Diferensiyel Geometri : Bahar 2018, Vize 1

1. Sinav Pazartesi 12 Mart, 15:00 - 16:30 arasında işlenecektir.
2. Kopya çeken oğrencilere -100 puan verilecektir.
3. Çantalar, cep telefonları ve diğer eşyaları sınıfın arka kısımda birakınız.

Sorular

Question 1. *Aşağıdaki eğri,*

$$\gamma(t) = (a(t - \sin(t)), a(1 - \cos(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

cycloid denir.

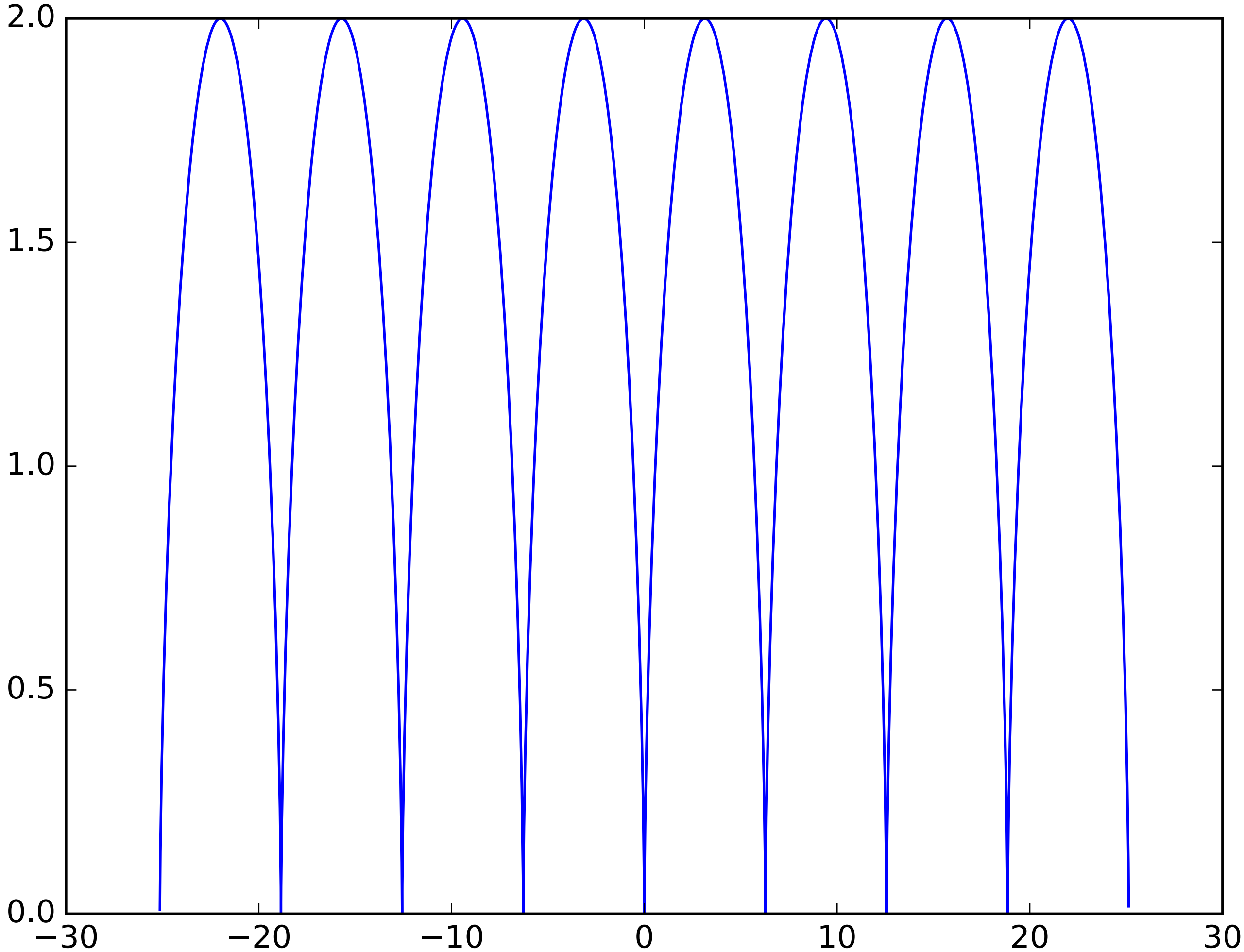
1. *(10 puan) Bunu çızınız.*
2. *(5 puan) Her t için, bu eğrinin x eksen üzerinde olduğunu gösteriniz. Hangi t için bu eğri x eksenle kesişir?*
3. *(10 puan) Eğri parçası,*
$$\gamma(t), \quad t \in [0, 2\pi],$$
nın yay uzunluğu hesaplayınız. Net ve basit ifadesi mümkün.
4. *(10 puan) Eğri parçası,*
$$\gamma(t), \quad t \in [0, 2\pi],$$
ve x eksen arasındaki alan hesaplayınız.
5. *(10 puan) Her noktada onun eğrilik hesaplayınız. (Dikkat: Bu birim hız parametrizasyonu değil)*

Kanıt. Burada $a > 0$ olarak kabul edeceğiz.

y ko-ordinat $y(t) = a(1 - \cos(t)$ incelersek, her t için $\cos(t) \leq 1$ olduğundan dolayı, cycloid hep x eksen üzerindedir. Ayrica, $y(t) = 0$ ise, $t = 2n\pi$ olmak zorunda ($n \in \mathbb{Z}$).

Yay uzunluğu ise,

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} ||\dot{\gamma}(t)||dt, \\ &= \int_0^{2\pi} ||\left(a - a\cos(t), a\sin(t)\right)||dt, \\ &= \int_0^{2\pi} a\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos(t)}dt, \\ &= 2a \int_0^{2\pi} |\sin\left(\frac{t}{2}\right)|dt, \\ &= 8a. \end{aligned}$$



Şekil 1: Cycloid

Alan için,

$$\begin{aligned} A &= \int_{t=0}^{2\pi} y dx, \\ &= \int_0^{2\pi} a(1-\cos(t))\, a\,(1-\cos(t))\, dt, \\ &= 3a^2\pi. \end{aligned}$$

Eğrilik için,

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{||\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)||}{||\dot{\gamma}(t)||^3}, \\ &= \frac{||(a - a\cos(t), a\sin(t)) \times (a\sin(t), a\cos(t))||}{||(a - a\cos(t), a\sin(t))||^3}, \\ &= \frac{1-\cos(t)}{a(2-2\cos(t))^{3/2}}, \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}a\sqrt{1-\cos(t)}}. \end{aligned}$$

□

Question 2. *Aşağıdaki eğri için $\kappa, \tau, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{n}$ hesaplayınız.*

$$\gamma(t) = \left(\frac{t+\sin(t)}{2}, \frac{t-\sin(t)}{2}, \frac{\cos(t)}{\sqrt{2}} \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Kanıt.

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \left(\frac{1+\cos(t)}{2}, \frac{1-\cos(t)}{2}, \frac{-\sin(t)}{\sqrt{2}} \right). \\ \ddot{\gamma} &= \left(\frac{-\sin(t)}{2}, \frac{\sin(t)}{2}, \frac{-\cos(t)}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

Kolay bir hesaplamadan sonra,

$$||\dot{\gamma} \equiv 1, \quad ||\ddot{\gamma}|| \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Birinci hesaplamaya göre eğri birim hızdır. Ikinciden dolayı,

$$\kappa \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ayrıca,

$$\mathbf{t} = \frac{\dot{\gamma}}{||\dot{\gamma}||} = \left(\frac{1+\cos(t)}{2}, \frac{1-\cos(t)}{2}, \frac{-\sin(t)}{\sqrt{2}} \right).$$

Normal vektör ise,

$$\mathbf{n} = \frac{\ddot{\gamma}}{||\ddot{\gamma}||} = \left(\frac{-\sin(t)}{\sqrt{2}}, \frac{\sin(t)}{\sqrt{2}}, -\cos(t) \right).$$

Binormal vektör ise,

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \left(\frac{1-\cos(t)}{2}, \frac{1+\cos(t)}{2}, \frac{-\sin(t)}{\sqrt{2}} \right).$$

$\dot{\mathbf{b}} = -\tau\, \mathbf{n}$ olduğundan dolayı,

$$\left(\frac{\sin(t)}{2}, \frac{-\sin(t)}{2}, \frac{-\cos(t)}{\sqrt{2}}\right) = -\tau \left(\frac{-\sin(t)}{\sqrt{2}}, \frac{\sin(t)}{\sqrt{2}}, -\cos(t)\right).$$

Dolaysıyla,

$$\tau \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Not : Eğrilik ve torsion sabit olduğundan dolayı, bu bir izometri altında bir helikstir. □

Question 3. *Eğer regular bir eğrinin her noktada torsion τ sıfır ise, eğriye içeren bir düzlem olduğunu kanıtlayınız.*

Kanıt. Eğri birim hız olsun (torsion zaten eğrinin birim hız paramterizasyon üzerinde tanımlı). $\dot{\mathbf{b}} = -\tau\, n$ olduğuna göre, $\tau \equiv 0$ den dolayı,

$$\dot{\mathbf{b}} \equiv 0.$$

Demek ki, bir sabit vektör c için, $\mathbf{b} \equiv c$. Birim hız olduğu için $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ bir orthonormal bazdır.

$$\frac{d}{dt}\gamma(t) \cdot \mathbf{b}(t) = \mathbf{t} \cdot \mathbf{b} \equiv 0.$$

Demek ki, bir sabir numara d için,

$$\gamma \cdot c = \gamma \cdot \mathbf{b} \equiv d.$$

Bu bir düzlemin denklemtir. □

Question 4. *$\gamma(0)$ ve $\gamma(s)$ arasındaki yay uzunluğu $l(s)$,*

$$l(s) = s^2,$$

sağlayan bir düzgün regular eğri bulunuz.

Kanıt. Bunu sağlayan eğri için,

$$\int_0^s ||\dot{\gamma}(t)||dt = s^2,$$

olduğunu zorunda. Demek ki,

$$||\dot{\gamma}(s)|| = 2s.$$

Bunu sağlamak için,

$$\dot{\gamma}(s) = (2s\cos(s), 2s\sin(s)),$$

olarak alabiliriz. Demek ki,

$$\gamma(s) = (2s\sin(s) + 2\cos(s), -2s\cos(s) + 2\sin(s)),$$

bunu sağalayan bir eğridir. □