

### Alıştırmalar I

$\mathbf{F}$  bir cisim,  $V$  ise  $\mathbf{F}$  üzerinde bir vektör uzayı olsun.

- Gerçel sayılar kümesi  $\mathbf{Q}$  üzerinde bir vektör uzayı olur mu?  $\mathbf{R}$  üzerinde?  $p$  asalsa,  $\mathbf{Z}_p$  üzerinde?
- Verilen kümelerin, verilen uzayların alt uzayı olup olmadığını söyleyiniz. Yanıtınızı kanıtlayınız.
  - $\{(x + 1, x, y) : x, y \in \mathbf{R}\} \subseteq \mathbf{R}^3$ .
  - $\{(x + 1, y, y) : x, y \in \mathbf{R}\} \subseteq \mathbf{R}^3$ .
  - $\mathbf{F}[x]$  uzayındaki, derecesi  $\leq 10$  olan polinomlar kümesi.
  - $\mathbf{F}[x]$  uzayındaki, derecesi  $\geq 10$  olan polinomlar kümesi ve sıfır polinomu.
  - $\mathbf{F}[x]$  uzayındaki, her  $0 \leq n \leq 9$  için,  $x^n$ 'in katsayısı 0 olan polinomlar kümesi.
  - Determinantı 0 olan gerçel sayı girdili  $n \times n$  matrisler kümesi.
  - Her  $n \geq 1$  için,  $a_{2n} = 2a_{2n-1}$  özelliğini sağlayan gerçel diziler kümesi.
- $\mathcal{F}$ , gerçel sayılar üzerindeki tüm fonksiyonların oluşturduğu vektör uzayı olsun.  $\mathcal{C}$  ve  $\mathcal{T}$  ise, sırası ile, tüm çift ve tek fonksiyonların kümesi olsun. Her iki kümenin de  $\mathcal{F}$ 'nin alt uzayı olduğunu ve  $\mathcal{F} = \mathcal{C} \oplus \mathcal{T}$  eşitliğini kanıtlayınız.
- $A_1, \dots, A_n$  boş olmayan kümeler olsun.  $\{f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \cup A_i \mid \text{Her } i \text{ için } f(i) \in A_i\}$  kümesi ile  $A_1 \times \dots \times A_n$  kümesi arasında bir eşleme yazınız.
- Aşağıda verilen kümelerin hangilerinin arasında eşleme olduğunu yazın ve kanıtlayın.  $\mathbf{R}[x]$ ,  $\prod_{\mathbf{N}} \mathbf{R}$ ,  $\bigoplus_{\mathbf{N}} \mathbf{R}$ , gerçel diziler, belli bir terimden sonra 0 olan gerçel diziler, 0'a yakınsayan gerçel diziler.
- $V$ , sonsuz bir cisim üzerinde bir vektör uzayı,  $n \geq 2$  ve  $U_1, \dots, U_n$ ,  $V$ 'nin birbirini içermeyen alt uzayları olsun.  $\bigcup_{i=1}^n U_i$  kümesinin hiçbir zaman  $V$ 'nin alt uzayı olmayacağını kanıtlayın. Sonlu cisimler üzerinde karşıörnek bulun.
- (Cemal Koç, 2.1.17)  $(-b, 4, 0, 2b - 2)$  vektörü,  $\mathbf{R}^{4^2}$ 'te,  
 $(-1, 1, -1, 1), (1, a, 1, -1), (-2a, -a, -2a + 1, 2a + 1), (-1, 3, a - 1, 2)$   
tarafından üretilen alt uzaydaysa,  $a \in \mathbf{R}$  için ne söyleyebilirsiniz?
- (Steven Roman) Chapter 1, Exercises 1, 4, 14, 15, 18, 24.