MAT216 Geometri ve Cebir (Ders Notları)

Geometri ve Cebir sözcüklerinin etimolojisi: Geo=yer, metri=ölçüm (Yunanca); Cebir=kırık kemikleri yeniden bir araya getirmek (Arapça)

1 Simetriler

1A Simetrinin Matematiksel Anlamı

Kare mi daha simetriktir, dikdörtgen mi? Karede dört yansıma ekseni var ama dikdörtgende yalnızca iki yansıma ekseni var, bu nedenle hemen herkes karenin daha simetrik olduğunu söyler. Simetrinin matematiksel tanımını 1B'de yapacağız. Bu bölümde simetri sözcüğünü günlük yaşamda kullandığımız anlamında kullanıyorum.

A, H, F harflerinin ve satranç tahtasının yansıma eksenleri nedir? Eşkenar üçgenin, oklu karenin? Düzgün n-gondaki eksenler tek çift olmaya göre değişiklik gösterebiliyor. Yansımadan başka simetri var mı? Döndürmeler ve ötelemeler var. $y = \sin x$ eğrisinin $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ uzunluğunda sonsuz tane ötelemesi var. Karenin, oklu karenin, eşkenar üçgenin, satranç tahtasının döndürme simetrileri var. 0 derecelik döndürmeyi de (yani hiçbir şey yapmamayı da) simetri kabul edelim.

Teorem 1.1. *$n \geqslant 3$ olmak üzere düzgün n-gonun tam olarak $2n$ simetrisi vardır. Bunlardan n tanesi (0, $2\pi/n$, $4\pi/n$, $\ldots$, $2(n-1)\pi/n$ radyanlık) döndürme ve n tanesi yansımadır. Eğer n tek sayı ise, yansıma eksenleri n-gonun bir köşesinden ve karşı kenarın orta noktasından geçer. Eğer n çift sayı ise, yansıma eksenlerinin $n/2$ tanesi karşı köşelerden, kalan $n/2$ tanesi ise karşı kenarların orta noktalarından geçer.*

Kanıt. Alıştırma.

Özel durum. Teorem'i $n = 4$ özel durumunda kanıtlayalım. Karenin her simetrisi altında, köşeler köşelere, kenarlar kenarlara gider. Bir köşenin gideceği yer belirlendikten sonra komşu köşeler de komşu köşelere gitmek zorundadır. Örneğin $ABCD$ karesinde, A köşesi bir simetri altında B köşesine gidiyorsa, komşuları B ve D, A ve C'ye gider (sıra değişebilir, yani iki olasılık var). Ters köşeler yine ters köşelere gider; yine aynı örnekte, A, B'ye gittiği için C mutlaka D'ye gitmeli. Dolayısı ile, A'nın giedebileceği 4 köşe var, komşularının gidebileceği 2 durum var. Sonuç olarak, karenin en fazla $4 \times 2 = 8$ simetrisi olabilir. Biz zaten 8 simetri bulmuştuk, demek ki karenin tam olarak 8 simetrisi varmış. □

Çemberin simetrileri: $\theta \in [0, 2\pi)$ olmak üzere θ açılık döndürmeler ve ℓ_α merkezden geçen ve x-ekseni ile α açısı yapan doğruyu göstermek üzere, her $\alpha \in [0, \pi)$ için, ℓ_α üzerindeki yansımalar. (Sınırlı bir şeklin sonsuz hatta sayılamaz simetrisi olabilir.)

Alıştırma 1. Karenin simetrileri karenin köşegenlerini nereye götürür? (8 simetri için tek tek inceleyin.)

Alıştırma 2. $n \geqslant 3$ olsun. Düzgün n-gonda iki yansıma ekseni alın. Simetriler altında yansıma eksenleri nereye gider? Birbirine gidebilir mi?

Alıştırma 3. Paralelkenarın, sonsuz basamaklı merdivenin simetrilerini bulun.

Alıştırma 4. n-gonda iki köşe alın, A ve B diyelim. A'yı B'ye götüren kaç simetri var? Bir köşeyi yerinde bırakan tek simetri birim simetri midir?

Alıştırma 5. Okulun logosunun, barış sembolünün, geri dönüşüm sembolünün kaç simetrisi var?

Alıştırma 6. Aşağıdaki frizlerin simetrilerini bulun.

$\cdots$ L L L L $\cdots$ $\quad$ $\cdots$ L Γ L Γ $\cdots$ $\quad$ $\cdots$ V V V V $\cdots$ $\quad$ $\cdots$ N N N N $\cdots$

$\cdots$ V Λ V Λ $\cdots$ $\quad$ $\cdots$ D D D D $\cdots$ $\quad$ $\cdots$ H H H H $\cdots$

Alıştırma 7. Her yüzü bir eşkenar üçgen olan düzgün 4-yüzlüye *tetrahedron* denir. (Yunanca'da *tetra* dört, *hedra* ise oturacak yer demektir.) Tetrahedron'un tüm simetrilerini bulmaya çalışın. (Bu dersin ilk üç boyutlu örneği olduğu için bu soruda biraz zorlanabilirsiniz. Bu soruya daha sonra döneceğiz.)

Sizce, oklu kare mi daha simetriktir, dikdörtgen mi? Satranç tahtası, dikdörtgen ve oklu kareyi bir arada inceleyelim. Her birinin dörder simetrisi olduğunu biliyoruz. Bu şekillerden birinin simetri yapısı diğerlerinden farklıdır, hangisi olduğunu bulun. (*Numbers measure size, groups measure symmetry.* — Armstrong)

Gelecek derse gelmeden bir fonksiyonun tersi olması için gerek ve yeter şartın birebir ve örten olması gerektiğini öğrenin/tekrar edin.

1B Simetrilerin Bileşkeleri ve Tersleri

Bu bölümde, X, $\mathbb{R}^2$'nin boş olmayan bir altkümesi olsun. (Örneğin, kare veya oklu düzgün 6-gen.)

Tanım. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ birebir, örten, uzaklıkları koruyan ve $f(X) = X$ eşitliğini sağlayan bir gönderme ise, f'ye X'in *simetrisi* denir.

X'in tüm simterilerinin kümesini $\mathrm{Sym}(X)$ ile gösterelim.

Örnek 1. π radyanlık döndürme dikdörtgenin, karenin ve S harfinin simetrisidir.

Notasyon. ρ (okunuşu roo) harfi ile döndürmeleri gösterelim. (İngilizcesi rotation, Fransızca rotasyon olarak okunur, bu nedenle Yunan alfabesindeki ρ harfi döndürmeler için uygun bir harftir.)

ρ_α ile söz konusu şeklin merkezi etrafında saat yönündeki α radyanlık döndürmeyi göstereceğiz. Buna göre, $\rho_0 = I$ olduğunda dikkat ediniz. Ayrıca her $k \in \mathbb{Z}$ için $\rho_\alpha = \rho_{\alpha+2\pi k}$ doğrudur.

Örnek 2. E, oklu eşkenar üçgen ise, $\mathrm{Sym}(E) = \{I, \rho_{2\pi/3}, \rho_{4\pi/3}\}$.

$\mathrm{Sym}(X) = \varnothing$ olan hiçbir $X \subset \mathbb{R}^2$ olmadığına dikkat ediniz. Bunun nedeni birim dönüşümün her şeklin simetrisi olmasıdır.

Geçen dersin sonunda verdiğim ödevden dolayı şimdi simetrilerin terslerinin olduğunu biliyoruz. Bir simetrinin tersinin de simetri olduğu uygulama saatinde kanıtlanacak. Bundan sonra f'nin tersini f^{-1} ile gösterelim.

İkinci örneğe geri dönersek, gerçekten birim olmayan simetrilerin birbirinin tersleri olduğu görülür, yani $\rho_{2\pi/3}^{-1}$ ve $\rho_{4\pi/3}^{-1}$ yine oklu eşkenar üçgenin simetrileridir.

Gözlem. $\rho_\alpha \in \mathrm{Sym}(X)$ ise $\rho_\alpha^{-1} = \rho_{-\alpha} = \rho_{2\pi-\alpha} \in \mathrm{Sym}(X)$ sağlanır. Dolayısı ile tersi kendine eşit olan döndürmeler yalnızca $I = \rho_0$ ve ρ_π'dir. Öte yandan yansımaların hepsinin tersi kendine eşittir.

Fonksiyonlar üzerindeki en doğal işlem bileşke işlemidir. Her X için, X'in simetrileri kümesinin bileşke altında kapalı olduğu, yani iki simetrinin bileşkesinin de simetri olduğu uygulama saatinde kanıtlanacak.

Gözlem. Aynı nokta etrafındaki döndürmelerin bileşkesini almak çok kolaydır, çünkü $\rho_\alpha \circ \rho_\beta = \rho_{\alpha+\beta}$ sağlanır.

Yine örnek 2'ye geri dönersek, $\rho_{2\pi/3}^2 = \rho_{4\pi/3}$ olduğu için $\rho = \rho_{2\pi/3}$ kısaltmasını kullanırsak, $\mathrm{Sym}(E) = \{I, \rho, \rho^2\}$ olarak yazılabilir.

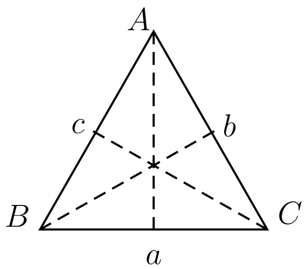
Alıştırma 8. Her $n \geqslant 4$ için, oklu düzgün n-gonun tüm simetrilerini bir döndürmenin kuvvetleri olarak yazın.

Örnek 3. D bir dikdörtgen olsun. D'nin yanısmalarını x ve y ile ve tek döndürmesi olan π radyanlık döndürmeyi ρ ile gösterirsek, $\mathrm{Sym}(D) = \{I, \rho, x, y\}$ olduğunu biliyoruz. Şimdi bu kümenin bileşkeye göre tablosunu yapalım.

	I	ρ	x	y
I	I	ρ	x	y
ρ	ρ	I	y	x
x	x	y	I	ρ
y	y	x	ρ	I

Bu kümenin başka simetri kümelerinde olmayan bazı özellikleri var. Örneğin, her eleman kendinin tersi, bu nedenle tablonun köşegeninde hep I var. Ayrıca bu kümenin elemanları bileşke altında yer değiştiriyor, bu nedenle tablo köşegene göre simetrik. Ama çizeceğimiz tabloların çoğu bu özellikleri sağlamayacak.

Örnek 4. Şimdi eşkenar üçgenin simetrilerinin tablosunu çizelim. Üçgenin köşelerine A, B ve C diyelim, bu köşelerden geçen simetri eksenlerine de sırası ile a, b ve c diyebiliriz.



Kısaca $\rho = \rho_{2\pi/3}$ yazalım ve yansımaları da eksen adları ile gösterelim. O zaman simetri kümesi $\{I, \rho, \rho^2, a, b, c\}$ olur.

	I	ρ	ρ^2	a	b	c
I	I	ρ	ρ^2	a	b	c
ρ	ρ	ρ^2	I	b	c	a
ρ^2	ρ^2	I	ρ	c	a	b
a				I	ρ^2	
b						
c	c	b				

Tablodaki boşlukların doldurulması alıştırma olarak okuyucuya bırakılmıştır.

Gözlemler.

1. Yukardaki tablonun sol üst 3×3'lük bölümü oklu eşkenar üçgenin tablosu oldu.
2. İki yansımanın bileşkesi hep döndürme çıktı. Yansımalar önü ve arkayı (veya sağ ve sol eli) değiştirdikleri için çift sayıda yansımanın bileşkesi hiçbir zaman yansıma olamaz.
3. Her iki tabloda da sudoku özelliğine rastladık, yani her satırda ve sütunda her eleman tam olarak bir defa görünüyor. Bu tesadüf değil, nedenini gelecek derste öğreneceğiz.
4. f ve g birimden farklı iki simetri ise $f \circ g = f$ hiçbir zaman sağlanmaz, çünkü iki tarafın soldan f^{-1} ile bileşkesini alırsak, eşitlik $g = I$ olur. Benzer şeklide $f \circ g = g$ de sağlanmaz. Sonuç olarak, birimden farklı iki simetrinin bileşkesi her zaman üçüncü bir simetri verir. Bunu tablolarda da kontrol ediniz.

Alıştırma 9. Karenin simetrilerinin tablosunu yapın.

Alıştırma 10. (a) Eğer $\mathrm{Sym}(X)$ yalnızca birim ve yansımalardan oluşuyorsa, $\mathrm{Sym}(X)$ iki elemanlıdır.
(b) Eğer $\mathrm{Sym}(X)$ üç elemanlı ise, bu elemanlar birim, bir döndürme ve bir yansıma olamaz.

Alıştırma 11. Türkçe ve İngilizce alfabedeki toplam 32 harften oluşan kümenin simetri çeşitliliğine göre bir parçalanışını verin.

1C Tabloların Sudoku Özelliği

İncelediğimiz tablolarda her satırda ve sütunda her eleman tam olarak bir defa görünüyor; bu özelliğe tabloların sudoku özelliği diyelim. Tablolarda bu özelliğin bulunma nedenini araştıralım.

Simetri kümemiz $\{I, f_1, f_2 \ldots, f_n\}$ olsun. O zaman tablodaki $k+1$'inci satırın girdileri sırası ile $f_k \circ I, f_k \circ f_1, \ldots, f_k \circ f_n$ olur.

	I	f_1	f_2	$\cdots$	f_n
I	I	f_1	f_2	$\cdots$	f_n
f_1	f_1	f_1^2	$f_1 \circ f_2$	$\cdots$	$f_1 \circ f_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
f_k	f_k	$f_k \circ f_1$	$f_k \circ f_2$	$\cdots$	$f_k \circ f_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
f_n	f_n	$f_n \circ f_1$	$f_n \circ f_2$	$\cdots$	f_n^2

Bu satırda iki girdinin eşit olması demek, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ değerleri için $f_k \circ f_i = f_k \circ f_j$ anlamına gelir. Simetrilerin hepsi tanım gereği birebir ve örtendir, dolayısı ile tersleri vardır. O halde son eşitliğin soldan f_k^{-1} ile bileşkesini alalım ve $f_k^{-1} \circ f_k \circ f_i = f_k^{-1} \circ f_k \circ f_j$ eşitliğini ve sadeleştirmeden sonra $f_i = f_j$ eşitliğini elde edelim. Ancak $i \neq j$ olarak seçildiği için $f_i = f_j$ olamaz. Bu da $k + 1$'inci satırın tüm girdilerinin farklı olması gerektiğini kanıtlar. Ancak satır sayısının herhangi bir özelliğini kullanmadığımız için yazdığımız kanıt tüm satırlar için geçerlidir. Sonuç olarak, bir simetri kümesinin bileşke işlemine göre çizilmiş tablosunun her satırında here eleman tek bir defa bulunur cümlesi kanıtlanmış oldu.

Benzer cümle sütunlar için de kanıtlanabilir, tek dikkat edilmesi gereken nokta, aynı sütundaki iki girdinin eşitliği $f_i \circ f_k = f_j \circ f_k$ anlamına geleceği için, eşitliğin bu sefer sağdan f_k^{-1} ile bileşkesini almak olacak.