Diferensiyel Geometri : Bahar 2018, Ödev 2
Teslim Tarihi : 5 Mart

1. Bu sorunun cevapi gelecek hafta kullanacağız. $u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2$ altı birim uzunluk olan vektör olsun ve u_1, v_1, w_1 birbirine dik olsun ve u_2, v_2, w_2 biribirine dık olsun. O zaman,
$$T(u_1) = u_2, \quad T(v_1) = v_2, \quad T(w_1) = w_2$$
sağlayan bir lineer izometri T olduğunu gösteriniz. Burada lineer izometri demek T lineer bir dönüşümdür ve her vektör u için $||T(u)|| = ||u||$ geçerlidir.

2. Aşağıdaki eğriler için $\kappa, \tau, \mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ hesaplaynız ve Frenet-Serret denklemlerin geçerli olduğunu gösteriniz,
   (a) $\gamma(t) = \left(\frac{1}{3}(1+t)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}, t/\sqrt{2}\right)$.
   (b) $\gamma(t) = \left(\dfrac{4}{5}\cos(t), 1-\sin(t), -\dfrac{3}{5}\cos(t)\right)$.

   Not : Bu eğriler brim hızdır ve bu hesaplarınızı kolaylaştırır.

3. *Viviani Eğri* yarı çapı 1/2 olan silinder $x^2 + y^2 = 1/4$ ve yarıçapı 1 olan ve merkezi $(-1/2, 0, 0)$ olan küre'nin kesişimdir. Bunun için
$$\gamma(t) = \left(\cos^2(t) - \frac{1}{2}, \sin(t)\cos(t), \sin(t)\right),$$
nın bir parametrizasyon olduğunu gösteriniz. Bu eğri için $\kappa, \tau, \mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ hesaplayınız.

4. Eğer regular bir eğrinin her noktada torsion τ sıfır ise, eğriye içeren bir düzlem olduğunu kanıtlayınız. Fikir için aşağıdakı soru yardımcı olabilir.

5. Aşağıdaki teoreminın ispatının her satır için net ve saf bir açıklama yazınız. (Mantıksız bir şey kesinikle yazmayınız).

   Theorem 1. *Varsayalım ki birim hız bir eğri bir küre üzerindedir (örnek : Viviani eğri). O zaman,*
$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\dot\kappa}{\tau\kappa^2}\right) = \frac{\tau}{\kappa}.$$

Kanıt. Küre üzerinde olduğunu için, oyle bir vektör v (kürenin merkezi) ve bir sabit sayı r (kürenin yarıçapı) var ki,

$$||\gamma(s) - v|| = r, \quad \forall s.$$

$$\begin{aligned}
<\gamma(s) - v, \gamma(s) - v> &= r^2, && (1)\\
<\mathbf{t}(s), \gamma(s) - v> &= 0, && (2)\\
<\mathbf{n}(s), \gamma(s) - v> &= \frac{-1}{\kappa}, && (3)\\
<\mathbf{b}(s), \gamma(s) - v> &= \frac{\dot{\kappa}}{\tau\kappa^2}. && (4)
\end{aligned}$$

Tekrar türev alsak,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{\kappa}}{\tau\kappa^2}\right) &= <\dot{\mathbf{b}}(s), \gamma(s) - v> + <\mathbf{b}(s), \dot{\gamma}(s)>, && (5)\\
&= \frac{\tau}{\kappa}. && (6)
\end{aligned}$$

□

Not : Bunun terste doğrudur. Bunun ispatını sonra göreceğiz.

6. Viviani eğri için soru 5'nın bu denklemi geçerli olduğunu gösteriniz.