

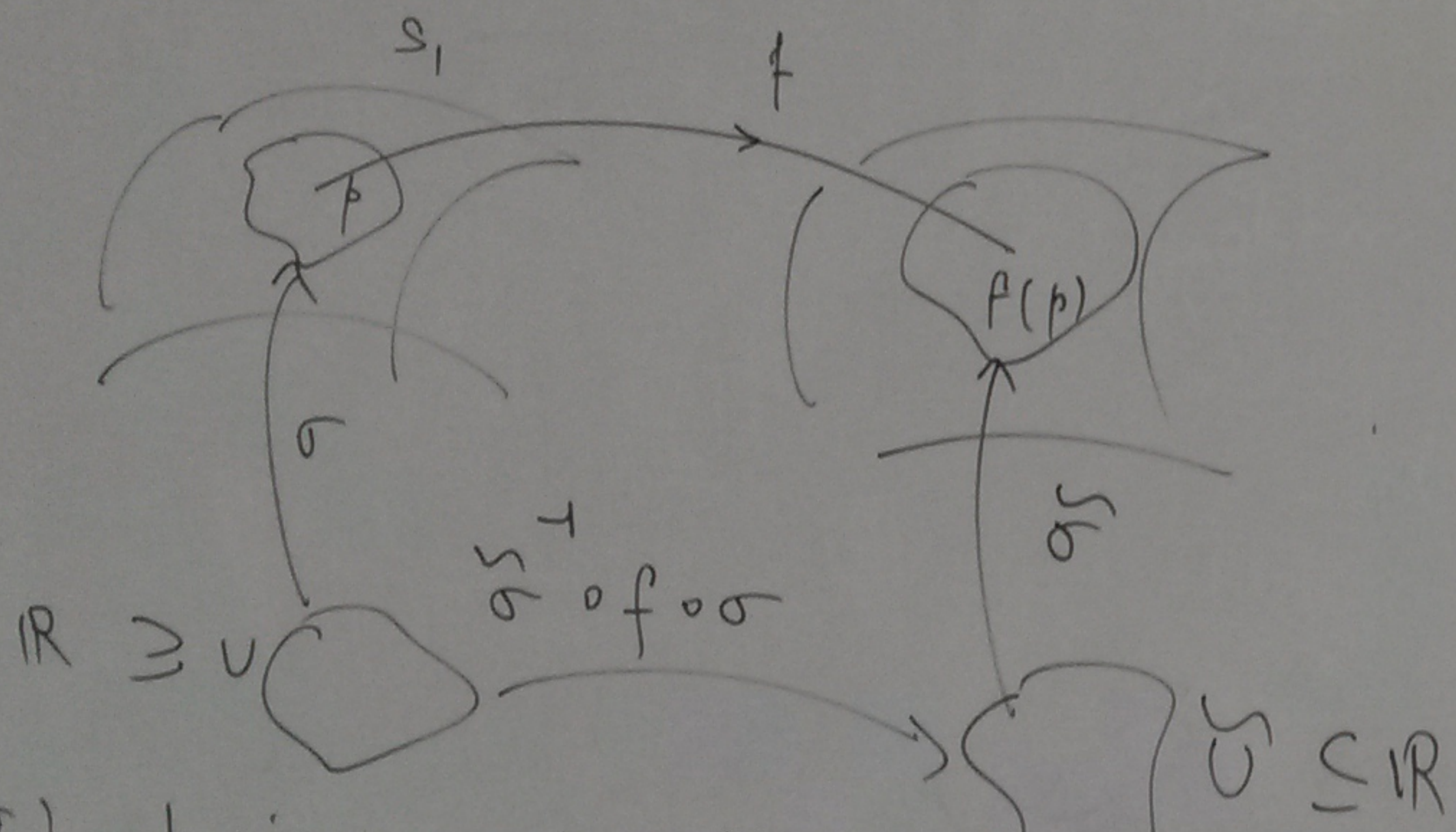
$$(f \circ \gamma)'(0) \in T_{f(p)}(S_2)$$

- ① İyi Tanımlı
- ② Lineer

III. 4 Tangent (Teğet) vektörleri ve türev.

Tanım III. 4.5 (Türevlenebilirliği)

S_1, S_2 yüzeyler olsun
 $f: S_1 \rightarrow S_2$ $f(p) = q$



(U, σ) p içeren bir chart olsun
 $(\tilde{U}, \tilde{\sigma})$ $f(p)$ içeren bir chart olsun

Eğer $\Phi := \tilde{\sigma}^{-1} \circ f \circ \sigma : U \rightarrow \tilde{U}$
türevlenebilir (düzgün) ise,
 f türevlenebilir (düzgün) denir.

①

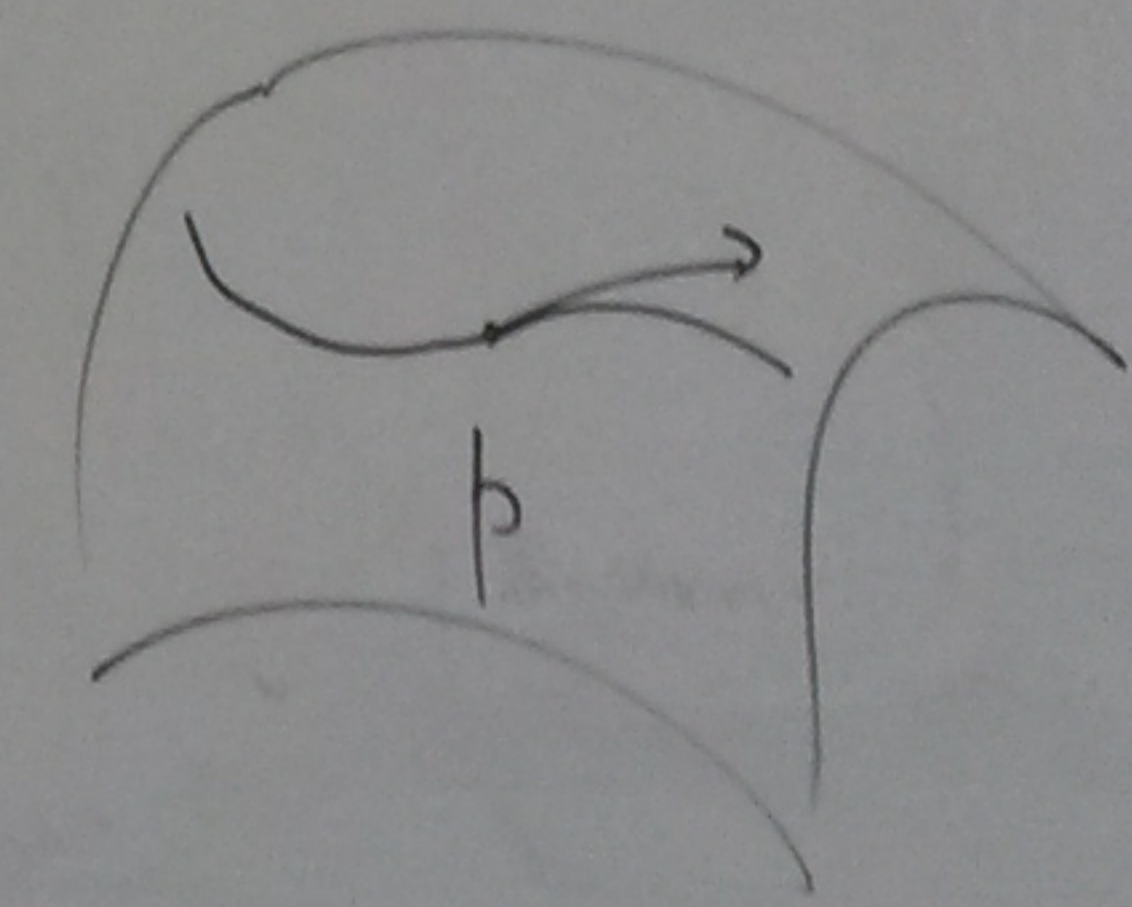
Not
Bizim yüzeyler
hepsi
düzgün
olacak
(σ : Düzgün
olacak)

Hatırlatma

S : Düzgün Regular Yüzey

$$T_p(S) := \left\{ \gamma'(0) \mid \gamma: (a, b) \rightarrow S \right. \\ \left. \gamma(0) = p \right. \\ \left. \text{Düzgün} \right\}$$

(Teğet Düzlem)



Tanım III. 4.6 (Türev)

$$f: S_1 \rightarrow S_2$$

Türevlenebilir

$p \in S_1$ olsun.

$\gamma: (\alpha, \beta) \rightarrow S_1$ düzgün eğri

$$\gamma(0) = p$$

0 zaman

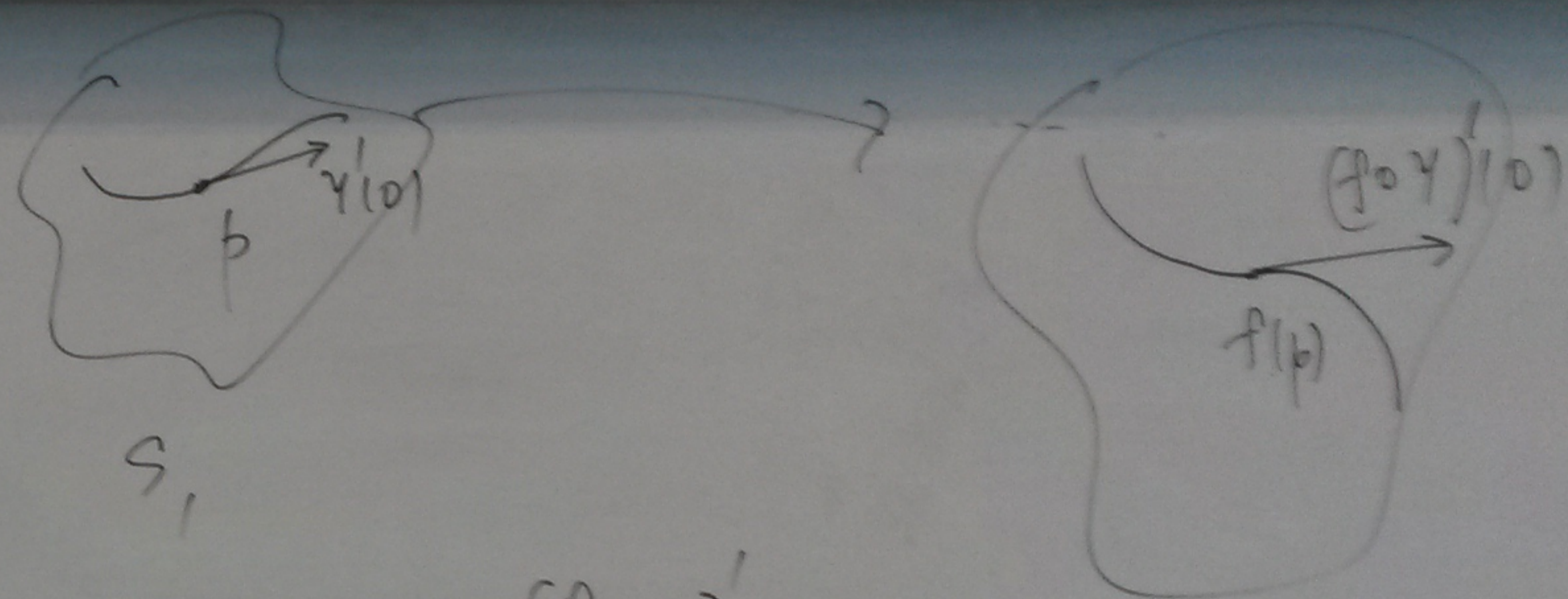
$$\gamma'(0) \in T_p(S_1)$$

Aynı

$$f \circ \gamma: (\alpha, \beta) \rightarrow S_2$$

$$f \circ \gamma(0) = f(p)$$

$$(f \circ \gamma)'(0) \in T_{f(p)}(S_2)$$



$$\gamma'(0) \xrightarrow{D_p f} (f \circ \gamma)'(0)$$

Türev $\gamma'(0) \rightarrow (f \circ \gamma)'(0)$ gönderen fonksiyondur.

$$D_p f: T_p(S_1) \rightarrow T_{f(p)}(S_2)$$

Bunu göstermek lazım

① İyi Tanımlı

② Lineer

$\Rightarrow$ Türev iyi tanımlı.

$\gamma'(0)$
ile bağlı.

$$\left(\sigma(a, b) = p \right) \quad D_p f \left[\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right] = \frac{d}{dt} f \circ \sigma(a + at, b + bt) \Big|_{t=0}$$

Türev İyi Tanımlıdır

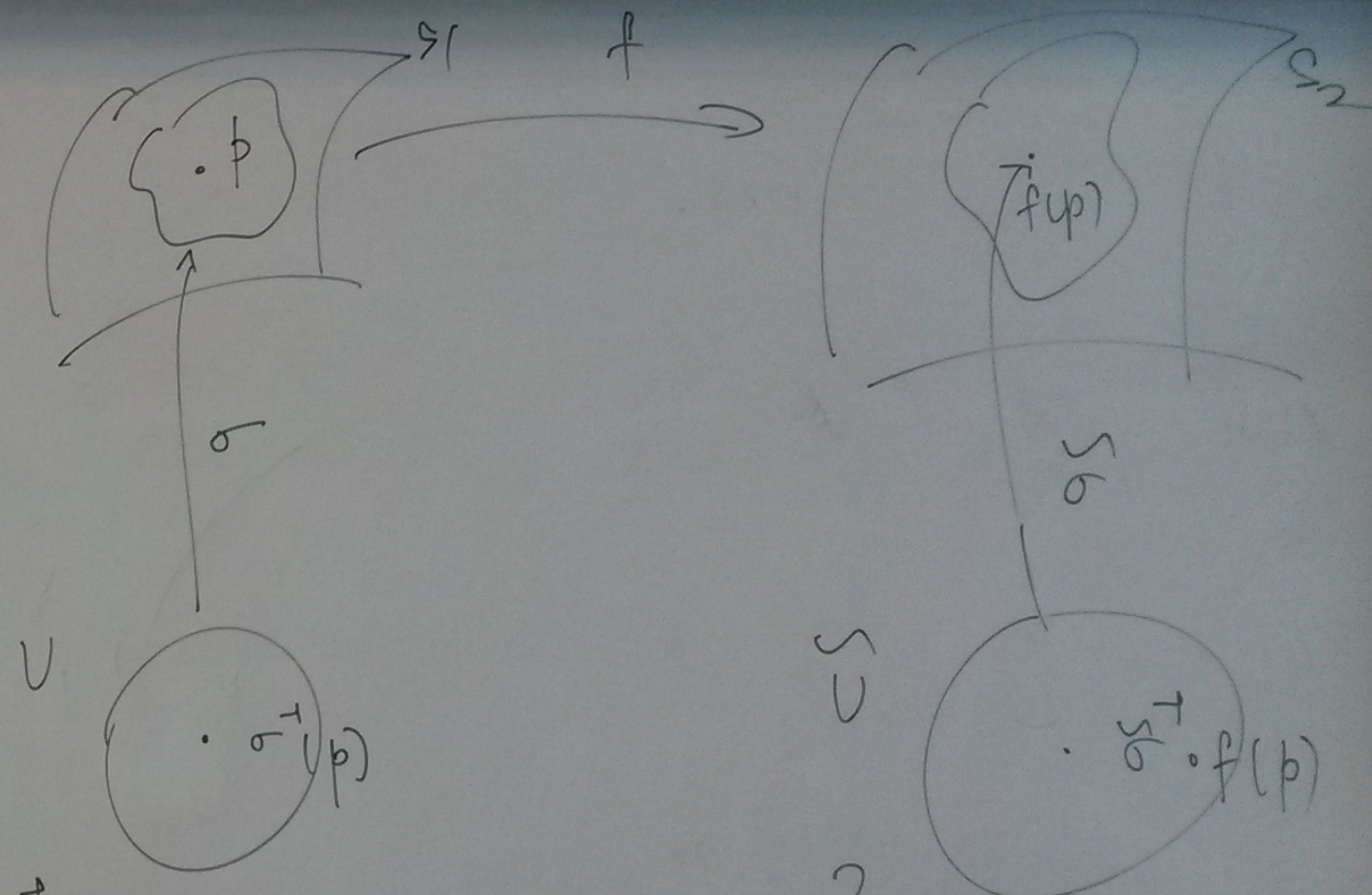
$\xi \in T_p(S_1)$ bir teğet
vektör olsun.

$\gamma: (\alpha, \beta) \rightarrow S_1, \gamma(0) = p$

ve $\gamma'(0) = \xi$ sağlayan
bir eğri olsun.

Türev: $\xi \rightarrow (f \circ \gamma)'(0) \in T_{f(p)}(S_2)$

Bunu göstermeliyiz: $(f \circ \gamma)'(0)$ γ ile
bağımsız.



$$\sigma^* \circ \gamma: (\alpha, \beta) \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$$

$\Rightarrow$ Böyle düzlem $(a(t), b(t))$ var ki

$$\sigma^* \circ \gamma(t) = (a(t), b(t))$$

$$\Rightarrow \gamma(t) = \sigma(a(t), b(t))$$

$$\Rightarrow \gamma'(0) = \sigma_u a'(0) + \sigma_v b'(0)$$

$$\begin{aligned}\sigma^T \cdot \gamma(t) &= (a(t), b(t)) \\ \Rightarrow \gamma(t) &= \sigma(a(t), b(t)) \\ \Rightarrow \gamma'(0) &= \sigma_u a'(0) + \sigma_v b'(0)\end{aligned}$$

σ_u ve σ_v lineer bağımsız
 $\xi = \gamma'(0) = \sigma_u a'(0) + \sigma_v b'(0)$
 olduğu için, $a'(0)$ ve $b'(0)$
 γ ile değil, sadece ξ ile
 alakalı.

$$\xi \xrightarrow{T_p f} (f \circ \gamma)'(0)$$

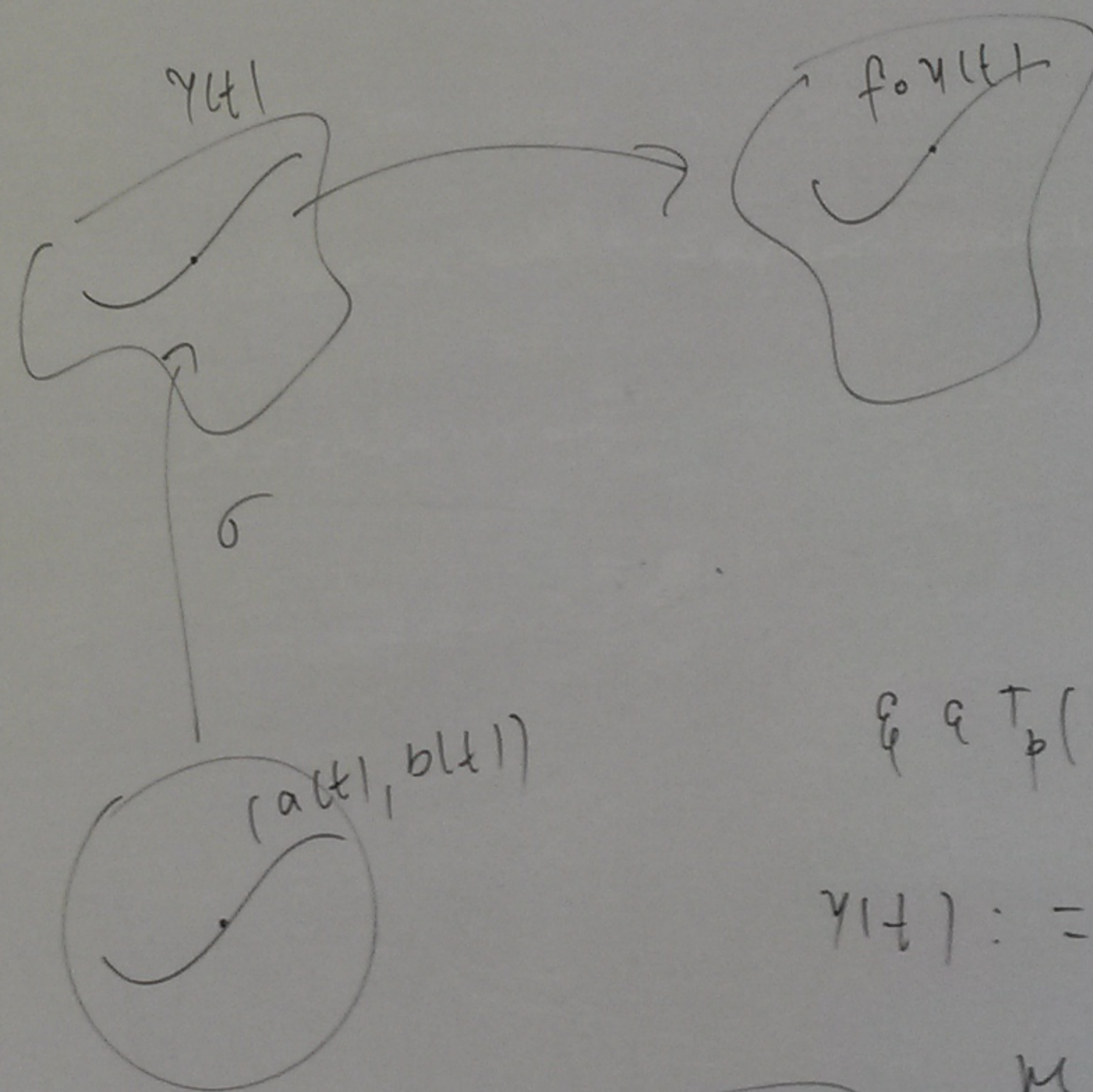
$$\begin{aligned}(f \circ \gamma)(t) &= (f \circ \sigma)(a(t), b(t)) \\ &= g(a(t), b(t))\end{aligned}$$

$$g = f \circ \sigma$$

$$(f \circ \gamma)'(0) = \frac{\partial g}{\partial u} a'(0) + \frac{\partial g}{\partial v} b'(0)$$

$\Rightarrow$ Türev iyi tanımlı.

γ ile
 alakasız
 sadece
 $\gamma'(0)$
 ile bağlı.



$$\sigma(a, b) = p$$

Türev lineer bir
 dönüşümdür.

Her $p \in S_1$ için

$$D_p f : T_p(S_1) \rightarrow T_{f(p)}(S_2)$$

lineer.

p noktasındaki
 türev

$$\begin{aligned}\xi \in T_p(S_1) &\Rightarrow \text{Oyle } \alpha, \beta \text{ var ki} \\ \xi &= \alpha \sigma_u + \beta \sigma_v\end{aligned}$$

$$\gamma(t) := \sigma(a + \alpha t, b + \beta t) \quad \text{Eğri}$$

$$\text{ve } \gamma'(0) = \xi$$

$$D_p f [\xi] = \left. \frac{d}{dt} f \circ \sigma(a + \alpha t, b + \beta t) \right|_{t=0}$$

Birinci Temel form: $du^2 + dv^2$

$$D_p f [\xi] = \underbrace{\alpha \frac{\partial (f \circ \sigma)}{\partial u} (a, b)}_{\widetilde{\sigma}_u} + \underbrace{\beta \frac{\partial (f \circ \sigma)}{\partial v} (a, b)}_{\widetilde{\sigma}_v}$$

$\widetilde{\sigma}_u, \widetilde{\sigma}_v$ ξ ile bağımsız

$$\text{i.e. } D_p f [\alpha \sigma_u + \beta \sigma_v] = \alpha \widetilde{\sigma}_u + \beta \widetilde{\sigma}_v$$

$$\Rightarrow D_p f : T_p(S_1) \xrightarrow{f(p)} T_{f(p)}(S_2) \text{ lineerdir.}$$

$$h = \langle \sigma_p, \sigma_p \rangle = \sin^2 \theta$$

$$d\theta^2 + \sin^2 \theta dp^2$$

III.5 Birinci Temel Formu

S : Düzgün regular eğri

$$\gamma: (a, b) \longrightarrow S$$

Eğrinin uzunluğu

$$l(s) := \int_0^s \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

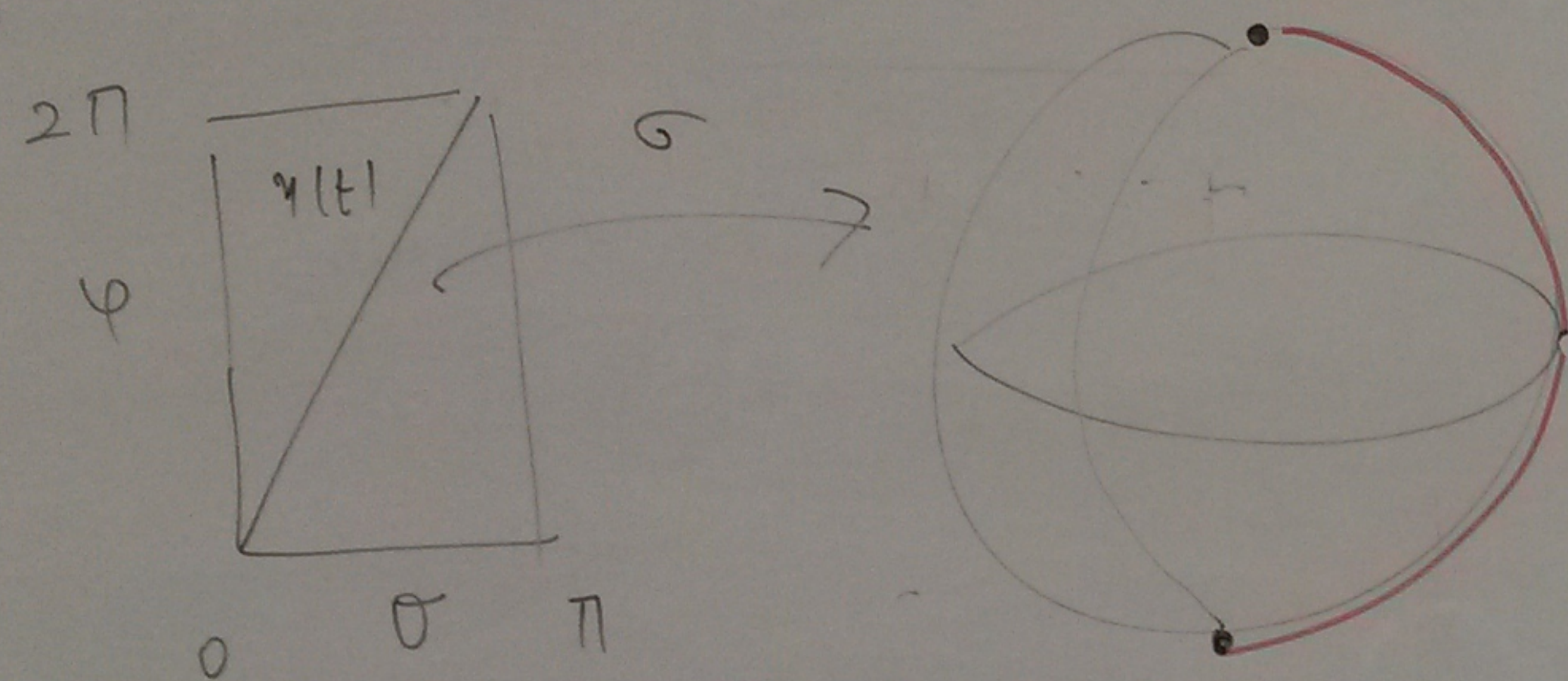
$$\sigma: \underbrace{U}_{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^2}} \longrightarrow S \quad \text{bir chart olsun}$$

$$\dot{\gamma} = \alpha \sigma_u + \beta \sigma_v$$

$$\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = \alpha^2 \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle + 2\alpha\beta \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle + \beta^2 \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle$$

Hesaplama III.5.4

$\sigma: U \rightarrow S$ bir chart olsun.



$$\gamma(t) = (t, 2t) \quad t \in (0, \pi)$$

$$\sigma \circ \gamma(t) : (0, \pi) \rightarrow S^2$$

Bunun uzunluk nedir?

$$\gamma(t) = \sigma(a(t), b(t))$$

$$\gamma: (\alpha, \beta) \rightarrow S$$

uzunluk?

$$\int_0^{\pi} \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_0^{\pi} \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle^{1/2} dt$$

$$\dot{\gamma} = \sigma_u a' + \sigma_v b'$$

$$\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = \underbrace{(a')^2 \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle}_{(E)} + \underbrace{2(a')(b') \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle}_{(F)} + \underbrace{(b')^2 \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle}_{(G)}$$

$$\int_0^{\pi} \sqrt{E(a')^2 + 2F(a')(b') + G(b')^2} dt$$

$t \in (\alpha, \beta)$
Yüzeye giden
bir eğri.

(7)

$$\gamma(t) = (t, \theta(t)) = (a(t), b(t))$$

$$\sigma_0 \gamma : [0, \pi] \rightarrow S^2$$

Uzunluk $\int_0^\pi \sqrt{1 + \sin^2 t \cdot 4} dt$

$\hookrightarrow (b')^2$

Küre: $E = 1$

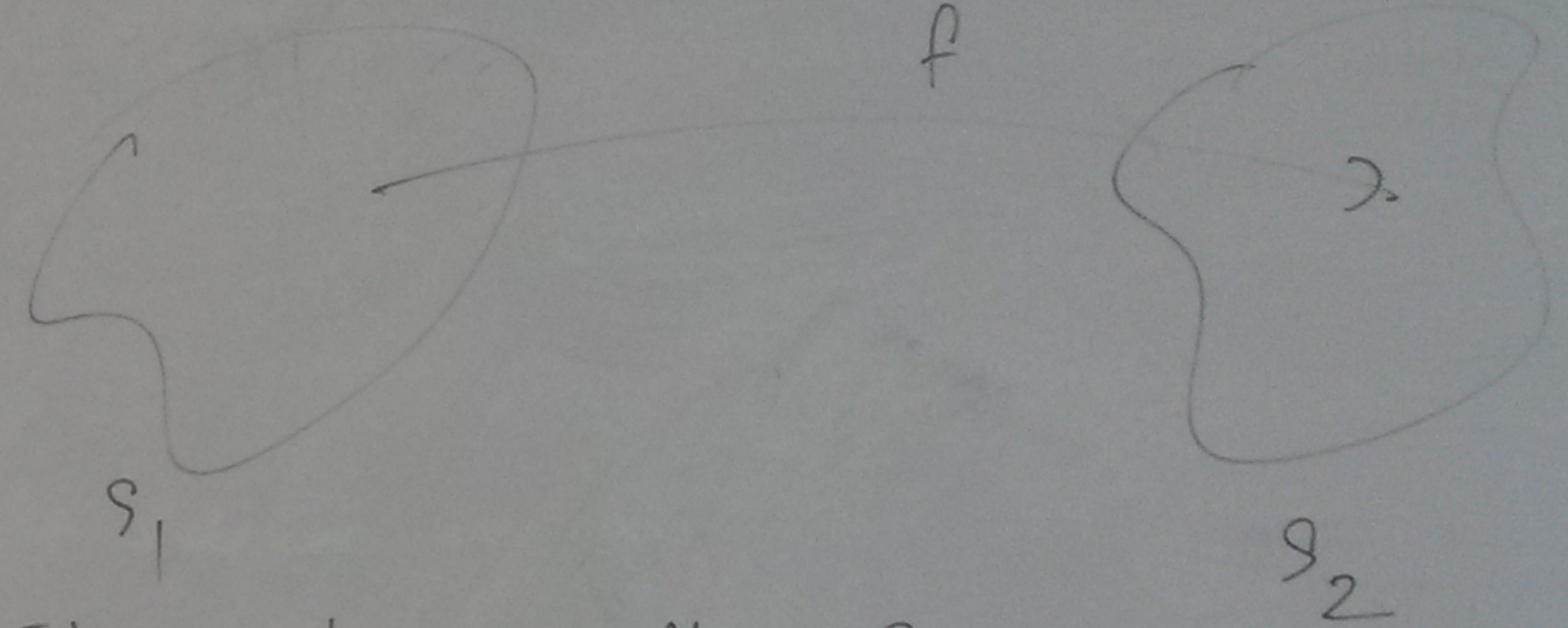
$F = 0$

$\theta = \sin^2 \theta$

II-6

Mesafe koruyan dönüşümler.

(8)



Tanım

Eğer her $\gamma \subset S_1$ eğri

için γ 'nın yay uzunluğu

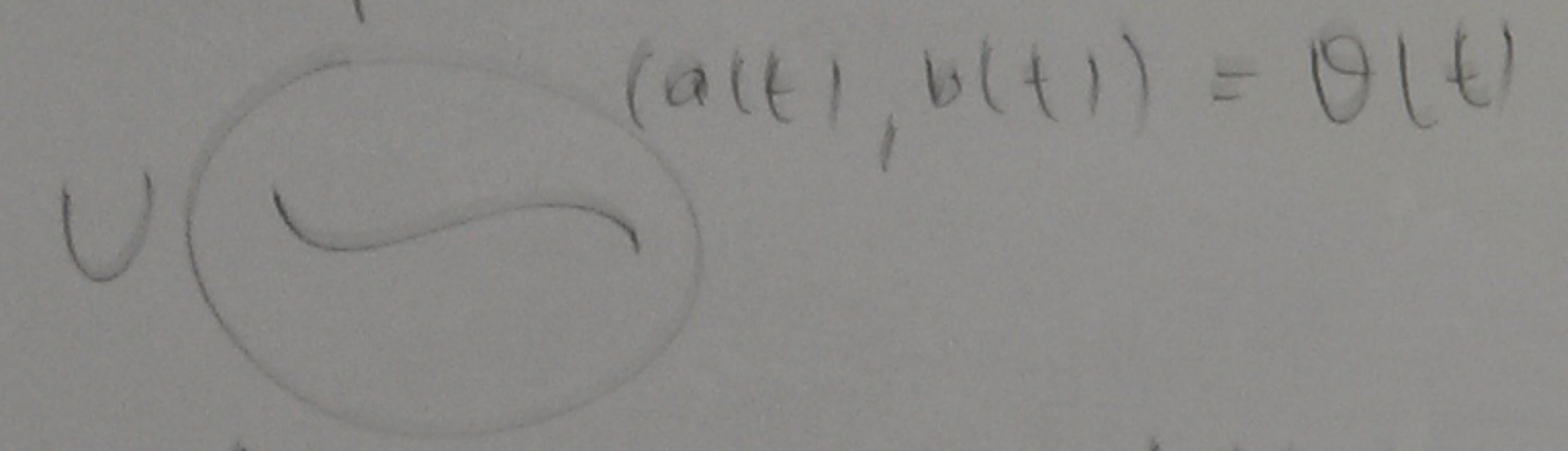
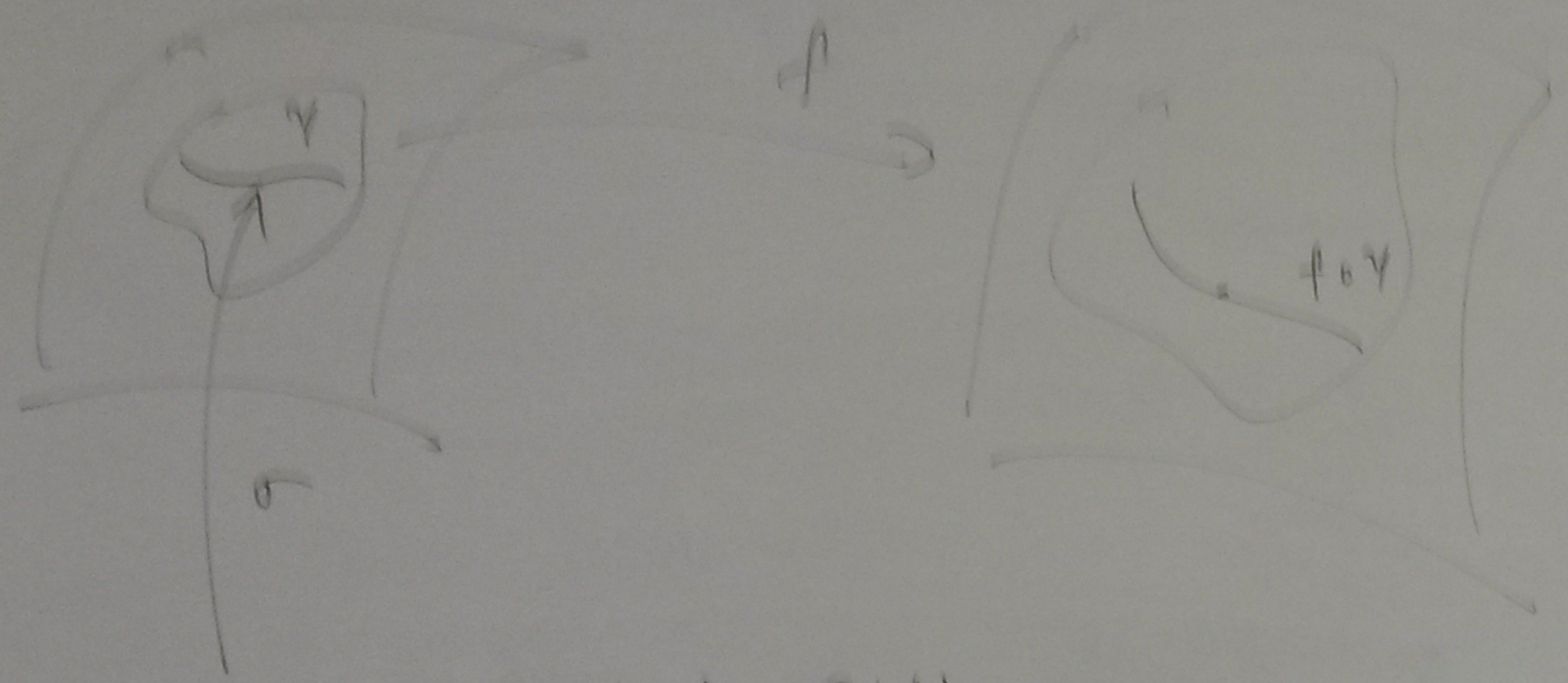
$\gamma \subset S_2$ 'nin yay uzunluğu

aynı ise f 'e YEREL MESAFE

KORUYAN DÖNÜŞÜM DİMECEĞİZ.

Birinci temel form $du^2 + dv^2$
 Birinci temel form $du^2 + dv^2$
 Bu yerel geometridir.

$2(x^2 + y^2) + 4u + 4v = 1$
 $2(x^2 + y^2) + 4u = 4 \quad (x, y) \rightarrow \left(\frac{4x}{2u+4}, \frac{4y}{2u+4}, \frac{2u+4}{2u+4} \right)$
 $d = \frac{4}{4 + x^2 + y^2}$



γ 'nin yay uzunluğu
 $f \circ \gamma$ 'nin yay uzunluğu

$$\int_0^S \|(\sigma \circ \theta)'(t)\| dt$$

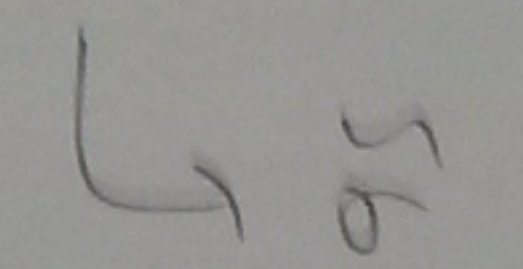
$$\int_0^S \|(f \circ \sigma \circ \theta)'(t)\| dt$$

Her t için bu integraler aynı.
 $\Rightarrow$ Her $t \in I$ için

$$\|(\sigma \circ \theta)'(t)\| = \|(f \circ \sigma \circ \theta)'(t)\|$$

$$= \|(\tilde{\sigma} \circ \theta)'(t)\|$$

$(U, \sigma) : S_1$ için bir chart
 $(U, f \circ \sigma) : S_2$ için bir chart



Her eğri için yay - uzunluğu aynı ise
 her a, b için

$$E^2(\dot{a}) + 2F(\dot{a})(\dot{b}) + G^2(\dot{b}) =$$

$$\tilde{E}^2(\dot{a}) + 2\tilde{F}(\dot{a})(\dot{b}) + \tilde{G}^2(\dot{b})$$

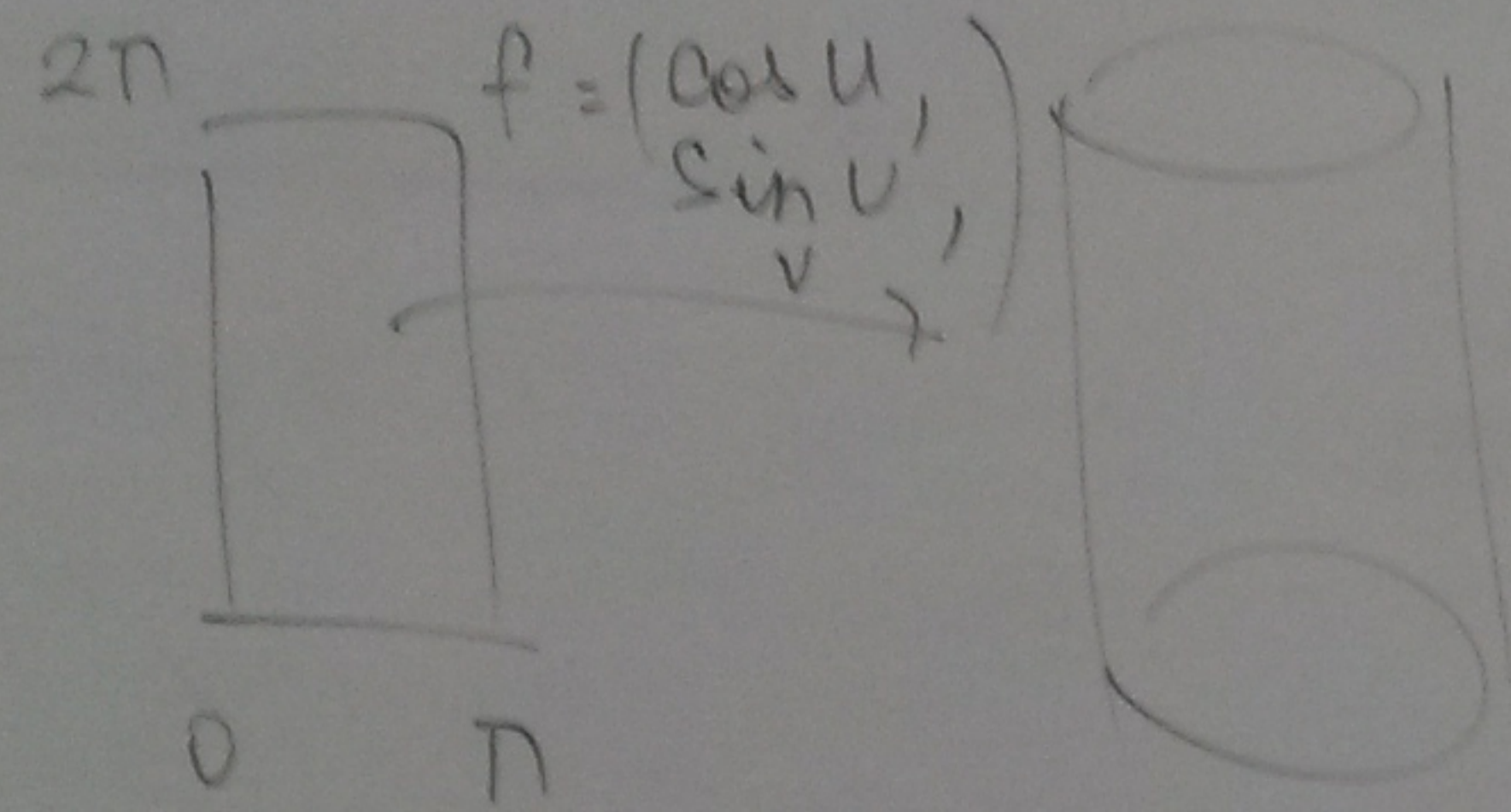
$E, F, G : \sigma$ 'e göre 1. temel form S_1
 $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G} : \tilde{\sigma}$ 'e göre 1. temel form S_2

Bu her a, b için geçerli.

$$\begin{aligned} \Rightarrow E &= \tilde{E} \\ F &= \tilde{F} \\ G &= \tilde{G} \end{aligned} \quad \text{olmalı.}$$

ve bunlar geçerli ise, f yerel bir İzometri dir.

Örnek



Birinci Temel form $du^2 + dv^2$

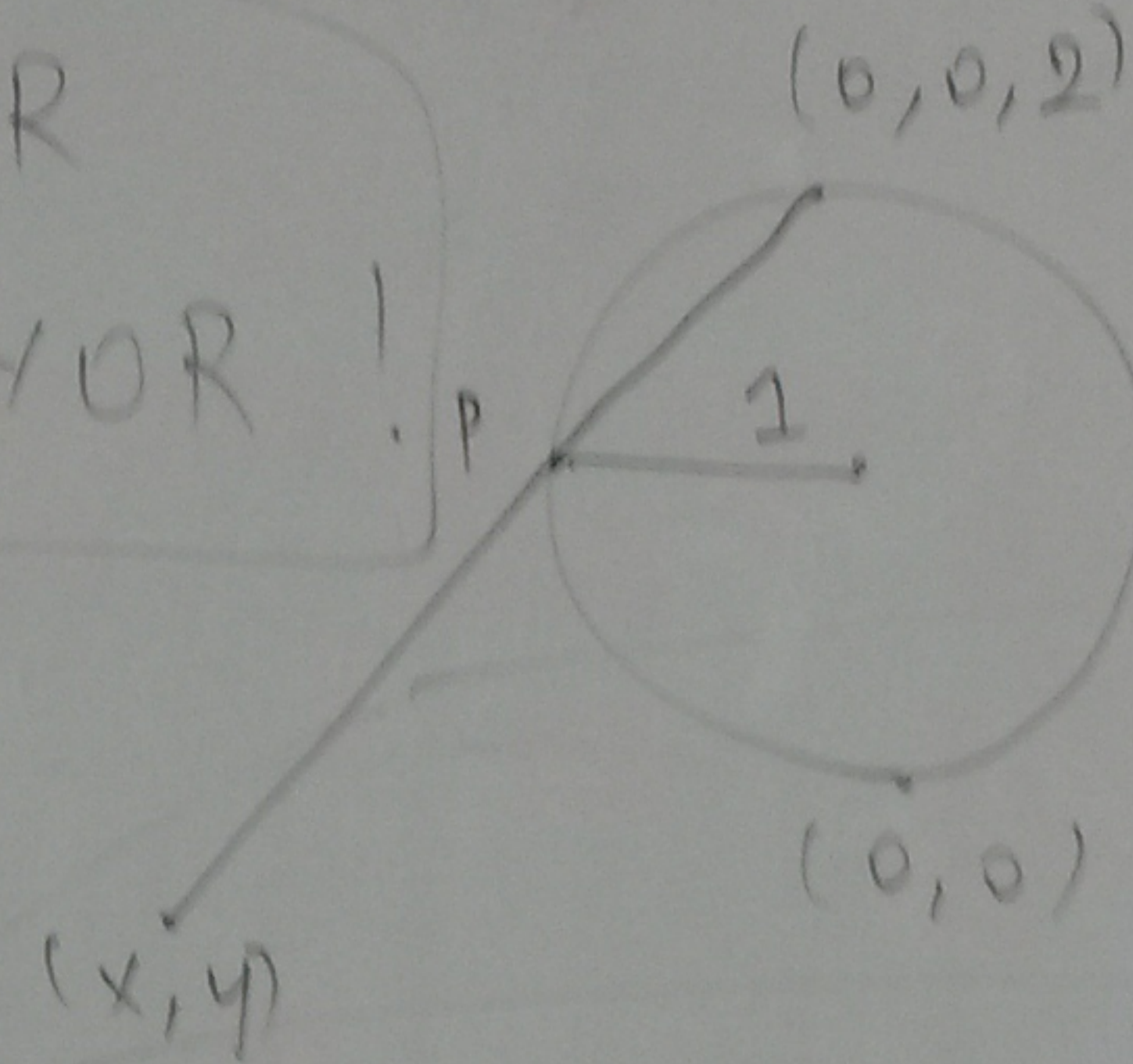
Birinci Temel form $du^2 + dv^2$

Sonuç, Bu Yerel İzometridir.

stereographic projection.

AÇILAR

KORUYOR !



$$\begin{aligned} P &= \alpha(x, y, 0) + (1-\alpha)(0, 0, 2) \\ &= (\alpha x, \alpha y, 2(1-\alpha)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|(\alpha x, \alpha y, 2-2\alpha) - (0, 0, 1) \| = 1$$

$$\Rightarrow \|(\alpha x, \alpha y, 1-2\alpha) \| = 1$$

$$\Rightarrow \alpha^2(x^2 + y^2) + 1 - 4\alpha + 4\alpha^2 = 1$$

$$\Rightarrow \alpha(x^2 + y^2) + 4\alpha = 4$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{4}{4 + x^2 + y^2}$$

STEREOGRAFİK DÖNÜŞÜM

$$(x, y) \xrightarrow{f} \left(\frac{4x}{x^2 + y^2 + 4}, \frac{4y}{x^2 + y^2 + 4}, \frac{2(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + 4} \right)$$