6 Platonik Cisimlerin Simetrileri

Bu bölümde üç boyutlu cisimlerin simetri gruplarını inceleyeceğiz. Sonlu sayıda simetriye sahip olan cisimler arasında simetri çeşitliliği bakımından en zengini olan Platonik cisimlere özel bir önem vereceğiz. Bu cisimlerin Antik Yunan'da Platon'dan çok daha önceki filozoflar ve matematikçiler tarafından bilinmesine rağmen, bu cisimler M.Ö. 360 yıllarında Platon'un *Timaios* diyaloğunda geçtiği için Platon'un adıyla anılmaktadırlar.

Konuya hazırlık olarak önce daha basit cisimlerin simetri gruplarına bakalım.

Alıştırma 1. Aşağıdaki cümleleri kanıtlayın: Kahve fincanının ve 4 ayaklı arkalıklı bir sandalyenin simetri grubu $\mathbb{Z}_2$'ye izomorfiktir. Dikdörtgen veya kare bir masanın simteri grupları sırası ile $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$'ye ve D_4'e izomorfiktir. Üç ayaklı yuvarlak bir masanın simetri grubu D_3'tür.

Bundan sonra cümleleri kısa tutmak için son cümlede olduğu gibi izomorfiktir yazmayacağız.

Alıştırma 2. Aşağıdaki cisimlerin simetri gruplarını bulun. Prizma ile dik prizma kastedilmektedir. (Yukarıda olduğu gibi bilinen gruplardan hangilerine izomorfik olduğunu söyleyin.)
(a) Kare tabanlı düzgün piramit,
(b) Yanal yüzlerinin her birinde P harfi olan kare tabanlı düzgün piramit,
(c) Karşılıklı iki yüzü kare olan dikdörtgenler prizması,
(d) Hiçbir yüzü kare olmayan dikdörtgenler prizması.
(e) Bu örneklerde döndürmelerin tam olarak grubun yarısı olduğunu kanıtlayın.

Alıştırma 3. (a) Üzerinde hiçbir işaret olmayan bir topun (daha matematiksel olarak söylersek bir kürenin), silindirin, standart su bardaklarının simetri grupları sonsuzdur. Siz de sonsuz simetriye sahip başka cisimler bulun.
(b) Simetri grubu D_n olan bir cisim bulun. Bu soruyu her $n \geqslant 3$ için çözün.
(c) Simetri grubu $\mathbb{Z}_n$ olan bir cisim bulun. Bu soruyu her $n \geqslant 2$ için çözün.

6A Platonik Cisimlerin Sınıflandırılması

Üç boyutlu uzayda (yani $\mathbb{R}^3$'te) bir düzlem seçtiğimiz zaman, bu düzlem uzayı iki parçaya ayırır, bu parçaların her birine *yarı-uzay* denir. Sonlu adet yarı-uzayın kesişimi sınırlı bir küme veriyorsa bu kümeye *çokyüzlü* denir. (İngilizcesi *polyhedron.*)

Örnek 1. Üç boyutlu uzayda küp, dikdörtgenler prizması, kare tabanlı piramit, her $n \geqslant 5$ için düzgün n-gon tabanlı piramit çokyüzlü örnekleridir.

Alıştırma 4. Her çokyüzlünün simetri grubunun sonlu olduğunu kanıtlayın.

Tanım. Her köşesinde aynı sayıda düzgün eş n-gonun bir araya geldiği üç boyutlu konveks (dışbükey) çokyüzlülere *Platonik cisim* denir.

Örnek 2. Bir kübün her köşesinde tam olarak 3 adet düzgün 4-gen (yani kare) bir araya geldiği için küp bir Platonik cisimdir. Size en tanıdık olan Platonik cisim büyük olasılıkla küptür.

Örnek 3. İki boyutta (yani düzlemde) bir çokgenin en az üç kenarı olmalıdır, üç boyutlu uzayda da bir çokyüzlünün en az dört yüzü olmalıdır. Bu örneklerden sadece biri Platonik cisimdir: *Tetrahedron*, yani her köşede üç adet eş eşkenar üçgenin bir araya geldiği 4-yüzlü.

Diğer Platonik cisim örneklerine geçmeden önce çokyüzlülere dair bazı kavramları ve formülleri öğrenmemiz gerekiyor.

Bir cismi incelemek için elbette yalnızca yüz sayısını bilmek yetmez, cismin köşe ve kenar sayıları da önemlidir. Bundan sonra bu sayıları göstermek için İngilizce karşılıklarının baş harflerini kullanacağız: V köşe (vertex) sayısı, E kenar (edge) sayısı ve F yüz (face) sayısını göstersin.

Teorem 6.1. (Euler) *Üç boyutlu her konveks çokyüzlüde* $V - E + F = 2$ *eşitliği sağlanır.*

Kanıt. Kanıtı atlayabilirsiniz, ancak öğrenmek isteyen öğrenciler için kanıt ve gerekli önbilgiler Apendiks'te verilmiştir, sayfa 8'e bakınız. ☐

Teoremi küp örneğinde deneyelim: Küpte $V = 8$, $E = 12$ ve $F = 6$ olduğu için gerçekten de $V - E + F = 2$ formülü doğrulanır. Euler formülünün tetrahedronda doğru olduğunu gösterin.

Notasyon. Platonik cisimlerde V, E ve F dışında iki parametre daha bulunur. Bunlardan biri her yüzdeki düzgün n-gonun kenar (veya köşe) sayısı olan n, diğeri de her köşede bir araya gelen yüz sayısı, bunu da k ile gösterelim. Örneğin kübün her yüzü kare olduğu için $n = 4$, her köşede 3 kare bir araya geldiği için $k = 3$'tür. Tetrahedron'da $n = k = 3$ olduğunu gösterin.

Lemma 6.2. *Platonik cisimlerde* $2E = nF = kV$ *eşitliği sağlanır.*

Kanıt. Cisimde her yüzün n kenarı olduğu için toplamda nF kenar vardır ama bu sayma yöntemi ile her kenar tam olarak iki defa sayılır, çünkü her kenar tam olara iki yüz arasında yer alır. Dolayısı ile $nF = 2E$ olduğu görülür. Benzer şekilde her yüzün n köşesi vardır, öyleyse nF köşe saymış oluruz, ama bu sayımda her köşe k defa sayılır (neden?) dolayısı ile $nF = kV$ elde edilir. □

Örnek 4. Eğer $n = 5$ ve $k = 3$ olan bir Platonik cisim varsa, onun V, E ve F sayılarını hesaplayalım. Öncelikle $2E = 5F = 3V$ eşitliğini elde ederiz. Burdan V'yi ve E'yi, F cinsinden yazıp, Euler formülünden dolayı $(5F/3) - (5F/2) + F = 2$ elde ederiz. Bunu düzenlersek $10F - 15F + 6F = 12$ olur, yani $F = 12$'dir. Burdan $V = 20$ ve $E = 30$ çıkar.

Örnek 5. Eğer $n = 4$ ve $k = 4$ olan bir Platonik cisim varsa, onun V, E ve F sayılarını hesaplayalım. Yukarıdaki gibi başlarsak $2E = 4F = 4V$ yani $E = 2F = 2V$ elde ederiz. Euler formülünden $F - 2F + F = 2$ yani $0 = 2$ çelişkisi elde edilir. Demek ki böyle bir Platonik cisim olamaz.

Şimdi bu soruya hiç formül kullanmadan yalnızca tanımları kullanarak ikinci bir çözüm verelim. Sorudaki $n = 4$ ve $k = 4$ koşulları bize her köşede 4 karenin bir araya geleceğini söylüyor, ancak 4 kareyi bir köşede birleşitirip kapalı bir cisim elde etmek imkansızdır. Kareleri bu şekilde yerleştirirsek aynı düzlemde kalırlar. Bu da bize böyle bir cisim olmadığını gösterir.

Bu son fikri kullanarak tüm Platonik cisimleri bulalım.

Teorem 6.3. *Beş tip Platonik cisim vardır.*

Kanıt. Öncelikle bir Platonik cisimde $n \geqslant 3$ ve $k \geqslant 3$ olduğuna dikkat edin. Düzgün n-gonda iç açılar $\pi - (2\pi/n) = \pi(n-2)/n$ olur. Her köşede k adet açı birleştiği için toplamın 2π'den kesin küçük olması gerekir, yani $k\pi(n-2)/n < 2\pi$ olur. Düzenlersek $k < 2n/(n-2)$ elde ederiz. Şimdi farklı n değerlerini ineceleyelim: $n = 3$ ise $k < 6$ elde edilir; yani $k = 3, 4, 5$ değerlerini alabilir. Eğer $n = 4$ ise $k < 4$ olur, yani tek çözüm $k = 3$'tür. Eğer $n = 5$ ise, $k < 10/3$ olur, yine tek çözüm $k = 3$'tür. Eğer $n \geqslant 6$ ise $k < 3$ olur, yani çözüm yoktur. Dolayısı ile en fazla beş tip Platonik cisim vardır. Her bir cismin var olduğunu Öklid *Öğeler* kitabının 13. cildinde kanıtlamıştır. Biz bu kanıtı atlıyoruz. □

Şimdi bu beş olasılık için Örnek 4'teki gibi V, E ve F sayılarını hesaplayabilirsiniz. Elde etmeniz gereken sonuçları aşağıdaki tabloda bulabilirsiniz. Tablonun dördüncü satırının aslında Örnek 4 olduğuna dikkat ediniz.

Cisim	n	k	V	E	F
Tetrahedron	3	3	4	6	4
Küp	4	3	8	12	6
Oktahedron	3	4	6	12	8
Dodekahedron	5	3	20	30	12
İkosahedron	3	5	12	30	20

Tablonun son üç satırındaki isimlerle, yani oktahedron, dodekahedron ve ikosahedronla daha önce karşılaşmamış olabilirsiniz. Bu cisimlerin adlarını kolayca hatırlayabilmek için birkaç Yunanca sözcük öğrenmemiz gerekecek. Eski Yunanca'da *hedron* oturacak yer, taban demektir, ama *hedron* yerine Türkçe'deki kullanımla daha uyumlu olan yüz sözcüğünü düşünebilirsiniz. (İngilizce'de de *face* kullanılmaktadır.) Hedron'un önüne gelen sözcüklerin hepsi rakamdır ve cismin yüz sayısını vermektedir: *tetra* dört, *okta* sekiz, *dodeka* on iki ve *ikosa* yirmi demektir.

6A.1 Duallik

Kübün ve oktahedronun satırlarını karşılaştırdığınızda belli benzerlikler görebilirsiniz. Örneğin, kenar sayıları eşit, n ve k değerleri yer değiştirmiş, aynı zamanda V ve F değerleri de yer değiştirmiş. Aynı gözlemleri dodekahedron ve ikosahedron arasında da yapmak mümkün. Bunun nedeni bu cisimlerin birbirlerinin *duali* olmaları.

Elimizde herhangi bir çokyüzlü olsun, ona P diyelim. Şimdi P'nin her yüzünün merkez noktasını işaretleyelim, bu noktalar dual çokyüzlünün (onu da P' ile gösterelim) köşeleri olacak. Eğer P'de iki yüz komşu ise (yani aralarında bir kenar varsa) o zaman o yüzlerin merkezleri arasına bir kenar koyalım. Bu kenarlar da dualin kenarları olacak. Bu şekilde elde edilen cisim de bir çokyüzlü olur, ve inşadan dolayı $E = E'$, $F' = V$, ve $V' = F$ olduğu kolayca görülür. Eğer P bir Platonik cisimse, P' de Platonik cisim olur ve Lemma 6.2'den veya inşadan $n' = k$ ve $k' = n$ olduğu kanıtlanır.

Herhangi bir çokyüzlünün iki defa dualini alırsak başladığımız çokyüzlüyü elde ederiz, yani $P'' = P$ doğrudur. Küp ve oktahedronun birbirinin duali olduğunu yukarıdaki inşayı zihninizde kübe veya oktahedrona yaparak görünüz. Aynı şekilde dodekahedronla ikosahedronun da biribirinin duali olduğunu kontrol ediniz. Bir çokyüzlü ile dualinin simetri grupları izomorfiktir.

Alıştırma 5. (a) Kare tabanlı piramidin duali nedir?
(b)Tetrahedronun duali nedir?

6B Tetrahedronun Simetrileri

Bu bölümde tetrahedronun simetri grubunu bulacağız. Bu grubu $\mathcal{T}$ ile gösterelim.

Lemma 6.4. *Tetrahedronun en fazla 24 simetrisi olabilir ve $\mathcal{T} \leqslant S_4$ olarak görülebilir.*

Kanıt. Tetrahedronun dört köşesi olduğunu hatırlayın. Bir çokyüzlünün simetrileri köşeler üzerinde bire bir ve örten bir fonksiyon olduğu için tetrahedronun en fazla $4! = 24$ simetrisi olabilir. (Birinci köşenin gidebileceği dört yer var, birincinin gittiği yer belirlendikten sonra ikinci köşeye gidebilecek üç yer kalır diye devam eden daha uzun bir kanıt verilebilir.) Tetrahedronun köşelerini numaralandırırsak, her simetriyi S_4'ün bir elemanı olarak görebiliriz. □

Şimdi bu simetrilerin döngü tiplerini bulalım. Seçeceğimiz bir köşeden ve karşı yüzün orta noktasından geçen eksen etrafındaki $2\pi/3$ ve $4\pi/3$ radyanlık döndürmeler tetrahedronun simetrileridir. Bu döndürmeler S_4'te 3-lü döngülere karşılık gelir. Örneğin, 1 numaralı köşeyi seçtiğimizde (234) ve (243) permütasyonlarını elde ederiz. Bu tip döndürmelerden $4 \cdot 2 = 8$ adet vardır.

Ayrıca karşılıklı kenarların orta noktalarından geçen bir döndürme ekseni de vardır. Bu döndürmelerin S_4'teki karşılığı $(12)(34)$ gibi iki makasın çarpımı biçiminde olan elemanlardır. Bu döndürmelerden de 3 adet vardır, her biri π radyanlık döndürmedir. Birim döndürmeyi de sayarsak tetrahedronda toplam 12 döndürme bulmuş olduk. Tetrahedronun başka döndürmesinin olmadığını biraz daha deneme yaparak görebilirsiniz. Lagrange Teoremi'ni öğrendikten sonra bunu daha kısa bir yoldan kanıtlayacağız.

Yansımalara da bakalım: Tetrahedronun hangi iki köşesini alırsak alalım, bu iki köşeden ve tetrahedronun merkezinden geçen tek bir düzlem vardır. Bu tip düzlemlere göre yansımalar da tetrahedronun simetrisidir. Dört köşenin ikisini $\binom{4}{2} = 6$ farklı şekilde seçebiliriz. Bu yansımaların S_4'teki karşılığı (12) gibi makaslardır.

Tetrahedronun döndürme grubunu $\mathcal{T}_D$ ile gösterelim.

Teorem 6.5. *$\mathcal{T}_D \cong A_4$ ve $\mathcal{T} \cong S_4$ olur.*

Kanıt. Tetrahedronun yukarıda bulduğumuz döndürmelerini ve A_4'ün elemanlarını karşılaştırınca birinci izomorfizmayı kolayca görebilirsiniz. İkinciyi kanıtlamak için önce S_n gruplarının makaslar tarafından üretildiğini hatırlayın. Yukarıda $\mathcal{T}$'nin tüm makasları içerdiğini gördük. $\mathcal{T}$ grup olduğuna göre makasların ürettiği altgrubu da içerir. Öyleyse $S_4 \leqslant \mathcal{T}$ olur. Lemma 6.4'ten dolayı $\mathcal{T} \cong S_4$ elde edilir. □

Bu bölümde $\mathcal{T}$'nin toplam $12 + 6 = 18$ simetrisini bulmuş olduk. Henüz sözünü etmediğimiz $24 - 18 = 6$ simetri daha var. Bu simetriler döndürme veya yansıma değil, ama bir döndürme ile bir yansımanın bileşkesi. S_4'teki karşılıkları 4-lü döngüler olmalı, çünkü yukarıdaki analizimizde yalnızca onları görmedik.

Alıştırma 6. (a) S_4'te tam olarak 6 adet 4-lü döngü bulunduğunu kanıtlayın.
(b) $(1234) \in S_4$ döngüsünü bir 3-lü döngü ile bir makasın bileşkesi olarak yazın.
(c) $(1234) \in S_4$ döngüsünü üç makasın bileşkesi olarak yazın.
(d) Yukarıdaki iki şıkta bulduğunuz eşitliklerin geometrik anlamlarını bir tetrahedron üzerinde tartışın.

6C Kübün Simetrileri

Bu bölümde kübün simetrilerini inceleyeceğiz.

Lemma 6.6. *Kübün en fazla 48 simetrisi olabilir.*

Kanıt. Kübün bir köşesini seçelim, toplam 8 köşe olduğu için bu köşenin gidebileceği 8 yer vardır. (Eğer tetrahedrondaki gibi devam edersek 8! buluruz ama öyle yapmayacağız.) Küpte her köşenin üç komşusu ve tek bir karşı köşesi bulunur. Simetri altında bu ilişkilerin korunduğuna dikkat edin. Yani kübün iki köşesi komşu (veya karşı) ise, herhangi bir simetri altında gittikleri köşeler de komşu (veya karşı) olur.

Dolayısı ile başlangıçta seçtiğimiz köşenin gideceği yer belirlendikten sonra birinci komşusu için üç olasılık bulunur, ikinci komşusu için iki ve üçüncü komşu için bir olasılık vardır. Bu dört köşenin gideceği yer belirlendikten sonra kalan dört köşe de karşı köşeler oldukları için onların da yeri belirlenmiştir. Dolayısı ile kübün en fazla $8 \cdot 3 \cdot 2 = 48$ simetrisi olabilir. □

Örnek 6. Kübün en az 24 döndürme simetrisinin olduğunu görelim. Karşı yüzlerin orta noktalarından geçen eksenler etrafında $\pi/2$, π, $3\pi/2$ radyanlık döndürmeler vardır. Bu tip üç eksen bulunduğu için toplam $3 \cdot 3 = 9$ döndürme vardır. Ayrıca karşılıklı kenarların orta noktalarından geçen eksenlerden de 6 farklı döndürme gelir (kanıtlayın). Son olarak karşı köşelerden geçen eksenlerden de $4 \cdot 2 = 8$ döndürme gelir (kanıtlayın). Birimi de eklersek, kübün simetrisi olan toplam $9 + 6 + 8 + 1 = 24$ döndürme bulunur.

Alıştırma 7. Kübün 9 farklı yansıması vardır, hepsini bulun.

Örnek 7. Tetrahdron da olduğu gibi kübün de ne döndürme ne yansıma olan simetrileri vardır. Bunlardan biri her köşeyi karşı köşeye gönderen simetridir.

Alıştırma 8. Oktahedron ve küp dual cisimler oldukları için yukarıdaki Lemma'nın bir sonucu olarak oktahedron'un da en fazla 48 simetrisi vardır diyebiliriz. Bu gözlemi, dualliği kullanmadan, Lemma 6.6'nın kanıtındaki yolu izleyerek kanıtlayın.

Alıştırma 9. Lemma 6.6'nın kanıtındaki yolu izleyerek dodekahedron'un ve ikosahedron'un simetri grupları için üst sınırın 120 olduğunu gösterin.

Meraklısına Notlar.

1. Kübün döngüsel simetri grubu S_4'e, tüm simetri grubu ise $S_4 \times \mathbb{Z}_2$ grubuna izomorfiktir. (Duallikten dolayı bu izomorfiklikler oktahedron'un simetri grupları için de geçerlidir.) Küpte karşı köşelerden geçen dört tane köşegen bulunur. Kanıtta kübün simetrilerinin bu köşegenler üzerine olan etkisinden yararlanılmaktadır.

2. Dodekahedron'un (ve ikosahedron'un) döngüsel simetri grubu A_5'e, tüm simetri grubu $A_4 \times \mathbb{Z}_2$'ye izomorfiktir.

3. (Sınıflandırma) Üç boyutlu bir cismin simetri sayısı sonlu ise cismin simetri grubu $\mathbb{Z}_n$, D_n veya Platonik cisimlerden birinin döngüsel veya tüm simetri grubuna izomorfik olur.

Apendiks: Euler Formülü

Euler formülü bağlantılı düzlemsel sonlu graflar için de geçerlidir. Eğer bir grafta kenarlar yalnızca köşelerde kesişiyorsa grafa *düzlemsel* denir. (İngilizcesi planar.)

Çokyüzlülerde olduğu gibi, sonlu düzlemsel graflarda da benzer şekilde V, E ve F sayılarını tanımlamak mümkündür. Önemli bir ayrıntı, grafın dışında kalan sınırsız alan da bir yüz olarak sayılır.

Teorem 6.7. (Graflar için Euler Formülü) *Bağlantılı, düzlemsel, sonlu graflarda*

$$V - E + F = 2$$

eşitliği doğrudur.

Kanıt. Kenar sayısı olan E üzerinden tümevarım yapalım. Eğer $E = 0$ ise grafımız tek bir köşeden oluşuyor demektir, yani $V = F = 1$ olur, dolayısı ile $V - E + F = 2$ sağlanır. Şimdi bir $m \geqslant 1$ sayısı seçelim ve Euler formülünün m kenarlı tüm graflar için doğru olduğunu kabul edelim ve $m + 1$ kenarlı bir Γ grafı alalım. Γ grafına karşılık gelen sayılar V, $E = m + 1$, F olsun. Γ grafında rasgele bir kenar seçip o kenarı silelim, yeni grafa Γ' diyelim ve Γ' grafına karşılık gelen sayıları V', E', F' ile gösterelim.

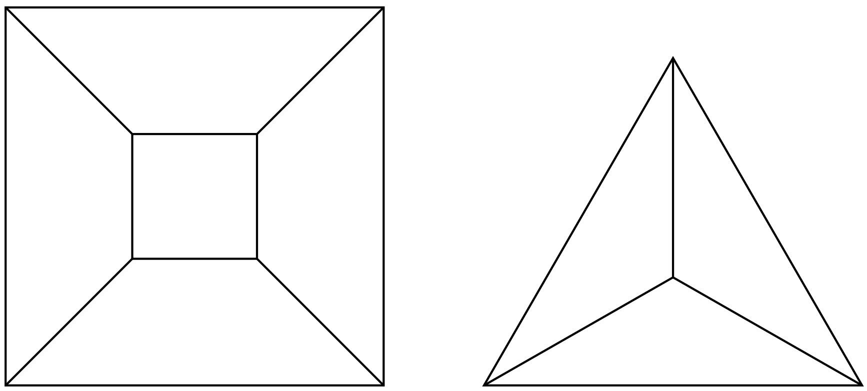
Şimdi iki durumdan biri olmak zorunda. Sildiğimiz kenar yüz sayısını azaltmış olabilir, bu durumda köşe sayısı aynı kalır, yani $V' = V$, $E' = m$, $F' = F - 1$ olur. İkinci durumda, silinen kenar yüz sayısını değiştirmemiştir ama o zamanda köşe sayısı azalır, yani $V' = V - 1$, $E' = m$, $F' = F$ olur. Her iki durumda da Euler formülü (tümevarım varsayımı sayesinde) Γ' grafında sağlandığı için $V' - E' + F' = 2$'dir. Burdan da $2 = V' - E' + F' = V - m + F - 1 = V - (m + 1) + F = V - E + F$ veya $2 = V' - E' + F' = V - 1 - m + F = V - (m + 1) + F = V - E + F$ olur yani her durumda istenen sonuç elde edilir. □

Bu teoremin birçok farklı kanıtı vardır, meraklı okurlar internetten başka kanıtlar da bulabilir.

Asıl amacımız olan Teorem 6.1'i kanıtlamak için her konveks çokyüzlünün nasıl düzlemsel bir graf olarak görülebileceğine bakalım.

Elinizdeki çokyüzlünün yüzlerinden birini çıkartın ve kalanın esnek bir maddeden yapıldığını varsayın. Çıkardığınız yüzün olduğu bölümü kenarlarında çekerek genişlettiğinizi hayal edin, öyle ki cismin düzleme izdüşümü alındığında hiçbir kenar kesişmesin. Artık elinizde düzlemsel bir graf var, bu grafta en dışta kalan sınırsız alanın da bir yüz olduğunu unutmayalım. Bu grafla, çokyüzlünün V, E ve F sayılarının eşit olduğunu kontrol ediniz.

Örnek 8. Bu yöntem kübe ya da tetrahdrona uygulandığında aşağıdaki graflar elde edilir.



(a) Küp (b) Tetrahedron

Şekil 1: Graflar

Dolayısı ile Teorem 6.1, yukarıda kanıtlanmış olan Teorem 6.7'in kolay bir sonucu olur.