Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi, Matematik Bölümü
Mat 472: Cebirde Seçme Konular, Final Sınavı, 28 Mayıs 2012

Ad Soyad:
Notlar: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. Σ. /60

Yanıtlarınızı mutlaka açıklayınız. İyi şanslar.

1. (6 puan) $\mathbb{C}$'yi $\mathbb{R}$ üzerinde vektör uzayı yapan toplama ve çarpma işlemlerini yazın. Bu uzay için gerçel sayı içermeyen bir taban yazın. (Bu soruda yanıtınızı kanıtlamanıza gerek yoktur.)

2. (6 puan) $\mathbb{R}^3/\langle(1,1,2),(3,2,4)\rangle$ uzayı için bir taban yazın ve iddianızı kanıtlayın.

3. (4+4+2 puan) V, $\mathbb{R}$ üzerinde n boyutlu bir vektör uzayı, $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ kümesi V için bir taban olsun, ve $T : V^* \to \mathbf{R}^n$, $T(f) = (f(v_1), \ldots, f(v_n))$ şeklinde tanımlanmış olsun. (Hatırlatma: V^*, V'den $\mathbb{R}$'ye tanımlı doğrusal dönüşümlerden oluşan uzaydır.)

(a) T'nin doğrusal bir dönüşüm olduğunu gösterin.

(b) Eğer $\{f_1, \ldots, f_n\}$, V^* uzayı için bir tabansa, o zaman $\{T(f_1), \ldots, T(f_n)\}$ kümesinin de $\mathbb{R}^n$ uzayı için bir taban olduğunu kanıtlayın.

(c) T'nin tersi var mı? Varsa, bulun.

4. (8 puan) $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$, V uzayı için bir taban olsun.

$$\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, \ldots, v_{n-1} + v_n, v_n + v_1\}$$

kümesinin V için bir taban olması için gerekli ve yeterli koşulun n'nin tek olması olduğunu gösterin.

5. (4+4+4+4 puan) Doğru mu, yanlış mı?
(a) Eğer 3, $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ matrisinin tek gerçel özdeğeri ise, o zaman $(x-3)^2$ A'nın özpolinomunu böler.

(b) Eğer 3, $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ matrisinin tek gerçel özdeğeri ise, o zaman $(x-3)^2$ A'nın özpolinomunu böler.

(c) Eğer $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ köşegenlenebilir ise, A^2 köşegenlenebilir.

(d) $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ olsun. Eğer A^2 köşegenlenebilir ise, A köşegenlenebilir.

Ad Soyad:

6. (7 puan) $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$, $\delta_A(x) = (x-1)(x-2)^2$ ve A'nın 2'ye karşılık gelen özuzayı 3 boyutlu ise, A hakkında ne söyleyebilirsiniz?

7. (7 puan) Benzer matrislerin izlerinin eşit olduğunu kanıtlayın.