bu arada EGB açısı AGH açısına eşit olduğundan, **[I.15]**

AGH açısı GHD açısına eşittir, ve bunlar ters iç açılardır. Öyleyse AB doğrusu CD doğrusuna paraleldir. **[I.27]**

Yine, BGH, GHD açıları iki dik açıya eşit olduğundan, ve AGH, BGH açıları da iki dik açıya eşit olduğundan, **[I.13]**

AGH, BGH açıları BGH, GHD açılarına eşittir.

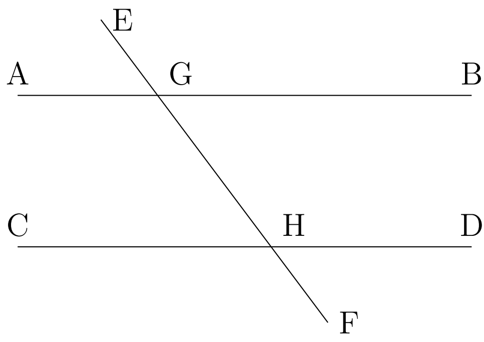
BGH açısı her iki taraftan da çıkarılsın; bu durumda kalan AGH açısı kalan GHD açısına eşittir, ve bunlar da ters iç açılardır.

Öyleyse AB doğrusu CD doğrusuna paraleldir. **[I.27]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

29. Önerme:

Eğer iki doğru paralelse bunları kesen bir doğrunun oluşturduğu ters iç açılar eşittir, dış açı karşı iç açıya eşittir, ve aynı taraftaki iç açılar iki dik açıya eşittir.



AB, CD paralel doğrularını EF doğrusu kessin.

Diyorum ki ters iç açılar AGH ve GHD eşittir, dış açı EGB ve karşı iç açı GHD eşittir, ve aynı taraftaki iç açılar yani BGH, GHD, iki dik açıya eşittir.

Çünkü, eğer AGH açısı GHD açısından farklıysa, bunlardan biri büyüktür.

AGH açısı büyük olsun.

Her ikisine de BGH açısı eklensin. Bu durumda AGH, BGH açıları BGH, GHD açılarından büyük olur.

Ama AGH, BGH açıları iki dik açıya eşittir. **[I.13]**

öyleyse BGH, GHD açıları iki dik açıdan küçüktür.

Ama iki dik açıdan küçük açılar yönünde uzatılan doğrular kesişir; **[Bel. 5]**

demek ki AB, BC uzatıldıklarında kesişecekler; ama bunlar kesişmez çünkü paraleldirler.

Bu yüzden AGH açısı GHD açısından farklı değildir, öyleyse eşittir.

Yine, AGH açısı EGB açısına eşittir; **[I.15]**

öyleyse EGB açısı da GHD açısına eşittir. **[Ort. 1]**

BGH açısı her ikisine de eklensin. bu durumda EGB, BGH açıları BGH, GHD açılarına eşit olur. **[Ort. 2]**

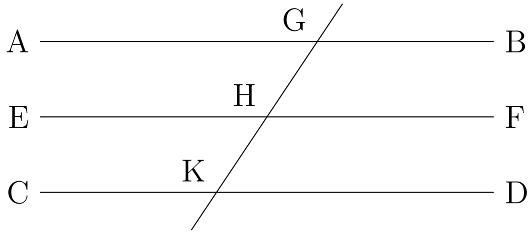
Ama EGB, BGH açıları iki dik açıya eşittir. **[I.13]**

Bu durumda BGH, GHD açıları da iki dik açıya eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

30. Önerme:

Aynı doğruya paralel olan doğrular birbirlerine de paraleldir.



AB ve CD doğrularının her biri EF doğrusuna paralel olsun.

Diyorum ki AB doğrusu CD doğrusuna da paraleldir.

Çünkü, GK doğrusu bunları kessin; o zaman GK doğrusu paralel AB, EF doğrularını kestiği için AGK açısı GHF açısına eşittir. **[I.29]**

Yine, GK doğrusu EF, CD paralel doğrularını kestiği için GHF açısı GKD açısına eşittir. **[I.29]**

Ama AGK açısının da GHF açısına eşit olduğu kanıtlanmıştı; bu durumda AGK açısı GKD açısına da eşittir, **[Ort. 1]**

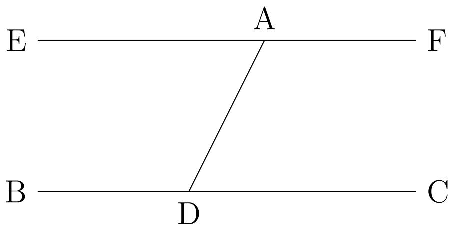
ve bunlar ters iç açılardır.

Öyleyse AB doğrusu CD doğrusuna paraleldir. **[I.27]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

31. Önerme:

Verilen bir noktadan verilen bir doğruya paralel bir doğru çizmenin yolu.



Verilen nokta A ve verilen doğru BC olsun.

Böylece A noktasından BC doğrusuna paralel bir doğru çizilmesi istenmekte.

BC üzerinde rastgele bir D noktası alınsın, ve AD birleştirilsin. DA doğrusuna A noktasında ADC açısına eşit DAE açısı çizilsin, **[I.23]**

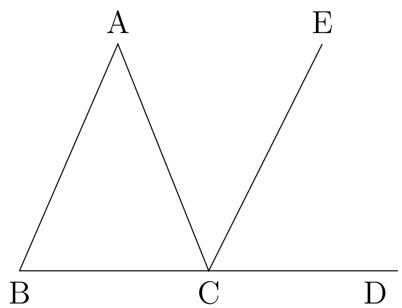
ve EA doğrultusunda AF doğrusu çizilsin.

O zaman, BC, EF doğrularını kesen AD doğrusu EAD, ADC ters iç açılarını eşit yaptığından, EAF doğrusu BC'ye paraleldir. **[I.27]**

Böylece verilen A noktasından verilen BC doğrusuna paralel EAF doğrusu çizilmiş oldu.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

32. Önerme:
Bir üçgende kenarlardan biri uzatılırsa, dış açı karşı iki iç açının toplamına eşittir, ve üçgenin iç açıları iki dik açıya eşittir.



ABC bir üçgen olsun, ve kenarlardan biri, BC, D noktasına kadar uzatılmış olsun.

Diyorum ki dış açı ACD, iki karşı iç açı CAB, ABC'ye eşittir, ve üç iç açı ABC, BCA, CAB iki dik açıya eşittir.

Çünkü, C noktasından AB'ye paralel CE çizilsin; **[I.31]**

o zaman, AB, CE'ye paralel olduğundan ve AC bunları kestiğinden, ters iç açılar BAC, ACE birbirine eşittir. **[I.29]**

Benzer şekilde, AB, CE'ye paralel olduğundan ve BD doğrusu bunları kestiğinden, dış açı ECD karşı iç açı ABC'ye eşittir. **[I.29]**

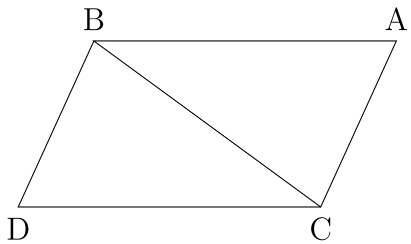
Ama ACE açısının da BAC açısına eşit olduğu kanıtlanmıştı; öyleyse ACD açısının tamamı iki karşı iç açı BAC, ABC'ye eşittir.

Her iki tarafa ACB açısı eklensin; o durumda ACD, ACB açıları ABC, BCA, CAB açılarına eşittir. Ama ACD, ACB açıları iki dik açıya eşittir. **[I.13]**

Bu nedenle ABC, BCA, CAB açıları iki dik açıya eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

33. Önerme:
Eşit ve paralel doğruları aynı yönlerde birleştiren doğrular da eşit ve paraleldir.



AB ve CD doğruları eşit ve paralel olsun, AC ve BD doğruları da bunların aynı taraftaki uçlarını birleştiren doğrular olsun.

Diyorum ki AC, BD eşit ve paraleldir.

BC birleştirilsin. O zaman, AB, CD'ye paralel olduğundan, ve BC bunları kestiğinden, ters iç açılar ABC, BCD birbirine eşittir. **[I.29]**

Ve, AB, CD'ye eşit olduğundan ve BC ortak olduğundan, AB, BC kenarları sırasıyla DC, CB kenarlarına, ve ABC açısı BCD açısına eşittir; bu durumda AC tabanı BD tabanına eşittir, ve ABC üçgeni DCB üçgenine eşittir, ve kalan açılar da sırasıyla kalan açılara eşit olacaktır, yani eşit kenarların gördüğü açılar. **[I.4]**

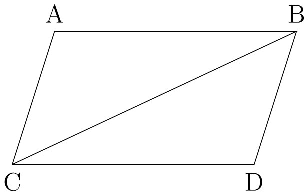
Öyleyse ACB açısı CBD açısına eşittir.

Ama AC, BD doğrularını kesen BC doğrusu ters iç açıları eşit yaptığından, AC doğrusu BD doğrsuna paraleldir. Ve eşit oldukları da kanıtlanmıştı.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

34. Önerme:

Bir paralelkenarda karşılıklı kenarlar ve açılar eşittir, ve paralelkenarın köşegeni alanını ikiye böler.



$ABCD$ bir paralelkenar ve BC onun bir köşegeni olsun.

Diyorum ki $ABCD$ paralelkenarın karşılıklı kenarları ve açıları eşittir, ve BC köşegeni paralelkenarı ikiye böler.

Çünkü, AB, CD'ye paralel olduğundan ve BC onları kestiğinden, ters iç açılar ABC, BCD birbirine eşittir. **[I.29]**

Benzer şekilde, AC, BD'ye paralel olduğundan ve BC onları kestiğinden, ters iç açılar ACB, CBD birbirine eşittir. **[I.29]**

Bu durumda ABC, DCB üçgenlerinde ABC, BCA açıları sırasıyla DCB, CBD açılarına eşittir, ve bir kenar bir kenara eşittir, yani eşit açıları birleştiren ve ortak olan BC; öyleyse kalan kenarlar da sırasıyla kalan kenarlara eşit olacaktır, ve kalan açı da kalan açıya eşit olacaktır. **[I.26]**

Bu yüzden AB eşittir CD, ve AC eşittir BD olur ve hatta BAC açısı CDB açısına eşit olur.

Ve ABC açısı BCD açısına, ve CBD açısı ACB açısına eşit olduğundan, ABD açısı ACD açısına eşit olur. **[Ort. 2]**

Ve BAC açısının da CDB açısına eşit olduğu kanıtlanmıştı.

Öyleyse paralelkenarlarda karşı kenarlar ve karşı açılar eşittir.

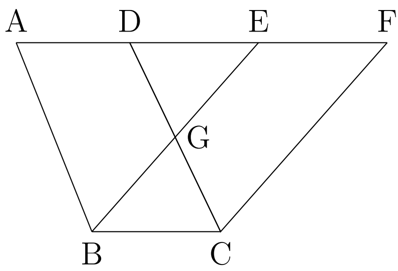
Sonra diyorum ki köşegen alanı ikiye böler.

Çünkü AB, CD'ye eşit, ve BC ortak olduğundan, AB, BC kenarları sırasıyla DC, CB kenarlarına eşittir, ABC açısı BCD açısına eşittir, öyleyse AC tabanı DB tabanına eşittir, ve ABC üçgeni DCB üçgenine eşittir. **[I.4]**

Bu nedenle BC köşegeni $ACDB$ paralelkenarını ikiye böler.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

35. Önerme:
Aynı taban üzerinde ve aynı paraleller arasında olan paralelkenarlar birbirine eşittir.



$ABCD$, $EBCF$, aynı BC tabanı üzerinde ve aynı AF, BC paralelleri arasında olan iki paralelkenar olsun.

Diyorum ki $ABCD$ paralelkenarı $EBCF$ paralelkenarına eşittir.

Çünkü, $ABCD$ paralelkenar olduğundan AD eşittir BC olur. **[I.34]**

Aynı nedenle EF, BC'ye eşittir, böylece AD eşittir EF olur; **[Ort. 1]**

bu durumda AE'nin tümü DF'nin tümüne eşit olur. **[Ort. 2]**

Ama AB de DC'ye eşittir; bu durumda EA, AB kenarları sırasıyla FD, DC kenarlarına eşittir, ve FDC dış açısı EAB karşı iç açısına eşittir; **[I.29]**

Öyleyse EB tabanı FC tabanına eşittir, ve EAB üçgeni FDC üçgenine eşittir. **[I.4]**

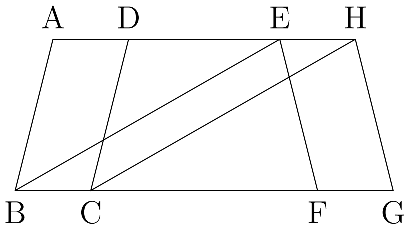
Her ikisinden DGE çıkarılsın; o zaman kalan $ABGD$ yamuğu kalan $EGCF$ yamuğuna eşittir. **[Ort. 3]**

Her ikisine GBC üçgeni eklensin; o zaman $ABCD$ paralelkenarın tümü $EBCF$ paralelkenarın tümüne eşit olur. **[Ort. 2]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

36. Önerme:

Eşit tabanlar üzerinde ve aynı paraleller arasında olan paralelkenarlar birbirine eşittir.



$ABCD$, $EFGH$, eşit BC, FG tabanları üzerinde ve aynı AH, BG paralelleri arasında olan paralelkenarlar olsun.

Diyorum ki $ABCD$ paralelkenarı $EBCF$'ye eşittir.

Çünkü BE, CH birleştirilsin. Sonra FG, EH'ye eşitken BC, FG'ye eşit olduğundan, BC de EH'ye eşittir. **[Ort. 1]**

Ama bunlar paraleldir de. Ve EB, HC onları birleştirir; ama eşit ve paralel doğruları aynı yönlerde birleştiren doğrular da eşit ve paraleldir. **[I.33]**

Öyleyse $EBCH$ paralelkenardır. **[I.34]**

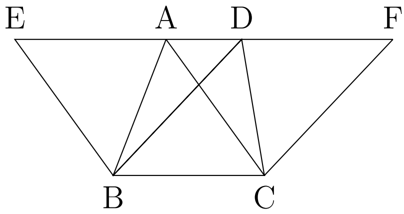
Ve aynı BC tabanı üzerinde ve aynı BC, AH paralelleri arasında olduğundan $ABCD$'ye eşittir. **[I.35]**

Aynı nedenle $EFGH$ de aynı $EBCH$'ye eşittir. **[I.35]**

Bu nedenle $ABCD$ paralelkenarı $EFGH$'ye eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

37. Önerme:
Aynı taban üzerinde ve aynı paraleller arasında olan üçgenler birbirine eşittir.



ABC, DBC, aynı BC tabanı üzerinde ve aynı AD, BC paralelleri arasında olan üçgenler olsun.

Diyorum ki ABC üçgeni DBC üçgenine eşittir.

AD her iki yönde E, F'ye uzatılsın; B'den CA'ya paralel BE çizilsin, **[I.31]**

ve C'den BD'ye paralel CF çizilsin. **[I.31]**

O zaman $EBCA$, $DBCF$ şekillerinin herbiri paralelkenardır ve eşittirler, çünkü aynı BC tabanı üzerinde ve aynı BC, EF paralelleri arasındalar. **[I.35]**

Ayrıca ABC üçgeni $EBCA$ paralelkenarın yarısıdır çünkü AB köşegeni paralelkenarı ikiye böler. **[I.34]**

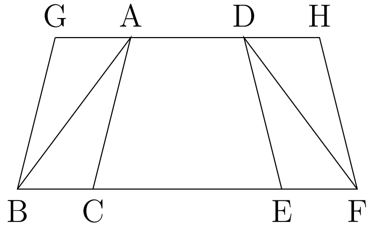
Ve DBC üçgeni $DBCF$ paralelkenarın yarısıdır çünkü DC köşegeni paralelkenarı ikiye böler. **[I.34]**

Ama eşit şeylerin yarıları birbirine eşittir.

Bu yüzden ABC üçgeni DBC üçgenine eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

38. Önerme:
Eşit tabanlar üzerinde ve aynı paraleller arasında olan üçgenler birbirine eşittir.



ABC, DEF, eşit BC, EF tabanları üzerinde ve aynı BF, AD paralelleri arasında olan üçgenler olsun.

Diyorum ki ABC üçgeni DEF üçgenine eşittir.

Çünkü AD her iki yönde G, H'ye uzatılsın; B'den CA'ya paralel BG çizilsin, **[I.31]**

ve F'den DE'ye paralel FH çizilsin.

O zaman $GBCA$, $DEFH$ şekillerinin her biri paralelkenardır; ve $GBCA$ $DEFH$'ye eşittir çünkü eşit BC, EF tabanları üzerinde ve aynı BF, GH paralelleri arasındalar. **[I.36]**

Ayrıca ABC üçgeni $GBCA$ paralelkenarın yarısıdır çünkü AB köşegeni paralelkenarı ikiye böler. **[I.34]**

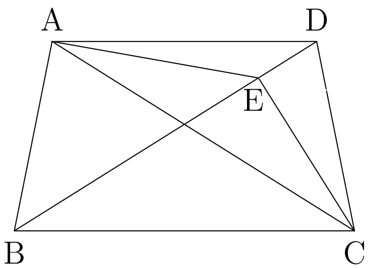
Ve FED üçgeni $DEFH$ paralelkenarın yarısıdır çünkü DF köşegeni paralelkenarı ikiye böler. **[I.34]**

Ama eşit şeylerin yarıları birbirine eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

39. Önerme:

Aynı tabanın üzerinde ve aynı tarafında olan eşit üçgenler aynı paralellerin arasındadır.



ABC, DBC aynı BC tabanı üzerinde ve onun aynı tarafında olan iki eşit üçgen olsun.

Ve AD birleştirilsin; diyorum ki AD, BC'ye paraleldir.

Çünkü değilse, A noktasından BC'ye paralel AE çizilsin, **[I.31]**

ve EC birleştirilsin. Bu durumda ABC üçgeni EBC üçgenine eşittir, çünkü aynı BC tabanı üzerinde ve aynı paraleller arasında. **[I.37]**

Ama ABC, DBC'ye eşittir; bu durumda DBC de EBC'ye eşittir, **[Ort. 1]** yani büyük olan küçük olana eşit ki bu olamaz. Bu yüzden AE, BC'ye paralel değildir.

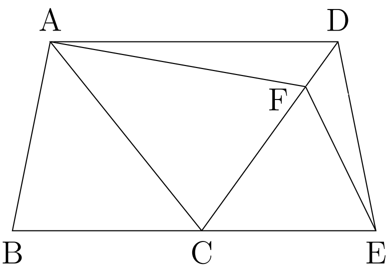
Benzer şekilde kanıtlayabiliriz ki AD dışında hiçbir doğru BC'ye paralel olamaz.

Öyleyse AD, BC'ye paraleldir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

40. Önerme:

Eşit tabanların üzerinde ve aynı tarafında olan eşit üçgenler aynı paralellerin arasındadır.



ABC, CDE, eşit BC, CE tabanların üzerinde ve aynı tarafında olan iki eşit üçgen olsun.

Diyorum ki bunlar aynı paralellerin de arasında kalır.

Çünkü AD birleştirilsin; diyorum ki AD, BE'ye paraleldir.

Çünkü değilse A noktasından BE'ye paralel AF çizilsin, **[I.31]**

ve FE birleştirilsin.

Bu durumda ABC üçgeni FCE üçgenine eşittir, çünkü eşit BC, CE tabanları üzerinde ve aynı BE, AF paralelleri arasındalar. **[I.38]**

Ama ABC üçgeni DCE üçgenine eşit; o zaman DCE üçgeni de FCE üçgenine eşit, **[Ort. 1]**

yani büyük olan küçük olana eşit ki bu olamaz.

Bu yüzden AF, BE'ye paralel değildir.

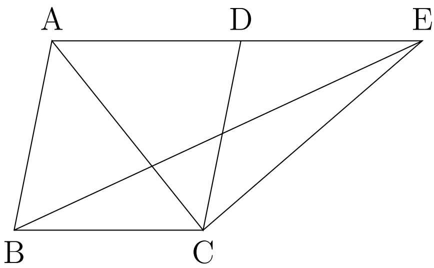
Benzer şeklide kanıtlayabiliriz ki AD dışında hiç bir doğru BE'ye paralel olamaz.

Öyleyse AD, BE'ye paraleldir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

41. Önerme:

Eğer bir paralelkenar bir üçgenle aynı tabana sahipse ve üçgenle aynı paraleller arasındaysa paralelkenar, üçgenin iki katıdır.



$ABCD$ paralelkenarı EBC üçgeniyle aynı BC tabanına sahip olsun ve aynı BC, AE paralel doğruları arasında olsun.

Diyorum ki $ABCD$ paralelkenarı BEC üçgeninin iki katıdır.

Çünkü AC birleştirilsin; o zaman ABC üçgeni EBC üçgenine eşittir çünkü aynı BC tabanı üzerinde ve aynı BC, AE paralelleri arasındalar. **[I.37]**

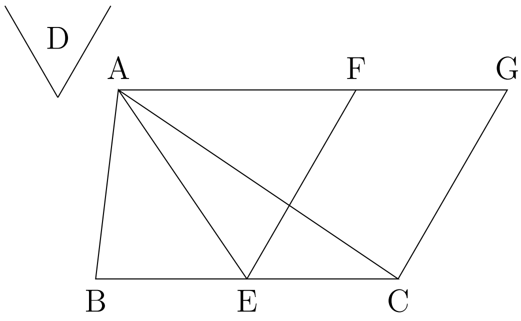
Ama $ABCD$ paralelkenarı ABC üçgeninin iki katıdır çünkü AC köşegeni paralelkenarı ikiye böler; **[I.34]**

demek ki $ABCD$ paralelkenarı EBC üçgeninin iki katıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

42. Önerme:

Düzkenar bir açının içine verilen bir üçgene eşit bir paralelkenar çizmenin yolu.



Verilen üçgen ABC, ve verilan düzkenar açı D olsun; böylece düzkenar D açısı içine ABC üçgenine eşit bir paralelkenar çizilmesi isteniyor.

BC, E'de ikiye bölünsün ve AE birleştirilsin; EC doğrusu üzerinde E noktasında D açısına eşit CEF açısı çizilsin; **[I.23]**

A'dan EC'ye paralel AG çizilsin, **[I.31]**

ve C'den EF'ye paralel CG çizilsin.

Bu durumda $FECG$ bir paralelkenardır.

Ve BE, EC'ye eşit olduğu için ABE üçgeni de AEC üçgenine eşittir, çünkü eşit BE, EC tabanları üzerinde ve aynı BC, AG paralelleri arasındalar; **[I.38]**

Bu durumda ABC üçgeni AEC üçgeninin iki katıdır.

Ama $FECG$ paralelkenarı da AEC üçgeninin iki katıdır, çünkü onunla aynı tabana sahiptir ve aynı paraleller arasındadır.; **[I.41]**

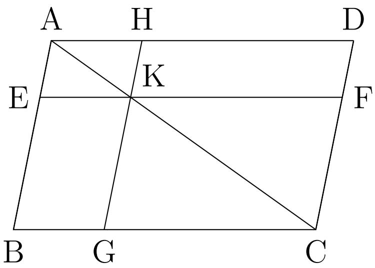
bu durumda $FECG$ paralelkenarı ABC üçgenine eşittir.

Ve D açısına eşit olan CEF açısına sahiptir.

Öyleyse, D açısına eşit olan CEF açısı içine ABC üçgenine eşit $FECG$ paralelkenarı çizilmiştir.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

43. Önerme:
Herhangi bir paralelkenarda köşegen üzerindeki paralelkenarların tümleyenleri birbirine eşittir.



$ABCD$ bir paralelkenar ve AC onun köşegeni olsun; ve AC etrafında EH, FG paralelkenarları alınsın, ve BK, KD onların **tümleyenleri** olsun.

Diyorum ki BK tümleyeni KD tümleyenine eşittir.

Çünkü $ABCD$ bir paralelkenar ve AC onun köşegeni olduğundan ABC üçgeni ACD üçgenine eşittir. **[I.34]**

Benzer şekilde, EH bir paralelkenar ve AK onun köşegemi olduğundan AEK üçgeni AHK üçgenine eşittir.

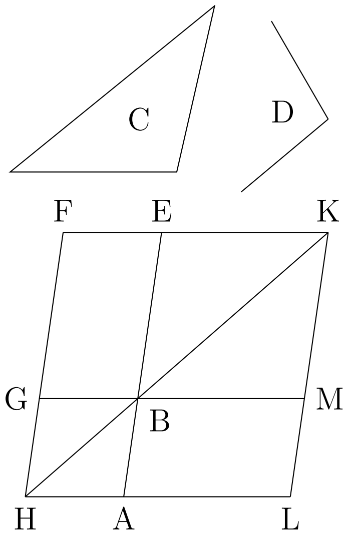
Aynı nedenden dolayı KFC üçgeni KGC üçgenine eşittir.

Şimdi, AEK üçgeni AHK üçgenine, ve KFC, KGC'ye eşit olduğundan, AEK üçgeniyle KGC üçgeni birlikte AHK üçgeniyle KFC üçgenine eşittir. **[Ort. 2]**

Ve tüm üçgen ABC de tüm üçgen ADC'ye eşittir; öyleyse kalan tümleyen BK kalan tümleyen KD'ye eşittir. **[Ort. 3]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

44. Önerme:
Verilen bir doğru üzerine, verilen bir düzkenar açı içine, verilen bir üçgene eşit bir paralelkenar çizmenin yolu.



Verilen doğru AB, verilen üçgen C, ve verilen düzkenar açı D olsun; böylece verilen AB doğrusu üzerine, D açısına eşit bir açı içine, verilen C üçgenine eşit bir paralelkenar çizilmesi isteniyor.

D açısına eşit olan EBG açısı içine, verilen C üçgenine eşit BEFG paralelkenarı çizilsin; **[I.42]**

öyle ki BE, AB ile aynı doğru üzerinde olsun. H'ye doğru FG uzatılsın, ve A'dan, BG ya da EF'ye paralel olacak şekilde, AH çizilsin. **[I.31]**

HB birleştirilsin.

HF doğrusu AH, EF paralellerini kestiği için AHF, HFE açıları iki dik açıya eşittir. **[I.29]**

Öyleyse BHG, GFE açıları iki dik açıdan küçüktür; ve iki dik açıdan küçük açılardan uzatılan doğrular kesişir; **[Bel. 5]**

o yüzden HB, FE uzatıldığında kesişeceklerdir.

Uzatılsınlar ve K'de kesişsinler; K'den, KL doğrusu EA'ya ya da FH'ye paralel çizilsin, **[I.31]**

ve HA, GB doğruları L, M noktalarına uzatılsın.

O zaman HLKF bir paralelkenardır, HK köşegenidir; ve LB, BF paralelkenarları HK etrafındaki AG, ME paralelkenarlarının tümleyenleridir. Bu durumda LB, BF'ye eşittir. **[I.43]**

Ama BF paralelkenarı C üçgenine eşittir. O yüzden LB de C üçgenine eşittir. **[Ort. I]**

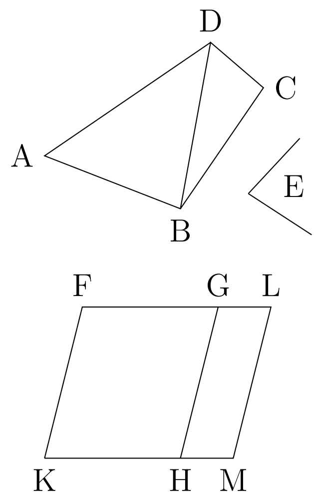
Ve GBE üçgeni ABM üçgenine eşit olduğundan, **[I.15]**

ve bu arada GBE açısı D açısına eşit olduğundan, ABM açısı da D açısına eşittir.

Böylece verilen C üçgenine eşit LB paralelkenarı AB doğrusu üzerine, ve D açısına eşit ABM açısı içine çizilmiştir.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

45. Önerme:
Bir düzkenar açı içine verilen bir düzkenar şekle eşit bir paralelkenar çizmenin yolu.



Verilen düzkenar şekil ABCD olsun ve verilen düzkenar açı E olsun; böylece E açısı içine ABCD düzkenar şekline eşit bir paralelkenar çizilmesi istenmektedir.

DB birleştirilsin, ve E açısına eşit HKF açısı içine ABD üçgenine eşit FH paralelkenarı çizilsin. **[I.42]**

GH doğrusu üzerine, E'ye eşit GHM açısı içine, DBC üçgenine eşit GM paralelkenarı çizilsin. **[I.44]**

O zaman, E açısı HKF, GHM açılarının herbirine eşit olduğundan, HKF açısı da GHM açısına eşittir. **[Ort. 1]**

İkisine de KHG açısı eklensin; bu durumda FKH, KHG açıları KHG, GHM açılarına eşittir. Ama FKH, KHG açıları iki dik açıya eşittir; **[I.29]**

öyleyse KHG, GHM açıları da iki dik açıya eşittir.

Böylece GH doğrusunun üzerindeki H noktasında, onun aynı tarafında olmayan iki doğru KH, HM komşu iki açıyı iki dik açıya eşit kılar; bu durumda KH, HM ile aynı doğru üzerindedir. **[I.14]**

Ve HG doğrusu paralel olan KM, FG doğrularını kestiğinden, ters iç açılar MHG, HGF birbirine eşittir. **[I.29]**

İkisine de HGL açısı eklensin; o zaman MHG, HGL açıları HGF, HGL açılarına eşittir. **[Ort. 2]**

Ama MHG, HGL açıları iki dik açıya eşittir; **[I.29]**

bu durumda HGF, HGL açıları da iki dik açıya eşittir. **[Ort. 1]**

O zaman FG, GL ile aynı doğru üzerindedir. **[I.34]**

Ve FK, HG'ye, ve HG, ML'ye eşit ve paralel olduğundan, KF de ML'ye eşit ve paraleldir; **[Ort. 1, Öne. I.30]**

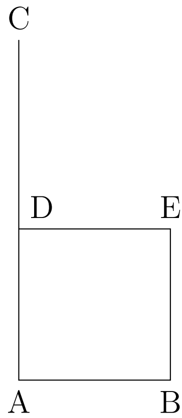
ve KM, FL onları uçlarından birleştirir; dolayısıyla KM ile FL de eşit ve paraleldirler. **[I.33]**

Bu durumda KFLM paralelkenardır. Ve ABD üçgeni FH paralelkenarına, ve DBC üçgeni GM'ye eşit olduğundan, ABCD düzkenar şeklinin tamamı KFLM paralekenarın tamamına eşittir.

Böylece KFLM paralelkenarı verilen E açısına eşit FKM açısı içine, verilen ABCD çokkenar şekle eşit olacak şekilde çizilmiştir.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

46. Önerme:
Bir doğru parçası üzerine bir kare çizmenin yolu.



Verilen doğru parçası AB olsun; böylece AB üzerine bir kare çizilmesi istenmektedir.

AB doğrusuna üzerindeki A noktasında dik açı yapacak şekilde AC doğrusu çizilsin, **[I.11]**

ve AD, AB'ye eşit yapılsın; D noktasından AB'ye paralel DE çizilsin, ve B noktasından AD'ye paralel BE çizilsin. **[I.31]**

Bu durumda $ADEB$ paralelkenardır; öyleyse AB eşittir DE, ve AD eşittir BE olur. **[I.34]**

Ama AB eşittir AD; öyleyse dört doğru BA, AD, DE, EB birbirine eşittir; bu durmda $ADEB$ paralelkenarı eşkenardır.

Ardından diyorum ki hem de dik açılıdır.

Çünkü AD doğrusu AB, DE paralellerini kestiğinden BAD, ADE açıları iki dik açıya eşittir. **[I.29]**

Ama BAD açısı diktir; öyleyse ADE açısı da diktir.

Ve bir paralelkenarda karşı kenarlar ve açılar birbirine eşittir; **[I.34]**

o yüzden ABE, BED karşı açılarının herbiri de diktir.

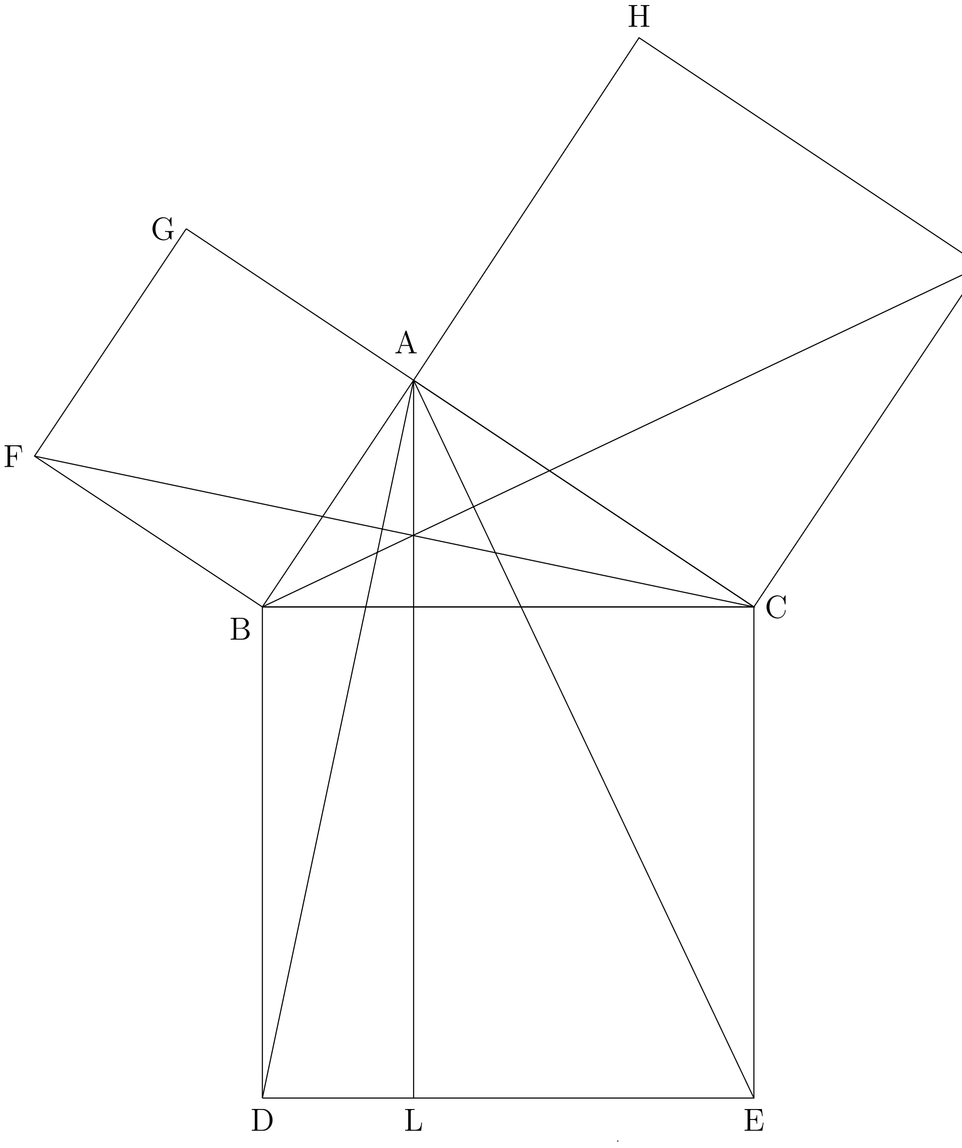
Bu durumda $ADEB$ dik açılıdır.

Eşkenar olduğu da kanıtlanmıştı.

Böylece bu bir karedir; ve AB doğrusu üzerine çizilmiştir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

47. Önerme:
Dik açılı üçgenlerde dik açıyı gören kenar üzerindeki kare, dik açıyı içeren kenarlar üzerindeki karelere eşittir.



ABC üçgeni, BAC açısı dik olan bir üçgen olsun.

Diyorum ki BC üzerindeki kare, BA, AC üzerindeki karelere eşittir.

Çünkü, BC üzerine $BDEC$ karesi, ve BA, AC üzerine GB, HC kareleri çizilsin; **[I.46]**

A'dan BD ya da CE'ye paralel AL çizilsin, ve AD, FC birleştirilsin.

O zaman, BAC, BAG açılarının her biri dik olduğundan, AC, AG doğruları BA doğrusuna A noktasında, bu doğrunun aynı tarafında olmayacak şekilde çizilmiştir ve oluşturdukları komşu açıları iki dik açıya eşit kılarlar; bu durumda CA, AG ile aynı doğru üzerindedir. **[I.14]**

Aynı nedenden dolayı BA da AH ile aynı doğru üzerindedir.

Ve, her ikisi de dik olduğu için DBC açısı FBA açısına eşittir. ABC açısı ikisine de eklensin; o zaman DBA açısı FBC açısına eşit olur. **[Ort. 2]**

Ve DB kenarı BC kenarına, ve FB, BA'ya eşit olduğundan, AB, BD kenarları sırasıyla FB, BC kenarlarına eşittir; ve ABD açısı FBC açısına eşittir; bu durumda AD tabanı FC tabanına eşit olur, ve ABD üçgeni FBC üçgenine eşit olur. **[I.4]**

Şimdi, BL paralelkenarı ABD üçgeninin iki katıdır, çünkü aynı BD tabanına sahipler ve aynı BD, AL paralelleri arasındalar. **[I.41]**

Ve GB karesi FBC üçgeninin iki katıdır, çünkü yine, aynı FB tabanına sahipler ve aynı FB, GC paralelleri arasındalar. **[I.41]**

Ama aynı şeylerin iki katları da birbirine eşittir.

Bundan dolayı BL paralelkenarı GB karesine eşittir.

Benzer şekilde, eğer AE, BK birleştirilirse, CL paralelkenarının da HC karesine eşit olduğu kanıtlanabilir;

Öyleyse $BDEC$ karesinin tamamı GB, HC karelerine eşittir. **[Ort. 2]**

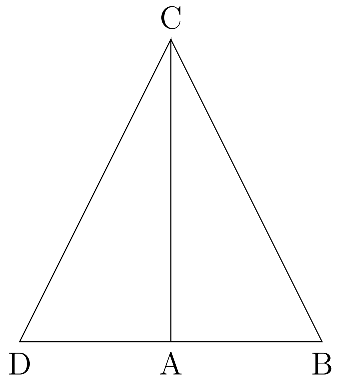
Ve $BDEC$ karesi BC üzerine, ve GB, HC kareleri BA, AC üzerine çizilmiştir.

Böylece BC üzerindeki kare BA, AC üzerindeki karelere eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

48. Önerme:

Eğer bir üçgende bir kenar üzerindeki kare diğer iki kenarın üzerindeki karelere eşitse, diğer iki kenar arasındaki açı diktir.



ABC üçgeninde BC üzerindeki kare BA, AC üzerindeki karelere eşit olsun.

Diyorum ki BAC açısı diktir.

Çünkü, AC doğrusuna A noktasında dik açıyla AD çizilsin ve AD, BA'ya eşit olsun, ve DC birleştirilsin. DA eşittir AB olduğundan, DA üzerindeki kare AB üzerindeki kareye de eşittir.

Her ikisine AC üzerindeki kare eklensin; bu durumda DA, AC üzerindeki kareler BA, AC üzerindeki karelere eşittir.

Ama DAC açısı dik olduğundan DC üzerindeki kare DA, AC üzerindeki karelere eşittir; **[I.47]**

ve BC üzerindeki kare BA, AC üzerindeki karelere eşittir, çünkü bu varsayıldı; bu durumda DC üzerindeki kare BC üzerindeki kareye eşittir, dolayısıyla DC kenarı da BC'ye eşittir.

Ve DA, AB'ye eşit olduğundan, ve AC ortak olduğundan, DA, AC kenarları sırasıyla BA, AC kenarlarına eşittir, ve DC tabanı BC tabanına eşittir; bu durumda DAC açısı BAC açısına eşittir. **[I.8]**

Ama DAC açısı diktir. Öyleyse BAC açısı da diktir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

Tanımlar Dizini