

Diferensiyel Geometri : Bahar 2018, Ödev 3

Teslim Tarihi : 12 Mart

1. Izoperimetrik eşitsizliği,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

için uygulayıp,

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)} dt \geq 2\pi\sqrt{ab},$$

geçerli olduğunu kanıtlayınız. Bu arada, yukarıdaki integral *elliptik integral* denir ve onun için temel bir ifadesi yok.

2. Aşağıdaki eğri,

$$\gamma(t) = ((1 + a \cos(t)) \cos(t), (1 + \cos(t)) \sin(t)),$$

inceleyiniz. $|a| < 1$ ise kendine kesişmeyen olduğunu gösterniz. $|a| > 1$ ise $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ 'nın üç bağlantılı bölgelerden oluştuğunu kanıtlayınız. Bunlardan ikinin sınırlı olduğunu ve birinin sınırsız olduğunu gösteriniz. $a = \pm 1$ ise ne söylenebilir?

3. Sabit eğrilik ve sabit torsion olan eğriler için basit bir ifade bulunuz.
4. $\gamma * subset \mathbb{R}^2$ bir düzlemsel eğri olsun. Eğer κ_s sabit bir pozitif sayı ise, onun bir çemberin parçası olduğunu kanıtlayınız.
5. (Involute) $\gamma(s)$ bir birim hız düzgün regular eğri olsun. l uzunluğu olan bir ip $\gamma(0)$ 'dan başlayarak eğri üzerinde sarınız ve bunun dışında ip sert kalsın. O zaman ip'in ucu noktasının,

$$\delta(s) := \gamma(s) + (l - s)\dot{\gamma}(s),$$

üzerinde hareket ettiğini gösteriniz. δ eğri γ eğrinin *involute* denir. Eğer κ_s her noktada pozitif ise, δ eğrinin eğriliği,

$$\kappa_s^\delta(s) = \frac{1}{l - s},$$

olduğunu kanıtlayınız.