

$$\sigma_2(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

$$\sigma_2: (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \rightarrow S$$

σ_1 'nin görüntüsü içinde $(1, 0, v)$ $\forall v \in \mathbb{R}$ yok

σ_2 'nin görüntüsü içinde $(-1, 0, v)$ $\forall v \in \mathbb{R}$ yok

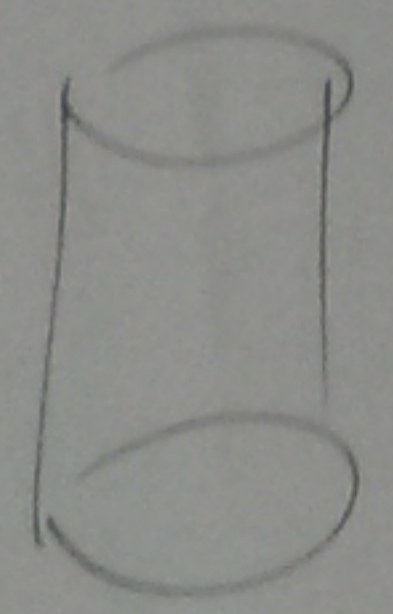
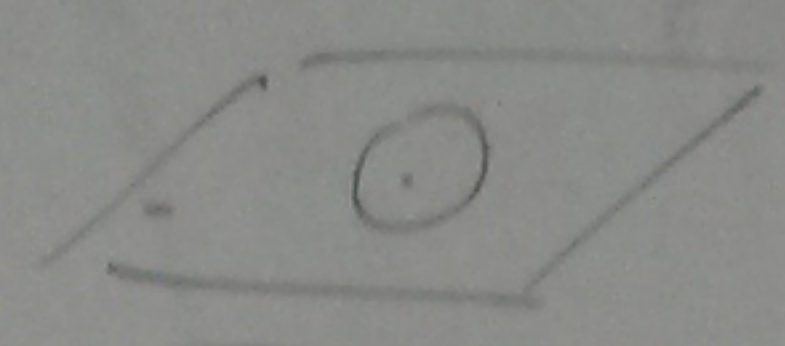
Eğer her $p \in S$ en azından bir $\sigma_i(U_i)$ içinde ise, bu koleksiyon $\mathcal{A}$ için bir ATLAS denir. Her (U_i, σ_i) bir CHART denir.

II Yüzeyler

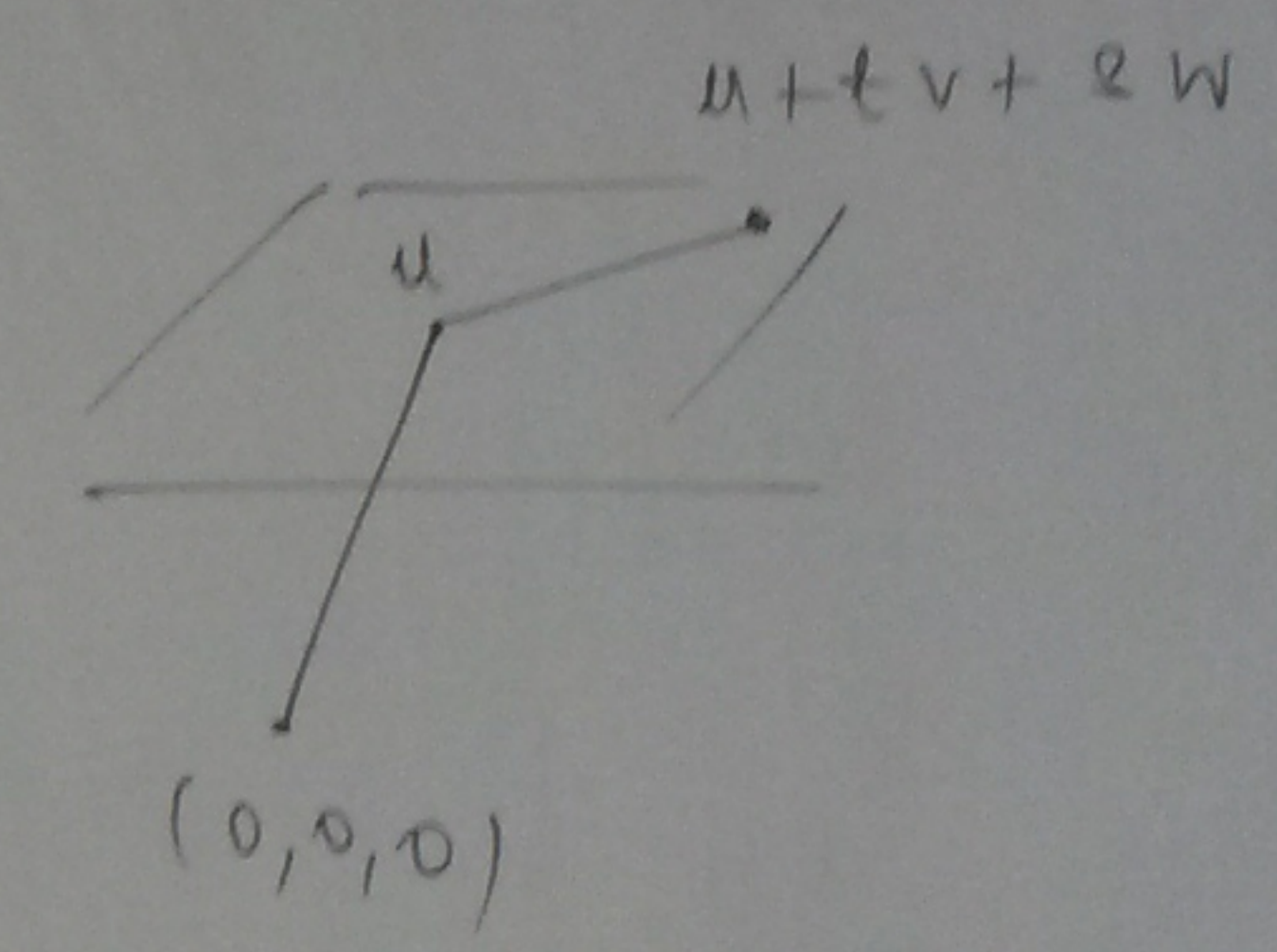
örnekler 1 (1) Düzlem : $\{(x, y, z) \mid ax + by + cz = d\}$

(2) Silindere $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1\}$

(3) Sphere $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$



Tanım 2 $S \subset \mathbb{R}^3$ Eğer her $p \in S$ için
öyle bir açık $W \subset \mathbb{R}^3$ ve
açık $U \subset \mathbb{R}^2$ ve $\sigma: U \rightarrow S \cap W$
homeomorphism varsa,
 S bir yüzey denir.



Düzlem için

$$\sigma(t, s) = u + tv + zw$$

$\sigma: \mathbb{R}^2 \rightarrow D$ (Her p nokta
için aynı
homeomorphism
yeter)

örnek 3 Düzlem : v, w Düzlem ile paralel bağımsız
iki vektör olsun ve $U \in D$ olsun. O zaman,

$$D = \{ u + tv + sw : t, s \in \mathbb{R} \}$$

Örnek 3 Düzlem: v, w Düzlem ile paralel bağımsız
iki vektör olsun ve $U \in D$ olsun. O zaman,
 $D = \{ u + tv + sw : t, s \in \mathbb{R} \}$

İçin aynı
homeomorphism
yeter

Örnek 4 Silindere: S
 $\sigma(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$
 $\sigma: [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \rightarrow S$

Bu σ 1-1 değil.

$[0, 2\pi] \times \mathbb{R}$ açık değil

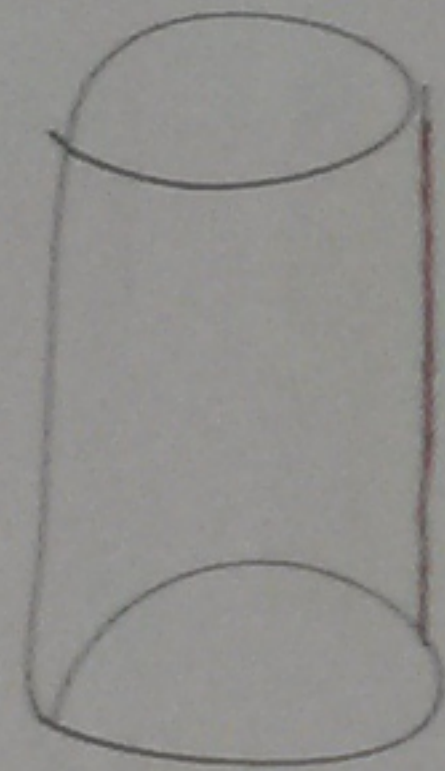
Bu parametrisasyon yetmez.

$$\sigma_1(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

$$\sigma_1: (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow S$$

$$\sigma_2(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

$$\sigma_2: (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \rightarrow S$$



σ_1 'nin görüntüsü içinde $(1, 0, v)$ var yok

σ_2 'nin görüntüsü içinde $(-1, 0, v)$ var yok

Her nokta $p \in S$ ya σ_1 ya σ_2
nin görüntüsü içinde.

Tanım 5 (Chart ve Atlas)
CHART ATLAS
HARİTA

$S \subset \mathbb{R}^3$ içinde bir küme olsun.

$$\mathcal{A} = \{ (U_i, \sigma_i), \dots, (U_k, \sigma_k) : U_i \subset \mathbb{R}^2, \sigma_i: U_i \rightarrow S \}$$

$\mathbb{R}^2$ içinde ~~7~~ açık kümeler ve $\sigma_i: U_i \rightarrow \sigma_i(U_i) \subset \mathbb{R}^3$

Eğer her $p \in S$ en azından bir $\sigma_i(U_i)$ içinde
ise, bu koleksiyon $\mathcal{A}$ için bir ATLAS denir.

Her (U_i, σ_i) bir CHART derir.

(2)

örnek 6 Sphera / küre

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

$$\sigma_1(u, v) = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2})$$

$$\sigma_2(u, v) = (u, v, -\sqrt{1-u^2-v^2})$$

$$\sigma_3(u, v) = (u, \sqrt{1-u^2-v^2}, v)$$

$$\sigma_4(u, v) = (u, -\sqrt{1-u^2-v^2}, v)$$

$$\sigma_5(u, v) = (\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v)$$

$$\sigma_6(u, v) = (-\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v)$$

Geçerli bir Atlas.

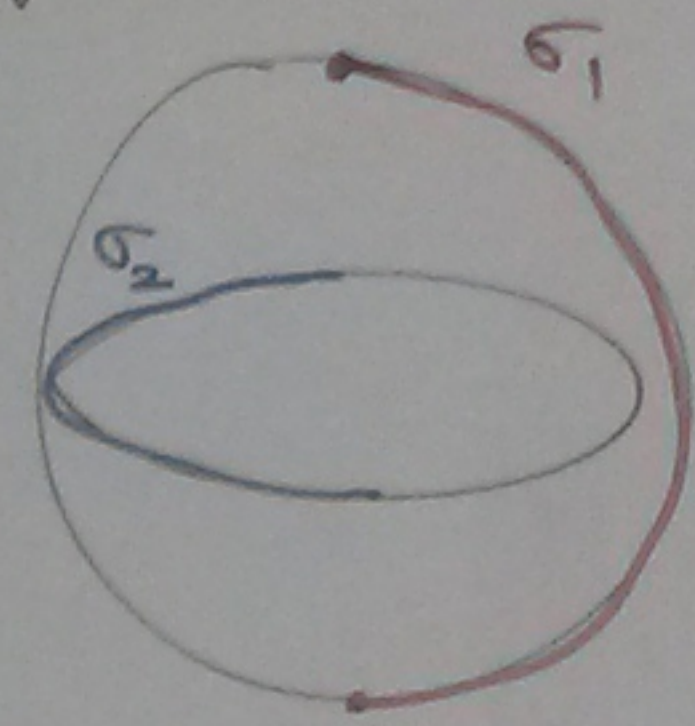
$$(u, v) \in B(0, 1) \\ = \{(u, v) \mid u^2 + v^2 < 1\}$$

İkinci bir atlas

$$\sigma_1(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta)$$

$$\sigma_1: (0, \pi) \times (0, 2\pi) \longrightarrow S$$

σ_1 'nin görüntüsü içinde



$$(x, 0, \pm \sqrt{1-x^2})$$

$$x \in [0, 1]$$

ya da.

$$\sigma_2(u, v) = (-\cos \theta \cos \varphi, -\sin \theta, -\cos \theta \sin \varphi)$$

$$\sigma_2: (0, \pi) \times (0, 2\pi)$$

$$\begin{aligned}\sigma_4(u,v) &= (u, -\sqrt{1-u^2-v^2}, v) \\ \sigma_5(u,v) &= (\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v) \\ \sigma_6(u,v) &= (-\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v)\end{aligned}$$

Geçerli bir Atlas.



$$\begin{aligned}\sigma_2(u,v) &= (-\cos \theta \cos \varphi, -\sin \theta, -\cos \theta \sin \varphi) \\ \sigma_2 &: (0, \pi) \times (0, 2\pi)\end{aligned}$$

II.2.1 Düzgün Yüzeyler.

$S \subset \mathbb{R}^3$ bir yüzey olsun

$\{(U_i, \sigma_i) : i \in [k]\}$ onun

için bir atlas olsun.

Eğer bütün σ_i Düzgün ise, bu Atlas Düzgün Atlas denir ve Yüzey Düzgün denir.

$$\sigma_1 : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\sigma_1(u,v) = (f(u,v), g(u,v), h(u,v))$$

Düzgün $(\Leftrightarrow) f, g, h$ sonsuz defa türevlenebilir.

S için (U, σ) bir chart olsun.

$$\sigma(u,v), \quad \sigma : U \longrightarrow S$$

$$\sigma(u,v) = (f(u,v), g(u,v), h(u,v))$$

$$\sigma_u = \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial h}{\partial u} \right) \quad \sigma_v = \left(\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial g}{\partial v}, \frac{\partial h}{\partial v} \right)$$

$$\sigma_u, \sigma_v \in \mathbb{R}^3.$$

(Birazdan göreceğiz, $\sigma_u(u,v)$ ve $\sigma_v(u,v)$

$\sigma(u,v)$ noktada teğet vektörler olacaklar)

II.2.2 Tanım

C : Düzgün yüzey
 (U, σ) bir CHART

Eğer her noktada σ_u, σ_v lineer bağımsız ise, S Regular denir.

bir noktadan geçen bir düzgün yüzey
üzzerindeki eğrilerin parametrik
teğet vektörleri

$$\frac{d\sigma(a, b+t)}{dt} \Big|_{t=0} = 0 = \sigma_v(a, b)$$

Demek ki, $\sigma_u(a, b)$ ve $\sigma_v(a, b)$ bir teğet vektörler
 $\sigma_u \times \sigma_v \neq 0 \Rightarrow \sigma_u, \sigma_v$ bir lineer bağımsız teğet vektörler

II.2.3 Örnek (Silindere)

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

Chart $\sigma(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$

$$U = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &= (-\sin u, \cos u, 0) \\ \sigma_v &= (0, 0, 1) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Lineer} \\ \text{Bağımsız} \end{array}$$

σ : Düzgün

$\Rightarrow$ Bu Chart bir Düzgün regular
Chart'tır.

$$\tilde{\sigma}(u, v) = (\sin u, \cos u, v)$$

Aynı şey geçerli.

$$\{(u, \sigma), (u, \tilde{\sigma})\} \text{ bir Atlas.}$$

$$U = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$$

Demek S : Düzgün regulardır.

Örnek II.2.4 Küre

$$\sigma(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta)$$

$$\tilde{\sigma}(\theta, \varphi) = (-\cos \theta \cos \varphi, -\sin \theta, -\cos \theta \sin \varphi)$$

$$U = (0, \pi) \times (0, 2\pi)$$

$$\{(u, \sigma), (u, \tilde{\sigma})\}: S \text{ için Düzgün regular} \\ \text{Atlas'tır.}$$

$$\sigma_\theta = (-\sin \theta \cos \varphi, -\sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$$

$$\sigma_\varphi = (-\cos \theta \sin \varphi, \cos \theta \cos \varphi, 0)$$

$$\sigma_\theta \times \sigma_\varphi = (-\cos^2 \theta \cos \varphi, -\cos^2 \theta \sin \varphi, -\sin \theta \cos \theta)$$

$$\|\sigma_\theta \times \sigma_\varphi\| = |\cos \theta| \quad \theta = \frac{\pi}{2} \text{ değilse Regular.}$$

Aynı şey geçerli.

$\{(u, \sigma), (u, \tilde{\sigma})\}$ bir Atlas.
 $U = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$

$$\sigma_\theta \times \sigma_\varphi = (-\cos^2 \theta \cos \varphi, -\cos^2 \theta \sin \varphi, -\sin \theta \cos \theta)$$

$$\|\sigma_\theta \times \sigma_\varphi\| = |\cos \theta| \quad \theta = \frac{\pi}{2} \text{ değilse Regular.}$$

II-3. Teğet vektörleri ve türevleri.
 $S \subset \mathbb{R}^3$ $p \in S$ (Düzgün)

$$\gamma: (\alpha, \beta) \rightarrow S, \quad \gamma(0) = p$$

bir düzgün eğri olsun.

0 zaman $\gamma'(0)$ p noktasında
 bir Teğet vektör olacaktır.

$$T_p(S) = \left\{ \gamma'(0) \mid \begin{array}{l} \gamma: (\alpha, \beta) \rightarrow S \\ \gamma(0) = p \\ \gamma: \text{Düzgün} \end{array} \right\}$$

p noktadan geçen bütün düzgün yüzey
 üzerindeki eğrilerin p noktadaki
 teğet vektörleri

Lema 11-3-1 $S \subset \mathbb{R}^3$ düzgün regular yüzey.
 $p \in S$.

(U, σ) p noktayı içeren bir Chart.
 0 zaman, $T_p(S)$ bir düzlemdir. (2 boyutlu)

İspat

$$\sigma(a, b) = p \text{ olsun.}$$

$t \rightarrow \sigma(a+t, b)$ bir eğridir

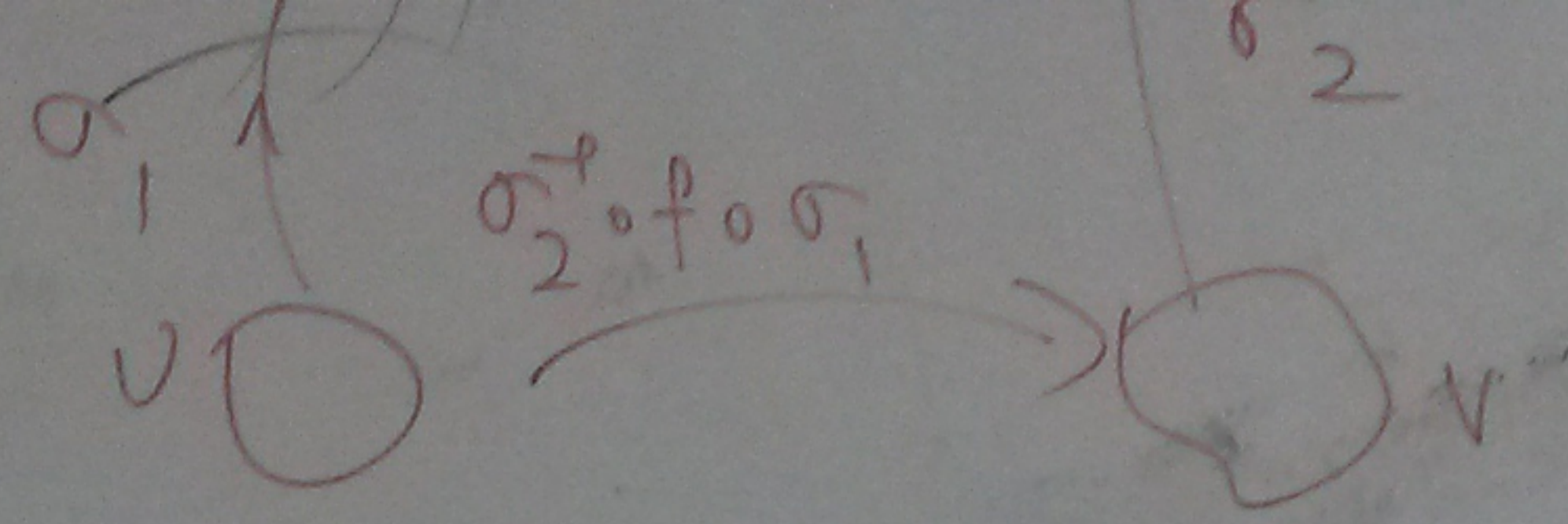
$t \rightarrow \sigma(a, b+t)$ başka bir eğri

$$\left. \frac{d\sigma(a+t, b)}{dt} \right|_{t=0} = \sigma_u(a, b)$$

$$\left. \frac{d\sigma(a, b+t)}{dt} \right|_{t=0} = \sigma_v(a, b)$$

Demek ki, $\sigma_u(a, b)$ ve $\sigma_v(a, b)$ iki teğet vektörler.
 $\sigma_u \times \sigma_v \neq 0 \Rightarrow \sigma_u, \sigma_v$ iki lineer bağımsız teğet vektörler.



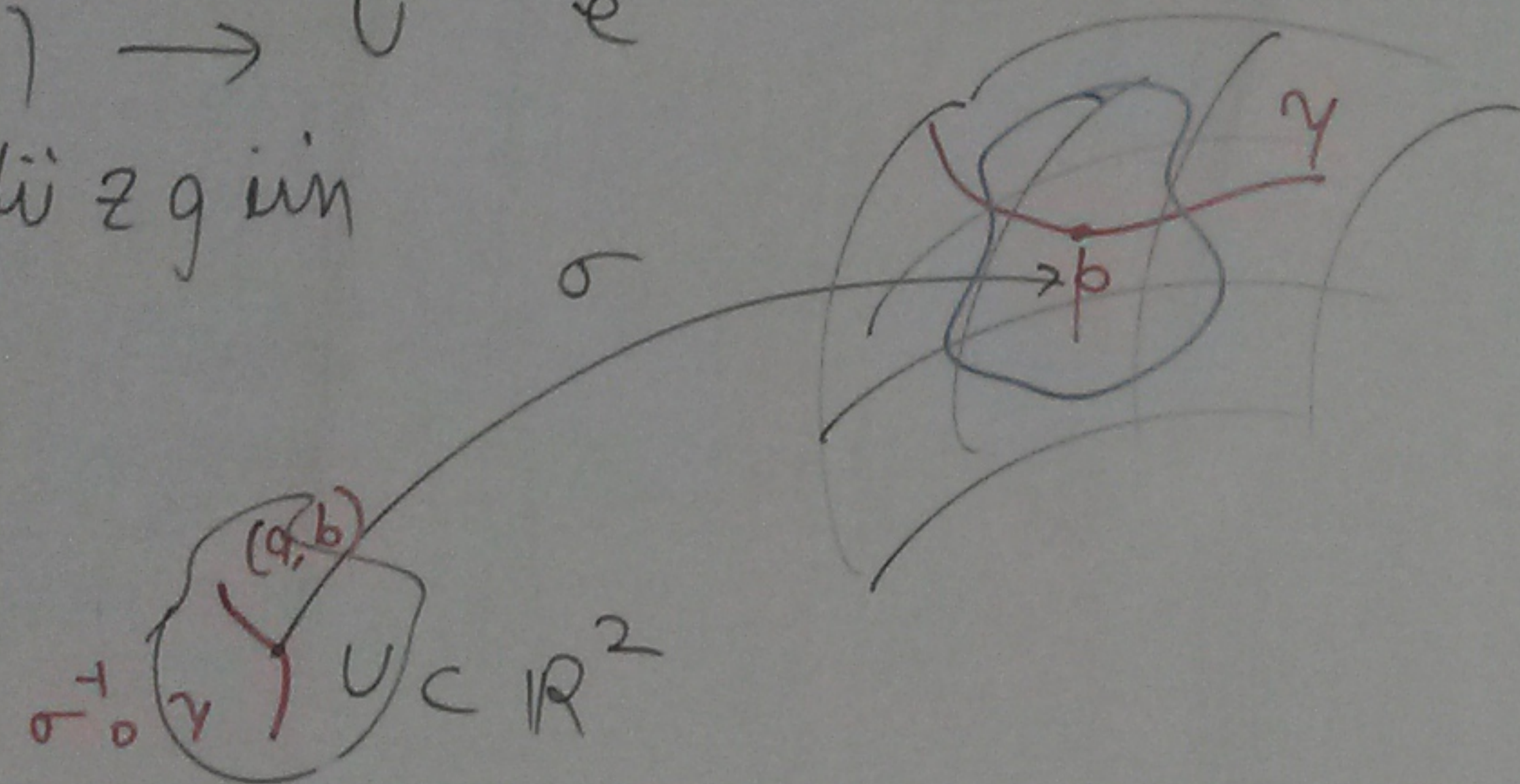


$\gamma: (a, b) \rightarrow S$ bir düzgiin eğri olsun.

$$\gamma(0) = p$$

Iddia: $\gamma'(0) = \alpha \sigma_u + \beta \sigma_v$ bağlayan
 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ var.

$\sigma^{-1} \circ \gamma: (a, b) \rightarrow U$ 'e
giden bir düzgiin
eğridir.



$$\sigma^{-1} \circ \gamma(t) = (f(t), g(t))$$

Şeklinde
olmalı

$$\sigma^{-1} \circ \gamma(0) = \sigma^{-1}(p) = (a, b)$$

$$\gamma(t) := \sigma^{-1} \circ \gamma(t) = (f(t), g(t)) \text{ diyelim}$$

$$\gamma = \sigma \circ \gamma$$

$$\gamma(t) = \sigma(f(t), g(t))$$

$$\gamma'(t) = \frac{\partial \sigma}{\partial u} f'(t) + \frac{\partial \sigma}{\partial v} g'(t)$$

$$= \sigma_u f'(t) + \sigma_v g'(t)$$

$$\gamma'(0) = \sigma_u(f(0), g(0)) f'(0) + \sigma_v(f(0), g(0)) g'(0)$$

$$= \alpha \sigma_u + \beta \sigma_v \quad \text{Sayı}$$

$\Rightarrow$ Her Teğet vektör σ_u ve σ_v 'nin
lineer toplamıdır.

Şimdi bunu gösterelim: Her $\alpha \sigma_u + \beta \sigma_v$
bir teğet vektördür.

$$\sigma^{-1} \circ \gamma(0) = \sigma^{-1}(p) = (a, b)$$

$$\gamma(t) := \sigma^{-1} \circ \gamma(t) = (f(t), g(t)) \text{ diyelim}$$

$$\gamma(t) = \sigma(a + \alpha t, b + \beta t) \text{ olsun.}$$

Düzgün regular ✓

$$\gamma(0) = \sigma(a, b) = p \quad \checkmark$$

$$\gamma'(t) = \sigma_u(a + \alpha t, b + \beta t) \alpha + \sigma_v(a + \alpha t, b + \beta t) \beta$$

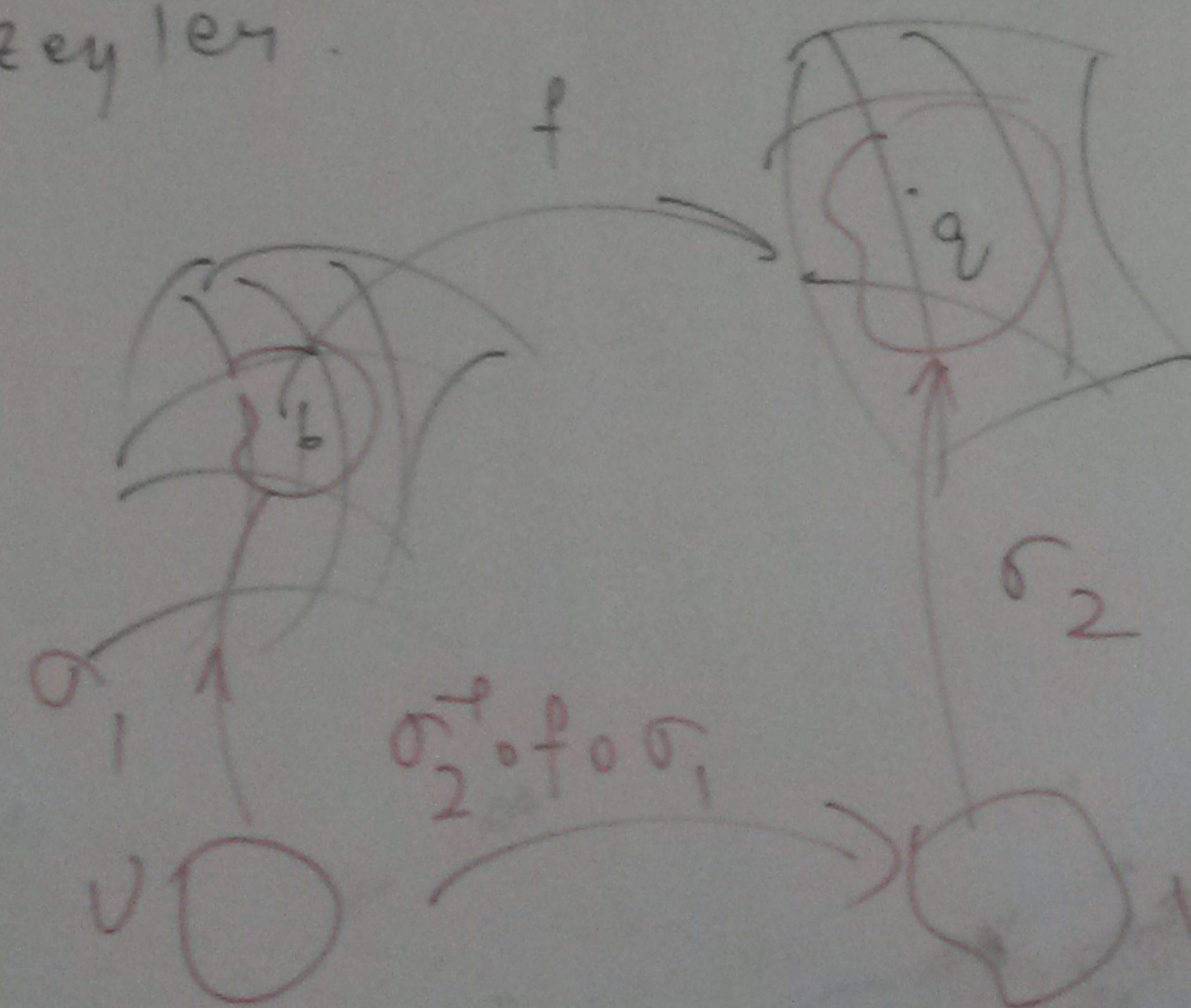
$$\gamma'(0) = \sigma_u \alpha + \sigma_v \beta \quad \checkmark.$$

Tartışma II.3.2 Türevler.

S_1, S_2 yüzeyler.

$$f: S_1 \rightarrow S_2$$

$$f(p) = q$$



Şimdi bunu gösterelim: Her $\alpha \in T_p S_1 + \beta \in T_p S_2$ bir teğet vektördür.

Tanım

$$p \in S_1, q \in S_2$$

$$f: S_1 \rightarrow S_2 \text{ fonksiyon}$$

$$f(p) = q.$$

$$(U, \sigma) \text{ } S_1 \text{ için bir chart olsun}$$

$$\text{ve } p \text{ içersin.}$$

$$(V, \tilde{\sigma}) \text{ } S_2 \text{ için } q \text{ içeren bir chart olsun}$$

Eğer

$$\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1 : U \rightarrow V$$

$$\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1$$

$$\sigma_1^{-1}(p) \text{ noktada düzgin}$$

$$\text{ise, } f \text{ } p \text{ noktada}$$

$$\text{düzgün denir.}$$

$$T_p(S) = \left\{ \gamma'(0) : \gamma: (\alpha, \beta) \rightarrow S \right. \\ \left. \gamma(0) = p \right\}$$

Düzgün
p noktasından geçen bütün düzgün yüzey
üzzerindeki eğrilerin p noktasındaki
teğet vektörleri

$$t \rightarrow \sigma(a, b+t) \quad \text{başka bir eğri}$$

$$\left. \frac{d\sigma(a+t, b)}{dt} \right|_{t=0} = \sigma_u(a, b)$$

$$\left. \frac{d\sigma(a, b+t)}{dt} \right|_{t=0} = \sigma_v(a, b)$$

Demek ki, $\sigma_u(a, b)$ ve $\sigma_v(a, b)$ iki teğet vektörler
 $\sigma_u \times \sigma_v \neq 0 \Rightarrow \sigma_u, \sigma_v$ (k) lineer bağımsız teğet vektörler

$f: S_1 \rightarrow S_2$ Düzgün
olcun

$p \in S_1$ $f(p) = q$ olsun.

$\gamma(0) = p$ sağlayan $\gamma: (\alpha, \beta) \rightarrow S_1$

bir düzgün eğri olsun.

0 zaman

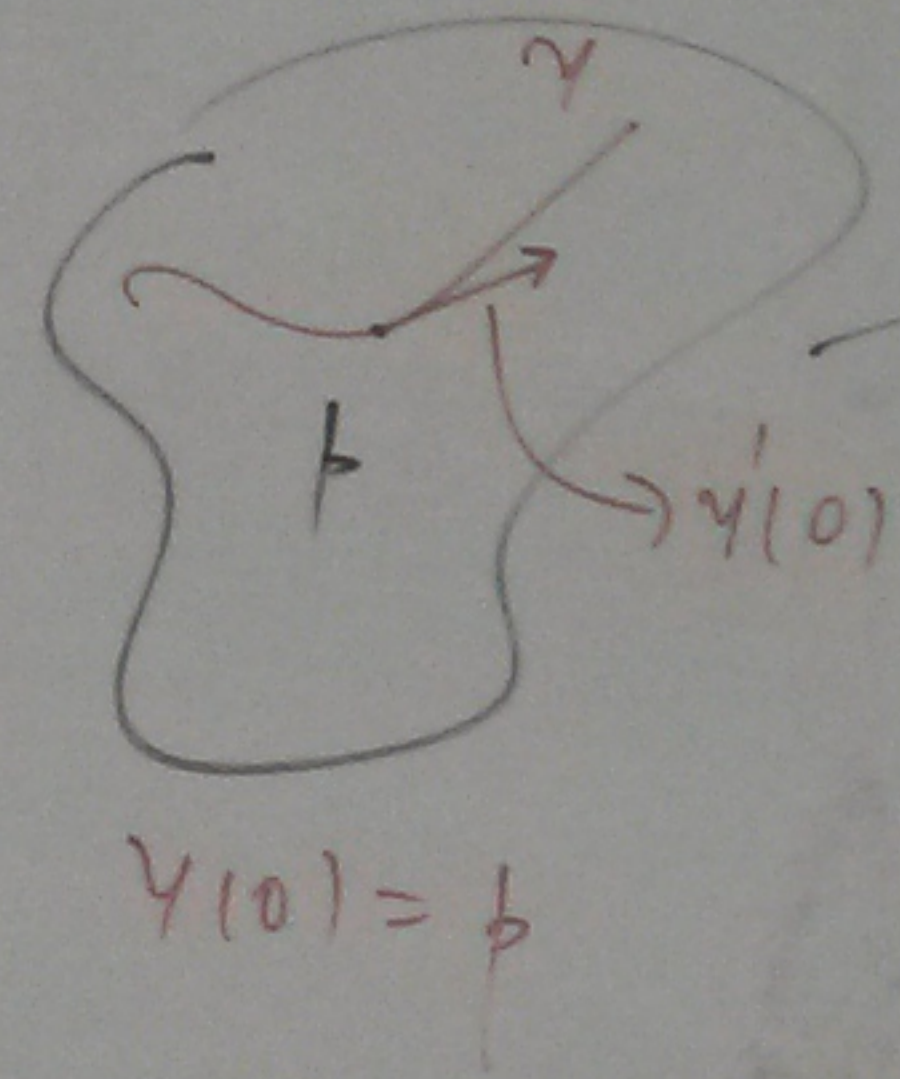
(TÜREV)

$$\gamma'(0) \xrightarrow{D_p f} (f \circ \gamma)'(0)$$

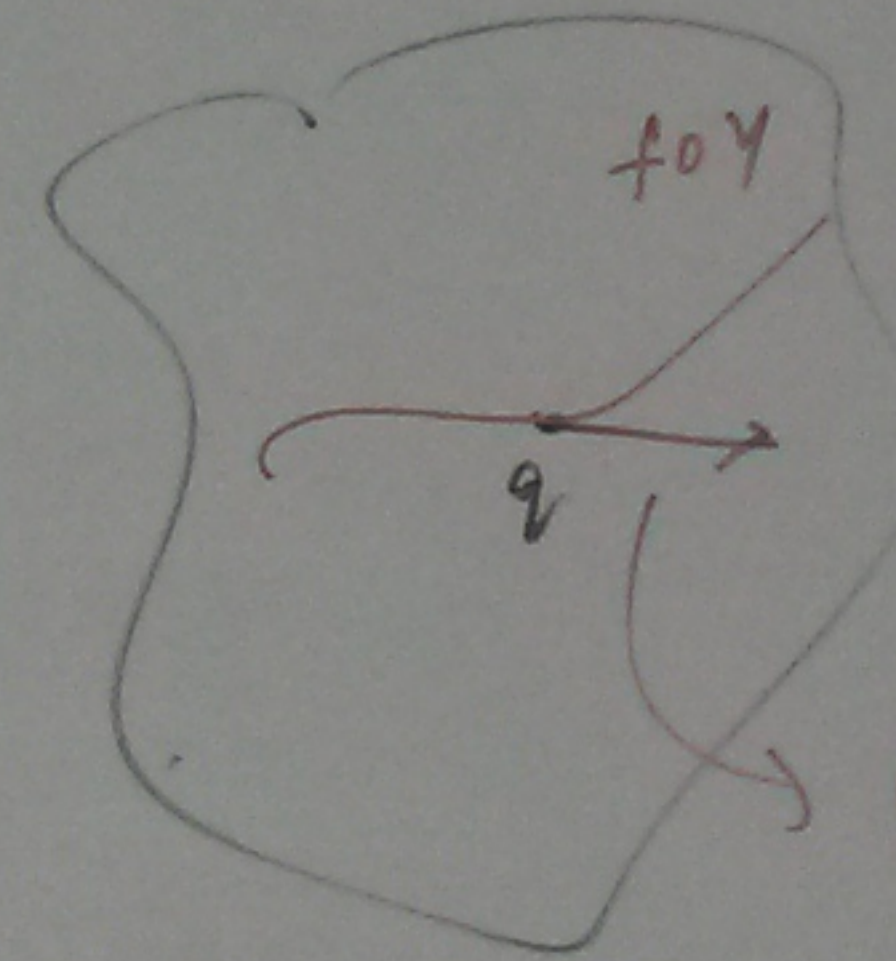
$$T_p(S_1)$$

$$T_{f(p)}(S_2)$$

veren dönüşüm TÜREV DENİR



f



$$\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$$

$$\sigma(u, v) = (u, v, 0)$$

$$\sigma_u = (1, 0, 0)$$

$$\sigma_v = (0, 1, 0)$$

$$\text{Span}\{\sigma_u, \sigma_v\} \cong \mathbb{R}^2$$

Yarar : ① $D_p f$ iyi şekilde Tanımlı

$$D_p f : T_p(S_1) \rightarrow T_{f(p)}(S_2)$$

bir lineer dönüşümdür.

Not

$$f(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ = (a(u, v), b(u, v))$$

Türev

$$Df_{(u,v)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a}{\partial u} & \frac{\partial b}{\partial u} \\ \frac{\partial a}{\partial v} & \frac{\partial b}{\partial v} \end{bmatrix} (u, v)$$