Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi, Matematik Bölümü
Mat 472: Cebirde Seçme Konular, Birinci Arasınav, 21 Mart 2012

Ad Soyad:
Notlar: 1. 2. 3. 4. 5. 6. Σ. /40

Aksi belirtilmedikçe, V ve W aynı cisim üzerinde iki vektör uzayıdır. Yanıtlarınızı mutlaka açıklayınız. İyi şanslar.

1. (8 puan) Aşağıdaki kümelerin $\mathbb{R}^{2\times 2}$ uzayının bir altuzayı olup olmadığını açıklaması ile birlikte yazınız.

   (a) $\left\{ \begin{pmatrix} x^3 & -y \\ y & y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$.

   (b) $\left\{ \begin{pmatrix} x^3 & -y \\ y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$.

   (c) $\left\{ \begin{pmatrix} x^2 & -y \\ y & y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$.

2. (6 puan) A ve B, V uzayının doğrusal bağımsız iki altkümesi olsun. Eğer $V = \langle A \rangle \oplus \langle B \rangle$ ise, $A \cup B$ kümesinin V için bir taban olduğunu kanıtlayın.

3. (6 puan) $V = \Pi_{\mathbb{N}}\mathbb{R}$, $W = \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$ olsun. V/W uzayında üç elemanlı doğrusal bağımsız bir küme yazınız.

4. (8 puan) $\mathcal{B} = \{1 + x + x^2, 1 + 2x + 3x^2, 1 + 4x + 9x^2\}$ olsun.
(a) $\mathcal{B}$ kümesinin $\mathbb{R}[x]_2$ için bir taban olduğunu kanıtlayın.

(b) $[3 + 4x - 2x^2]_{\mathcal{B}}$ matrisini yazın.

(c) $[p(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ eşitliğini sağlayan $p(x)$ polinomunu bulun.

5. (6 puan) $T : V \to W$ örten bir doğrusal dönüşüm olsun. Eğer bir $w \in W$ için $T^{-1}[w]$ kümesi bir elemanlı ise, o zaman her $u \in W$ için $T^{-1}[u]$ kümesinin bir elemanlı olduğunu gösteriniz.

6. (6 puan) V^* ile, V'nin dual uzayını gösterelim. $S = \{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq V$, $T = \{f_1, \ldots, f_k\} \subseteq V^*$ ve her $1 \leqslant i, j \leqslant k$ için, $f_i(v_j) = \delta_{ij}$ olsun. Bu durumda, S'nin doğrusal bağımsız olduğunu kanıtlayın.